Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

Н. М. Боголюбов

ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

I. Введение

Четырехвершинная модель является частным случаем шестивершинной модели [1, 2], в которой исключены две вершины. Четырехвершинная модель рассматривалась в работах [3, 4], в которых была выявлена ее связь с моделью случайных укладок на полубесконечном цилиндре. Модели укладок являются моделями классической дискретной статистической физики, задача которых состоит в описании способов укладок определенных поверхностей плитками различной геометрической формы без зазоров и наложений. Укладки называются случайными лишь для того, чтобы отличить их от правильных квазипериодических покрытий.

Связь интегрируемых моделей с комбинаторикой широко обсуждается в настоящее время. Шестивершинная модель играет важную роль в данном направлении. Модель интенсивно изучалась как для периодических, так и для фиксированных граничных условий [5–9]. Шестивершинная модель для граничных условий типа доменной стенки имеет отношение к перечислению укладок ацтекских "алмазов" и к перечислению альтернированных знаковых матриц [10–12].

В данной статье мы применим квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) к решению модели [13, 14]. Данный подход позволяет исследовать модель на решетке конечного размера с различными граничными условиями и вычислить статистические суммы вершинной и соответствующей ей модели покрытий. В частности, мы покажем, что статистическая сумма модели с фиксированными граничными условиями имеет смысл производящей функции плоских разбиений строгих по столбцам и строкам. Плоские разбиения эквивалентны как трехмерным диаграммам Юнга, помещенным в ящик конечного размера, так и покрытиям ромбами

Данная работа частично поддержана CRDF грантом RUMI-2622-CT-04, проектом РФФИ 07-01-00358 и грантом НШ-5403.2006.01.

полурегулярного шестиугольника [15, 16]. В случае периодических граничных условий четырехвершинная модель эквивалентна модели покрытия тора единичными ромбами.

Перечисление плоских разбиений является классической проблемой комбинаторики [16, 17] и теории симметрических функций [15]. Статистика плоских разбиений по отношению к естественным вероятностным мерам изучалась в [18, 19]. Корреляционные функции случайных плоских разбиений вычислялись в [20].

Плоские разбиения естественно возникают, как в теории кристаллов [12] и прямого протекания [21], так и в теории случайных блужданий по решеткам [22–26]. Сравнительно недавно обсуждалась возможная связь топологических струн на многообразиях Калаби–Яо и таянием кристаллов [27].

Связь интегрируемых моделей бозонного типа с теорией симметрических функций и теорией плоских разбиений рассматривалась в работах [28–31].

Статья организована следующим образом. В разделе II мы даем определение модели и излагаем подход (КМОЗ) к ее решению. В разделе III исследуется модель на решетке с фиксированными граничными условиями и устанавливается ее связь с плоскими разбиениями. Статистическая сумма модели на периодической решетке вычисляется в разделе IV. В Приложении рассмотрен скейлинговый предел шестивершинной модели приводящий к четырехвершинной модели.

II. Четырехвершинная модель

Четырехвершинная модель на квадратной решетке, которая является частным случаем шестивершинной модели, определяется четырьмя различными конфигурациями стрелок, направленными как в сторону каждого узла решетки, так и от него. Из шести возможных конфигураций две, с двумя горизонтальными стрелками, направленными направо, исключены. Статистический вес ω приписывается каждой допустимой конфигурации. Мы рассмотрим модель, в которой вершинные веса третьей и четвертой вершины совпадают (Рис. 1). Изображая стрелки, направленные вверх или направо линиями, мы получим альтернативное описание вершин с помощью линий протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться лишь в двух состояниях, с линией или без нее, то существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий – наборами решеточных путей.

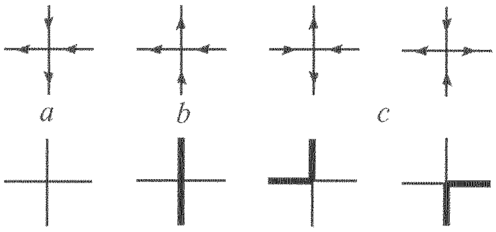

Рис. 1. Четыре допустимых вершины в виде конфигураций стрелок и линий.

Для однородной модели вершинные веса ω не зависят от положения узла решетки, и статистическая сумма равна

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \sum \omega_a^{l^a} \omega_b^{l^b} \omega_c^{l^c}, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке, а ω_a , ω_b и ω_c есть веса соответствующих вершин. Допустимые конфигурации зависят от наложенных граничных условий, которые определяются направлением стрелок на границе решетки. Число вершин типа $(a), (b), (c)$ в каждой конфигурации равно l^a, l^b, l^c. Для неоднородной модели вершинные веса зависят от положения узла решетки.

Рассмотрим модель на $2N \times (M+1)$ квадратной решетке со следующими граничными условиями: все стрелки на правой и левой границе направлены налево, верхние и нижние стрелки первых N колонок (считая слева) направлены внутрь, а верхние и нижние стрелки последних N колонок направлены наружу. Данные условия мы будем называть фиксированными граничными условиями.

Для того чтобы перечислить все возможные конфигурации стрелок, значительно удобнее использовать описание модели в терминах линий и представлять допустимые конфигурации как наборы решеточных путей. Путь начинается в одной из N нижних левых вершин и завершается в одной из N верхних правых и всегда идет на восток или север. Пути не соприкасаются, причем, несколько последовательных шагов допустимы в вертикальном направлении и лишь один шаг в горизонтальном. Типичный набор путей изображен на (Рис. 2). Длина пути равна $N+M$. Число вершин типа (c) в допустимом пути равно $2N$, так как лишь один последовательный шаг разрешен в горизонтальном направлении, следовательно число вершин типа (b) равно $M-N+1$. Это означает, что число вершин типа (c) и (b) в наборе путей равно соответственно $l^c = 2N^2$ и $l^b = l^a = N(M-N+1)$.

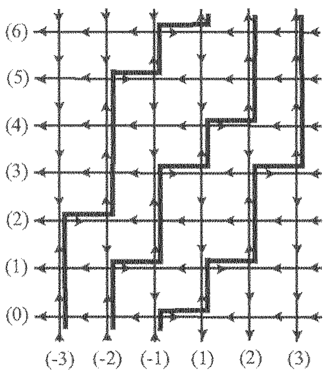

Рис. 2. Типичная конфигурация допустимых решеточных путей на решетке с фиксированными граничными условиями.

Статистическая сумма модели с фиксированными граничными условиями дается следующим выражением

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = (\omega_a \omega_b)^{N(M-N+1)} \omega_c^{2N^2} S(N, M), \tag{2}$$

где через $S(N, M)$ обозначено число всех допустимых конфигураций решеточных путей.

Для того чтобы вычислить $S(N, M)$, рассмотрим модель на нумерованной $2N \times (M+1)$ квадратной решетке. Если первые N колонок решетки имеют номера $(-N, \ldots, -1)$, а последние $(1, \ldots, N)$, если нижняя строка имеет номер 0, а верхняя M, тогда путь с номером m идет из вершины $(-N+m-1; 0)$ к вершине $(m; M)$, $1 \le m \le N$.

Каждый набор допустимых решеточных путей может быть представлен в виде матрицы π_{ij} размерности $N \times N$. Путь с номером m соответствует m-той колонке этой матрицы с матричными элементами π_{jm} равными числу ячеек в последующих колонках

j решетки (начиная с правой) под m-тым путем. Матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

соответствует набору путей на (Рис. 4).

Набор π_{ij} неотрицательных целых чисел, расположенных в порядке нестрогого убывания по индексам i и j $(i, j = 1, 2, \ldots)$, называется плоским разбиением π [15]. Числа π_{ij} называются частями плоского разбиения. У плоского разбиения есть трехмерная диаграмма, представляющая множество столбцов из единичных кубов - трехмерная диаграмма Юнга. Число $|\pi| = \sum \pi_{ij}$ называется ее объемом или весом плоского разбиения. Высота колонки с координатами (i, j) равна части плоского разбиения π_{ij}. Если $i \leq r, j \leq s$ и $\pi_{ij} \leq t$ для всех частей плоского разбиения, то такое плоское разбиение называется плоским разбиением, заключенным внутри ящика со сторонами r, s, t. Если при этом $\pi_{ij} > \pi_{i+1j}$, т.е. если части плоского разбиения убывают вдоль каждого столбца, то такое π называется строгим по столбцам плоским разбиением. Плоское разбиение π с частями, убывающими как по столбцам, так и по строкам ($\pi_{ij} > \pi_{i+1j}$ и $\pi_{ij} > \pi_{ij+1}$), будем называть строгим разбиением. Если $s = r$, то элемент π_{11} строгого разбиения π_{ij} удовлетворяет условию $\pi_{11} \geq 2r-2$. Произвольное плоское разбиение π_{ij}, заключенное в ящик со сторонами $r \times r \times t$, может быть преобразовано в строгое плоское разбиение в ящике со сторонами $r \times r \times (t + 2r - 2)$, если добавить к нему разбиение определяемое $r \times r$ матрицей

$$\pi_{spp} = \begin{pmatrix} 2r-2 & 2r-3 & \cdots & r-1 \\ 2r-3 & 2r-4 & \cdots & r-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r-1 & r-2 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

которая соответствует минимальному строгому разбиению. Объем строгого плоского разбиения выражается чрез объем соответствующего плоского разбиения:

$$|\pi_{spp}| = |\pi| + N^2(N-1). \qquad (4)$$

Плоское разбиение в ящике со сторонами $r \times s \times t$ эквивалентно укладке полурегулярного шестиугольника единичными ромбами

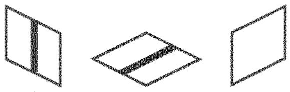

Рис. 3. Три типа единичных ромбов.

с углами $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ (Рис. 5). В рассматриваемом случае допустимые укладки представляют собой проекцию строгих трехмерных диаграмм Юнга с градиентными линиями. Трехмерная диаграмма Юнга, которая соответствует плоскому разбиению (3), изображена на (Рис. 4).

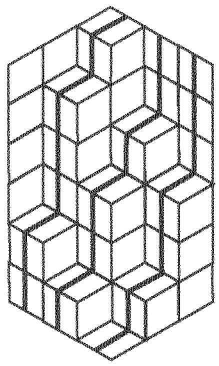

Рис. 4. Строгое плоское разбиение с градиентными линиями.

По построению $S(N,M)$ в (2) есть число строгих плоских разбиений в ящике со сторонами $N\times N\times M$ или число плоских разбиений в ящике со сторонами $N\times N\times(M-2N+2)$ соответственно. Согласно формуле МакМагона, число плоских разбиений в ящике со сторонами $N\times N\times M$ равно

$$A(N,M)=\prod_{1\le j,k\le N}\frac{M+j+k-1}{j+k-1}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$S(N,M)=A(N,M+2N-2)=\prod_{1\le j,k\le N}\frac{M-j-k+3}{j+k-1}, \tag{6}$$

и статистическая сумма однородной модели (2) равна

$$Z(\omega_a,\omega_b,\omega_c) = (\omega_a\omega_b)^{N(M-N+1)}\omega_c^{2N^2} \prod_{1\le j,k\le N} \frac{M-j-k+3}{j+k-1}. \tag{7}$$

В случае неоднородной модели вершинные веса ω_a, ω_b и ω_c зависят от положения узла решетки. Мы рассмотрим модель, в которой веса зависят только от номера колонки. Если первые N колонок имеют номера $(-N,\dots,-1)$, а последние $(1,\dots,N)$ соответственно, тогда статистическая сумма модели равна

$$Z(\{\omega_a\},\{\omega_b\},\{\omega_c\}) = \sum \prod_{k=-1}^{-N} (\omega_a)_k^{l_k^a}(\omega_b)_k^{l_k^b}(\omega_c)_k^{l_k^c} \prod_{j=1}^{N} (\omega_a)_j^{l_j^a}(\omega_b)_j^{l_j^b}(\omega_c)_j^{l_j^c}. \tag{8}$$

Если положить

$$\begin{aligned}
&(\omega_a)_j = v_{-j}^{-1}, (\omega_b)_j = v_{-j};\ -N\le j\le -1,\\
&(\omega_a)_j = u_j^{-1}, (\omega_b)_j = u_j;\ 1\le j\le N,\\
&(\omega_c)_j = 1,
\end{aligned} \tag{9}$$

то

$$Z(\{\omega_a\},\{\omega_b\},\{\omega_c\}) = \sum \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{l_k^b-l_k^a} \prod_{j=0}^{N-1} u_j^{l_j^b-l_j^a}. \tag{10}$$

Статистическую сумму можно вычислить в явном виде, если выбрать вершинные веса в следующем виде

$$v_j = q^{-\frac{j}{2}},\ \ u_j = q^{\frac{j-1}{2}}, \tag{11}$$

где $q=e^{-\nu}$ $(\nu>0)$ это Больцмановский вес. В данной параметризации статистическая сумма неоднородной модели модели (10) примет вид

$$Z(q) = \sum q^{\sum\limits_{k=-1}^{-N}\frac{k}{2}(l_k^a-l_k^b)+\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{j-1}{2}(l_j^a-l_j^b)}, \tag{12}$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам решеточных путей. Объем трехмерной строгой диаграммы Юнга в ящике со сторонами $N\times N\times M$ вычисляется по соответствующему ей набору решеточных путей по формуле [28]:

$$|\pi| = \frac{N^2M}{2} + \sum_{k=-1}^{-N}\frac{k}{2}(l_k^a-l_k^b) + \sum_{j=1}^{N}\frac{j-1}{2}(l_j^a-l_j^b).$$

С помощью этой формулы статистическую сумму модели с вершинными весами, определенными параметризацией (11), можно записать в следующем виде

$$Z(q) = q^{-\frac{N^2M}{2}} \sum_{spp} q^{|\pi|} = q^{-\frac{N^2M}{2}} S_{spp}(q|N, M), \tag{13}$$

где суммирование ведется по всем строгим плоским разбиениям в ящике со сторонами $N \times N \times M$. Функция $S_{spp}(q|N, M)$, является статистической суммой трехмерных строгих диаграмм Юнга, помещенных в ящик со сторонами $N \times N \times M$, при условии, что каждому единичному кубу ставится в соответствие больцмановский вес q. Эту функцию можно также рассматривать как производящую функцию строгих плоских разбиений. Формула (4) позволяет выразить производящую строгих разбиений через производящую функцию плоских разбиений

$$S_{spp}(q|N, M) = q^{N^2(N-1)} S_{pp}(q|N, M - 2N + 2). \tag{14}$$

Формула МакМагона для производящей функции плоских разбиений в ящике со сторонами $N \times N \times \tilde{M}$ имеет вид [16]:

$$S_{pp}(q|N, \tilde{M}) = \prod_{1 \le j,k \le N} \frac{1 - q^{\tilde{M}-1+j+k}}{1 - q^{j+k-1}}. \tag{15}$$

Положив $\tilde{M} = M - 2N + 2$, получим, что

$$S_{spp}(q|N, M) = q^{N^2(N-1)} \prod_{1 \le j,k \le N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{j+k-1}}. \tag{16}$$

Ответ для однородной модели (6) получается из (16) в пределе $q \to 1$.

Рассмотрим теперь модель на решетке с периодическими граничными условиями. Это означает, что на решетке с $(M + 1)$ горизонтальными и L вертикальными линиями крайние стрелки на любой линии направлены в одну сторону (Рис. 5).

Мы ограничимся случаем, когда $(M + 1)$ и L четны. В четырехвершинной модели число стрелок, направленных направо или налево в последующих столбцах решетки, сохраняется. Это означает, что число вершин типа (c) на каждой вертикальной линии сохраняется и равно $l_c = 2n$, где n это число стрелок, направленных направо в примыкающем столбце.

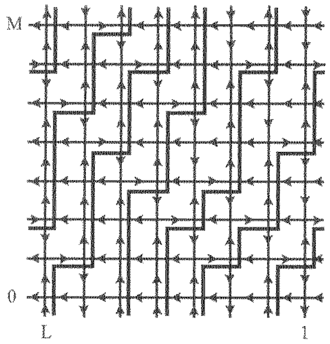

Рис. 5. Типичная конфигурация решеточных путей на решетке с периодическими граничными условиями.

Статистическая сумма (1) однородной модели на периодической решетке размерности $(M+1)\times L$ с фиксированным числом стрелок, направленных направо, и вершинными весами $\omega_a = e^{-\nu}$, $\omega_b = e^{\nu}$ и $\omega_c = 1$ равна

$$Z_n(\nu) = \sum e^{\nu(l_b - l_a)}, \tag{17}$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке с периодическими граничными условиями или по соответствующем наборам решеточных путей (Рис. 5).

Четырехвершинная модель с периодическими граничными условиями эквивалентна модели случайных укладок [3, 4]. Укладки производятся набором, состоящим из плиток трех видов: двух параллелограммов и квадрата (Рис. 6).

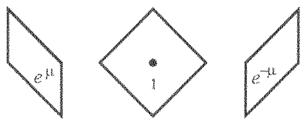

Рис. 6. Плитки и их Больцмановские веса.

Острые углы параллелограммов равны 45^o а длины их диагональных сторон равны сторонам квадрата. Эти плитки могут быть уложены на тор случайным образом при условии, что они не накрывают друг друга и между ними нет щелей. Вершинные веса $\omega_a = e^{-\nu}$, $\omega_b = e^{\nu}$ приписываются параллелограммам, а вес

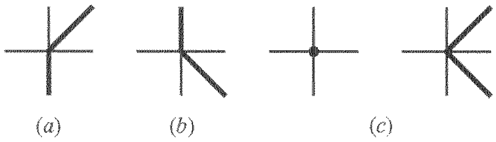

Рис. 7. Соответствие вершин четырехвершинной модели и сторон плиток.

$\omega_c = 1$ квадрату. Взаимнооднозначное соответствие между вершинами (Рис. 1) и сторонами плиток показано на (Рис. 7).

Укладка, соответствующая конфигурации стрелок на решетке (Рис. 5) представлена на (Рис. 8)

Сохранение числа вершин типа c в каждой колонке в вершинной модели соответствует сохранению числа квадратов (точек) в колонках модели укладок.

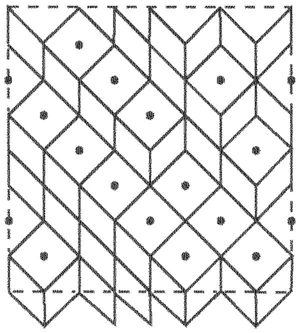

Рис. 8. Типичная укладка в периодическом случае.

Когда $2n = M + 1$ ($l_a = l_b = 0$), то тор покрыт квадратами (Рис. 9), а когда $n = 0$ ($l_c = 0$), то тор покрывается параллелограммами (Рис. 9). Для нулевого химического потенциала $\mu = 0$ статистическая сумма (1) равна числу возможных покрытий тора с фиксированным числом квадратов n в колонках. Для $n = 0$ существует 2^L различных вариантов покрытий, а для $2n = M + 1$ существует лишь два способа покрыть тор. Статистическая сумма модели укладок дается формулой (17), в которой суммирование проводится по всем возможным укладкам с фиксированным числом квадратов в колонках. Статистическая сумма четырехвершинной модели и соответствующей модели укладок будет

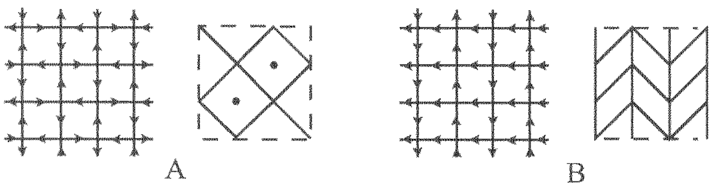

Рис. 9. Покрытие тора квадратами (A) и параллелограммами (B).

вычислена методом алгебраического анзаца Бете.

III. Решение модели

Для того чтобы применить КМОЗ для исследования данной модели, мы воспользуемся спиновым описанием модели. Каждому вертикальному и каждому горизонтальному ребру решетки ставится в соответствие локальное пространство $\mathcal{C}^2$. Состояния со спином вверх и спином вниз образуют естественный базис в этом пространстве. Состояние со спином вверх на вертикальном ребре соответствует стрелке, направленной вверх, а состояние со спином вниз стрелке, направленной вниз. Состояние со спином вверх на i-том горизонтальном ребре $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \equiv |\leftarrow\rangle_i$ соответствует стрелке, направленной налево, а состояние со спином вверх $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \equiv |\rightarrow\rangle_i$ стрелке, направленной направо. Вспомогательным пространством мы будем называть пространство, ассоциированное со всеми вертикальными ребрами решетки $\mathcal{V} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$, а квантовым – пространство, ассоциированное со всеми горизонтальными ребрами решетки $\mathcal{H} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$ В каждом узле решетки в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ действует оператор. Этот оператор, действующий нетривиально только в локальном вспомогательном $\mathcal{C}^2$ и локальном квантовом $\mathcal{C}^2$ пространствах, называется L-оператором.

L-оператор четырехвершинной модели имеет вид

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} L_{11}(n|u) & L_{12}(n|u) \\ L_{21}(n|u) & L_{22}(n|u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ue_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}e_n \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где параметр $u \in \mathcal{C}$, $\sigma^{z,\pm}$ это матрицы Паули, а проектор на состояние со спином вверх $e = \frac{1}{2}(\sigma^z + 1)$. Матрица с подстрочным индексом n действует нетривиально только в n-том квантовом пространстве: $s_n = I \otimes \ldots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \ldots \otimes I$.

Операторнозначная матрица (18) удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u,v)\,(L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u))\,R(u,v), \tag{19}$$

в котором $R(u,v)$ это 4×4 матрица равная

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v,u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v,u) \end{pmatrix} \tag{20}$$

где

$$f(v,u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2},\ g(v,u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \tag{21}$$

Вертикальная матрица монодромии определяется как произведение L-операторов

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u)\ldots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Коммутационные соотношения матричных элементов матрицы монодромии задаются той же R-матрицей (20)

$$R(u,v)\,(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))\,R(u,v), \tag{23}$$

наиболее важными из которых являются:

$$\begin{aligned} C(u)B(v) &= g(u,v)\left\{A(u)D(v) - A(v)D(u)\right\}, \\ A(u)B(v) &= f(u,v)B(v)A(u) + g(v,u)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(v,u)B(v)D(u) + g(u,v)B(u)D(v), \\ [B(u),B(v)] &= [C(u),C(v)] = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Матрица перехода $\tau(u)$ определяется как след матрицы монодромии во вспомогательном пространстве

$$\tau(u) = trT(u) = A(u) + D(u). \tag{25}$$

Равенство (23) означает, что $[\tau(u), \tau(v)] = 0$ при произвольных значениях параметров u, v.

L-оператор (18) удовлетворяет соотношению

$$e^{\zeta\sigma_n^z} L(n|u) e^{-\zeta\sigma_n^z} = e^{-\frac{\zeta}{2}\sigma^z} L(n|u) e^{\frac{\zeta}{2}\sigma^z}, \tag{26}$$

где ζ это произвольный параметр. Из этого равенства и из определения матрицы монодромии (22) следует, что

$$e^{\zeta S^z}T(u)e^{-\zeta S^z} = e^{-\zeta\sigma^z}T(u)e^{\zeta\sigma^z}, \tag{27}$$

где $S^z = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}\sigma_i^z$ является оператором z-компоненты полного спина. Равенства

$$\begin{aligned} S^z B(u) &= B(u)\,(S^z - 1)\,, \\ S^z C(u) &= C(u)\,(S^z + 1)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

являются следствием соотношения (27) и означают, что оператор $B(u)$ понижает полный спин системы, а оператор $C(u)$ повышает его. Из равенства (27) следует коммутативность

$$[\tau(u), S^z] = 0. \tag{29}$$

Производящим вектором квантового пространства $\mathcal{H}$ является состояние со всеми спинами направленными вверх

$$|\Leftarrow\rangle = \otimes_{i=0}^{M}|\leftarrow\rangle_i = \otimes_{i=0}^{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_i. \tag{30}$$

Данный вектор уничтожается оператором $C(u)$

$$C(u)|\Leftarrow\rangle = 0, \tag{31}$$

и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$,

$$A(u)|\Leftarrow\rangle = \alpha(u)|\Leftarrow\rangle;\ \ D(u)|\Leftarrow\rangle = \delta(u)|\Leftarrow\rangle, \tag{32}$$

с собственными значениями

$$\alpha(u) = (-u)^{M+1},\ \ \delta(u) = (u^{-1})^{M+1}. \tag{33}$$

Полный спин производящего вектора равен $\frac{1}{2}(M+1)$:

$$S^z|\Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}(M+1)|\Leftarrow\rangle. \tag{34}$$

Одним из основных объектов дальнейшего рассмотрения будет состояние, полученное последовательным действием операторов $B(u)$ на состояние $|\Leftarrow\rangle$:

$$|\Psi_n(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{i=1}^{N} B(u_i)|\Leftarrow\rangle. \tag{35}$$

Из равенства (28), следует, что полный спин этого вектора равен

$$S^z \prod_{i=1}^{N} B(u_i)|\Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}\,(M+1-2N) \prod_{i=1}^{N} B(u_i)|\Leftarrow\rangle. \qquad (36)$$

Сопряженный к (35) вектор определяется как

$$\langle \Psi_n(u_1, u_2, \ldots, u_N)| = \langle \Leftarrow | \prod_{i=1}^{N} C(u_i). \qquad (37)$$

Легко проверить, что $\langle \Leftarrow | B(u) = 0$.

Матричные элементы введенного L-оператора (18) можно представить в виде точек с примыкающими стрелками (Рис. 2).

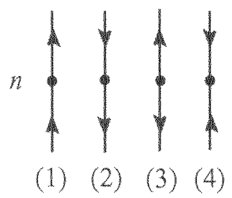

Рис. 10. Вершинное представление матричных элементов L-оператора.

Матричный элемент $L_{11}(n|u)$ соответствует вершине (1) (Рис. 2), где точкой обозначен оператор $-ue_n$, действующий в локальном квантовом пространстве. Единственный ненулевой элемент этого оператора ${}_n\langle \leftarrow | -ue_n | \leftarrow\rangle_n$ определяет вершину (b) (Рис. 1) с весом $-u$. Матричный элемент $L_{22}(n|u)$ соответствует вершине (2) (Рис. 2) с точкой обозначающей оператор $u^{-1}e_n$, имеющим ненулевой элемент ${}_n\langle \leftarrow | u^{-1}e_n | \leftarrow\rangle_n$, который определяет вершину (a) (Рис. 1) с весом u^{-1}. Матричные элементы $L_{12}(n|u) = \sigma_n^-$ и $L_{21}(n|u) = \sigma_n^+$ соответствуют вершинам (3) и (4) (Рис. 2), а ненулевые матричные элементы этих операторов ${}_n\langle \rightarrow |\sigma_n^-| \leftarrow\rangle_n$ и ${}_n\langle \leftarrow |\sigma_n^+| \rightarrow\rangle_n$ определяют вершины (c) (Рис. 1) с весом равным единице.

Матричные элементы матрицы монодромии (22) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M+1$ узлами (Рис. 3). Например, оператору $B(u) = \sum\limits_{k_M, \ldots, k_1=1}^{2} L_{1k_M}(M|u) L_{k_M k_{M-1}}(M-1|u) \ldots L_{k_1 2}(0|u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (B)). Оператору $C(u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация (C)). Операторам $A(u)$ и $D(u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены в одном направлении (конфигурации (A) и (D)).

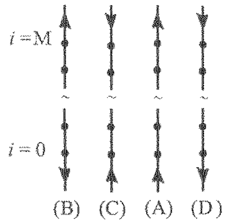

Рис. 11. Графическое представление матричных элементов матрицы монодромии.

Например, на решетке, состоящей из трех узлов, оператор $B(u) = -u^2 e_2 e_1 \sigma_0^- - e_2 \sigma_1^- e_0 + \sigma_2^- \sigma_1^+ \sigma_0^- - u^{-2} \sigma_2^- e_1 e_0$, а его графическое представление изображено на (Рис. 12).

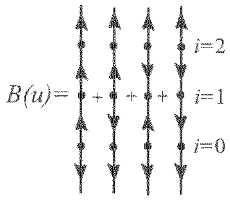

Рис. 12. Графическое представление оператора $B(u)$.

IV. Фиксированные граничные условия

В этом разделе мы вычислим статистическую сумму неоднородной четырехвершинной модели на решетке с фиксированными граничными условиями. Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (35) и (37)

$$W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = \langle \Leftarrow | C(v_1) \dots C(v_N) B(u_1) \dots B(u_N) | \Leftarrow \rangle, \tag{38}$$

где $\{u\}$ и $\{v\}$ это наборы независимых параметров. Мы можем представить матричные элементы скалярного произведения (38) как двумерную квадратную решетку размерности $2N \times (M+1)$. Первые N вертикальных линий решетки ассоциируются с операторами $C(v_j)$, а последние N вертикальных линий с операторами $B(u_j)$. Горизонтальные линии ассоциируются с локальными квантовыми пространствами, причем линия с номером i соответствует квантовому пространству с индексом i. Из графического представления операторов $B(u)$ и $C(u)$ следует, что матричный элемент (38) равен сумме всех допустимых конфигураций стрелок (или решеточных путей) на решетке с фиксированными граничными условиями (Рис. 4):

$$W(u_1,\ldots,u_N;v_1,\ldots,v_N) = \sum \prod_{k=-1}^{-N} (-v_{-k})^{l_k^b} (v_{-k}^{-1})^{l_k^a} \prod_{j=1}^{N} (-u_j)^{l_j^b} (u_j^{-1})^{l_j^a}$$

$$= (-1)^{MN} \sum \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{l_k^b - l_k^a} \prod_{j=1}^{N} u_j^{l_j^b - l_j^a}. \qquad (39)$$

Сравнивая это выражение с (10), получим, что статистическая сумма неоднородной четырехвершинной модели пропорциональна матричному элементу (39)

$$Z(\{\omega_a\},\{\omega_b\},\{\omega_c\}) = (-1)^{MN} W(u_1,\ldots,u_N;v_1,\ldots,v_N). \qquad (40)$$

Подстановка параметризации (11) в (39) приводит к

$$Z(q) = (-1)^{NM} W(q^{-\frac{1}{2}},\ldots,q^{-\frac{N}{2}};1,\ldots,q^{\frac{N-1}{2}}) \equiv (-1)^{NM} W_q(N,M), \qquad (41)$$

где $Z(q)$ это статистическая сумма (13).

Скалярное произведение (38) при произвольном значении параметров u_j, v_j вычисляется с помощью перестановочных соотношений (24) [14, 28] и равно:

$$W(u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_n) = (-1)^{MN} \left\{ \prod_{j>k} \frac{v_j v_k}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{l>m} \frac{u_l u_m}{u_l^2 - u_m^2} \right\} \det H, \qquad (42)$$

где матричные элементы $N \times N$ матрицы H равны

$$H_{jk} = \left\{ \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{M-N+2} - \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-M+N-2} \right\} \times \frac{1}{\frac{u_k}{v_j} - \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-1}}. \qquad (43)$$

Формулы (42), (43) являются решением неоднородной четырехвершинной модели и дают представление ее статистической суммы в виде определителя.

Подстановка параметризации (11) преобразует представление (42) в

$$W_q(N,M) = (-1)^{NM+\frac{N(N-1)}{2}} \left\{ \prod_{j>k} \left(q^{\frac{j-k}{2}} - q^{-\frac{j-k}{2}} \right)^{-2} \right\} \det Q, \quad (44)$$

с матричными элементами Q равными

$$Q_{jk} = \frac{s^{\frac{k+j-1}{2}} - s^{-\frac{k+j-1}{2}}}{q^{\frac{k+j-1}{2}} - q^{-\frac{k+j-1}{2}}}, \quad (45)$$

где $s = q^{M-N+2}$. Определитель матрицы Q вычисляется [10] и равен

$$\det Q =$$

$$= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \left\{ \prod_{j>k} \left(q^{\frac{j-k}{2}} - q^{-\frac{j-k}{2}} \right)^{2} \right\} \prod_{1\le j,k\le N} \frac{s^{\frac{1}{2}} q^{\frac{j-k}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{j-k}{2}}}{q^{\frac{k+j-1}{2}} - q^{-\frac{k+j-1}{2}}}. \quad (46)$$

Подстановка этого выражения в (44) дает

$$W_q(N,M) = (-1)^{NM} q^{-\frac{N^2}{2}(M+2-2N)} \prod_{1\le j,k\le N} \frac{1-q^{M-N+2+j-k}}{1-q^{k+j-1}}$$

$$= (-1)^{NM} q^{-\frac{N^2}{2}(M+2-2N)} \prod_{1\le j,k\le N} \frac{1-q^{M+3-j-k}}{1-q^{k+j-1}}.$$

Статистическая сумма (41) равна соответственно (13), а $(-1)^{NM} W_q(N,M) = q^{-\frac{N^2 M}{2}} S_{spp}(q|N,M)$ (16).

V. Периодические граничные условия

Рассмотрим теперь модель на решетке с периодическими граничными условиями. Это означает, что на решетке с $(M+1)$ горизонтальными и L вертикальными линиями граничные стрелки на любой линии направлены в одну сторону.

Статистическая сумма (1) однородной модели на периодической решетке размерности $(M+1)\times L$ с фиксированным числом стрелок, направленных направо, и вершинными весами $\omega_a = e^{-\nu}$, $\omega_b = e^{\nu}$ и $\omega_c = 1$ равна

$$Z_n(\nu) = \sum e^{\nu(l_b - l_a)}, \tag{47}$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке с периодическими граничными условиями или по соответствующим наборам решеточных путей (Рис. 6).

Рассмотрим след матрицы перехода в квантовом пространстве (25):

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\tau^L(u) &= \mathrm{Tr}\,(A(u)+D(u))^L\\ &= \sum \langle m_1,\dots,m_n|\,(A(u)+D(u))^L\,|m_1,\dots,m_n\rangle.\end{aligned} \tag{48}$$

Через $|m_1,\dots,m_n\rangle$ обозначено состояние с n спинами, направленными вниз в узлах $m_1,\dots,m_n$, и с $M+1-n$ спинами, направленными вверх в других узлах, а суммирование ведется по полному набору состояний $|m_1,\dots,m_n\rangle$ в квантовом пространстве $\mathcal{H}$. Сохранение числа n есть следствие коммутативности оператора третьей компоненты полного спина и матрицы перехода (29). Так как $\tau^L(u)$ является производящей функцией различных комбинаций операторов A и D, то ее след (48) представляет собой сумму по всем допустимым конфигурациям вершин $(a),(b),(c)$ с весами $\omega_a=\delta(u),\omega_b=\alpha(u),\omega_c=1$ (33) на периодической решетке размерности $(M+1)\times L$

$$\mathrm{Tr}\,\tau^L(u) = \sum (-u)^{l^b}(u^{-1})^{l^a}. \tag{49}$$

Сравнивая это выражение с (47), мы получим следующее представление для статистической суммы

$$Z_n(\nu) = e^{-i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)L} Tr_n\,\tau^L(-ie^{\nu}), \tag{50}$$

где мы положили $u=-ie^{\nu}$.

Для того чтобы вычислить это выражение, необходимо решить задачу на собственные значения для матрицы перехода $\tau(u)$:

$$\begin{aligned}\tau(u)|\Psi_n(v_1,\dots,v_n)\rangle &= \Theta_n(u;v_1,\dots,v_n)|\Psi_n(v_1,\dots,v_n)\rangle,\\ S^z|\Psi_n(v_1,\dots,v_n)\rangle &= \frac{1}{2}(M+1-2n)|\Psi_n(v_1,\dots,v_n)\rangle.\end{aligned} \tag{51}$$

Вектор (35) является собственным вектором матрицы перехода, если параметры v_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$(v_k^2)^{M+1-n} = (-1)^{n-1} V^{-2}, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad V^{-2} = \prod_{j=1}^{n} v_j^{-2}. \tag{52}$$

Положив $v_k^2 = e^{ip_k}$, можно представить решения уравнений Бете (52) в виде

$$p_k = \frac{2\pi I_k - P}{M+1-n}, \ -\pi < p_k \leq \pi, \tag{53}$$

где I_n это целые или полуцелые числа в зависимости от того, является ли n нечетным или четным числом, а полный импульс $P = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$. Решения (53) были проклассифицированы в работах [32, 33].

Собственное значение матрицы перехода равно

$$\Theta_n(u;\{v\}) = e^{i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)} \left\{ u^{M+1} V^{-2} + (-1)^n u^{-(M+1-2n)} \right\} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{u^2 - v_j^2}. \tag{54}$$

Статистическая сумма четырехвершинной модели на периодической решетке (47) определяется равенством

$$Z_n(\nu) = e^{-i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)L} \sum_{\{v\}} \Theta_n^L(-ie^{\nu};\{v\}), \tag{55}$$

где суммирование ведется по всем наборам решений уравнений Бете. Простейшее решение соответствует случаю с $n = 0$. Статистическая сумма равна $Z_0(\nu) = \{2\cosh(M+1)\nu\}^L$, и $Z_0(0) = 2^L$. Другой предельный случай соответствует $2n = M+1$. В этом случае существует лишь два набора решений. Первый набор задается решениями (53) с $I_k = k - \frac{n+1}{2}$, $k = 1, \ldots, n$ и $P = 0$. Другой набор задается числами $I_k = k - \frac{n+3}{2}$, $k = 1, \ldots, n$, с $P = -\pi$. Применение равенства

$$\prod_{k=1}^{n} (a - be^{i\frac{2\pi}{n}k}) = a^n - b^n$$

дает $Z_{\frac{M+1}{2}}(\nu) = 2$.

VI. Приложение

L-оператор шестивершинной модели равен

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} -ue^{\gamma\sigma_n^z} - u^{-1}e^{-\gamma\sigma_n^z} & \sigma_n^- \left(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}\right) \\ \sigma_n^+ \left(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}\right) & ue^{-\gamma\sigma_n^z} + u^{-1}e^{\gamma\sigma_n^z} \end{pmatrix} \tag{56}$$

и удовлетворяет сплетающему соотношению (19) с R-матрицей равной

$$\tilde{R}(u,v) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(v,u) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{g}(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}(v,u) \end{pmatrix} \tag{57}$$

где

$$\tilde{f}(v,u) = \frac{u^2e^{2\gamma} - v^2e^{-2\gamma}}{u^2 - v^2}, \quad \tilde{g}(v,u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}\left(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}\right). \tag{58}$$

Рассмотрим следующее преобразование L-оператора (56):

$$\check{L}(n|u) = e^{x\sigma_n^z} e^{\frac{\omega}{2}\sigma^z} L(n|u) e^{-\frac{\omega}{2}\sigma^z}$$
$$= \begin{pmatrix} -ue^{(x+\gamma)\sigma_n^z} - u^{-1}e^{(x-\gamma)\sigma_n^z} & e^{(\omega + x\sigma_n^z)}\sigma_n^- \left(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}\right) \\ e^{(-\omega + x\sigma_n^z)}\sigma_n^+ \left(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}\right) & ue^{(x-\gamma)\sigma_n^z} + u^{-1}e^{(x+\gamma)\sigma_n^z} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Этот L-оператор сплетается преобразованной R-матрицей

$$\check{R}(u,v) = \left(1 \otimes e^{-x\sigma^z}\right) \tilde{R}(u,v) \left(1 \otimes e^{x\sigma^z}\right). \tag{60}$$

Если положить $x = \omega = \gamma$, то

$$\lim_{\gamma\to\infty} e^{-2\gamma}\check{L}(n|u) = L(n|u),$$

где $L(n|u)$ это L-оператор четырехвершинной модели (18), а R-матрица (60) в этом пределе переходит в (20).

Литература

1. Р. Бакстер, *Точно решаемые модели в статистической механике.* Мир, М. (1985).
2. E. H. Lieb, F. Y. Wu, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 1, edited by C. Domb and M. S. Green, Academic Press, London (1972), 321.
3. W. Li, H. Park, and M. Widom, *Finite-size scaling amplitudes in a random tiling model.* — J. Phys. A **23** (1990), L573.

4. W. Li and H. Park, *Logarithmic singularity in the surface free energy near commensurate-incommensurate transitions.* — J. Phys. A **24** (1991), 257.
5. V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions.* — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391.
6. V. Korepin and P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions.* — J. Phys. A **33** (2000), 7053.
7. N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko, and M. B. Zvonarev, *Boundary correlation functions of the six-vertex model.* — J. Phys. A **35** (2002), 5525.
8. D. Allison and N. Reshetikhin, *Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 1847.
9. O. Syljuåsen and M. Zvonarev, *Directed-loop monte carlo simulations of vertex models.* — Phys. Rev. E **70** (2004), 016118.
10. G. Kuperberg, *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture.* — Int. Math. Res. Not. **1996** (1996), 139.
11. F. Colomo and A. G. Pronko, *Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials.* — J. Stat. Mech. JSTAT (2005), P01005.
12. P. L. Ferrari and H. Spohn, *Domino tilings and the six-vertex model at its free fermion.* — cond-mat/0605406.
13. L. D. Faddeev, *Quantum inverse scattering method.* — Sov. Sci. Rev. Math. **C1** (1980), 107.
14. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge University Press, Cambridge (1993).
15. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Мир, М. (1985).
16. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture.* Cambridge University Press, Cambridge (1999).
17. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions.* Cambridge University Press, Cambridge (1998).
18. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функц. Анал. Прил. **30** (1996), 19.
19. А. М. Вершик, С. Керов, *Асимптотика мер Планшереля симметрических групп и предельная форма диаграмм Юнга.* — Докл. Акад. Наук СССР **233** (1977), 1024.
20. A. Okounkov and N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram.* — J. American Math. Soc. **16** (2003), 58.
21. R. Rajesh and D. Dhar, *An exactly solvable anisotropic directed percolation model in three dimensions.* — Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1646.
22. J. W. Essam and A. J. Guttmann, *Vicious walkers and directed polymer networks in general dimensions.* — Phys. Rev. E **52** (1995), 5849.
23. A. J. Guttmann, A. L. Owczarec, and X. G. Viennot, *Vicious walkers and Young tableaux* I*: without walls.* — J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 8123.
24. C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, *Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux:* II *With a wall.* — J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 8835.

25. Н. М. Боголюбов, *XX0 цепочка Гейзенберга и случайные блуждания*. — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **325** (2005), 13.
26. Н. М. Боголюбов, *Интегрируемые модели для зловредных и дружественных пешеходов*. — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **335** (2006), 59.
27. A. Okounkov, N. Reshetikhin, and C. Vafa, *Quantum Calabi-Yau and classical crystals*. hep-th/0309208.
28. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*. — J. Phys. A **38** (2005), 9415.
29. Н. В. Цилевич, *Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции*. — Функц. Анал. и Прил. **40** (2006), 53.
30. K. Shigechi and M. Uchiyama, *Boxed skew plane partition and integrable phase model*. — J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 10287.
31. Н. М. Боголюбов, *Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете*. — Теор. Мат. Физ. **150**, (2007) 193.
32. Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *Температурный коррелятор в абсолютно анизотропном XXZ-магнетике Гейзенберга*. — Теор. Мат. Физ. **131** (2002) 288.
33. М. Годен, *Волновая функция Бете*. Мир, М. (1987).

Bogoliubov N. M. Four-vertex model.

Exactly solvable four-vertex model is considered on a square grid with the different boundary conditions. The application of the Algebraic Bethe Ansatz method allows to calculate the partition function of the model and to establish the connection of the scalar product of the state vectors with the generating function of the column and raw strict boxed plane partitions. The tiling model on a periodic grid is discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 18 июня 2007 г.