Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

А. А. Багаев

ЗАМЕЧАНИЕ О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Двумерная матричная σ-модель (главное киральное поле) задается действием

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{tr}\, \left(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g\right) d^2x, \tag{1}$$

где e_0 – безразмерная константа связи, матрица $g = g(x)$ – функция со значениями в компактной группе Ли G, tr – матричный след.

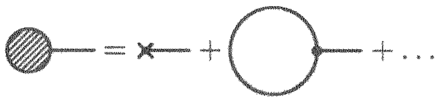
В формализме фонового поля

$$g(x) = h(x) g_{\mathrm{cl}}(x) \tag{2}$$

эффективное действие имеет вид (см. [1])

$$W(g_{\mathrm{cl}}) = \frac{1}{e_0^2}\, W_{-1}(g_{\mathrm{cl}}) + W_0 + e_0^2 W_1(g_{\mathrm{cl}}) + \dots\,, \tag{3}$$

где W_n – вклады $(n+1)$-петлевых одночастично-неприводимых вакуумных диаграмм, расходящиеся слагаемые которых комбинируются в множитель при W_{-1} (см. [1, 2]). Фоновое поле $g_{\mathrm{cl}}(x)$ удовлетворяет квантовым уравнениям движения [3]:



$= 0,$ (4)

где первое слагаемое соответствует $J(x) = \delta S/\delta g(x)$, а n-петлевые поправки выражаются одночастично-неприводимыми диаграммами с одной внешней линией.

Эффективное действие (3) в однопетлевом приближении имеет вид (см. [4])

$$W = \left[\frac{1}{e^2(\Lambda)} - \frac{C(G)}{4\pi}\, \ln\frac{\Lambda}{\mu} + \dots\right] W_{-1}, \tag{5}$$

где Λ – импульс обрезания, μ – точка нормировки, а $C(G)$ – собственное значение оператора Казимира группы G в фундаментальном представлении

$$\mathrm{Sp}\,\left(t^A t^B\right) = -\frac{1}{2}\,\delta^{AB}, \quad [t^A, t^B] = f^{ABC} t^C.$$

(Здесь f^{ABC} – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а Sp обозначает форму Киллинга на $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{tr}\,(\cdot \times \cdot)$.)

"Классическое" действие равно

$$W_{-1}(g_{\mathrm{cl}}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Sp}\,\left(R_\mu(x) R_\mu(x)\right) d^2x = \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2} R_\mu^A(x) R_\mu^A(x) d^2x,$$

где $R_\mu(x) = \partial_\mu g_{\mathrm{cl}}(x) g_{\mathrm{cl}}^{-1}(x) = R_\mu^A(x) t^A$.

Вычислим одночастичную вершинную функцию $\mathfrak{J}(x)$ в левой части (4) в однопетлевом приближении; из структуры действия (1) и (2) получим, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_\mu^A(x) = \frac{1}{2e_0}\,\partial_\mu R_\mu^A(x) - \frac{e_0}{12}\Big(& f^{ABE} f^{EDC}\partial_\mu G^{BC}(x,y)\big|_{y=x} R_\mu^D(x) \\ &+ f^{ADE} f^{EBC}\partial_\mu G^{BC}(x,y)\big|_{y=x} R_\mu^D(x) \\ &- f^{ABE} f^{ECD}\partial_\mu\left(G^{BC}(x,x) R_\mu^D(x)\right)\Big), \end{aligned} \qquad (6)$$

где $G^{AB}(x,y)$ – интегральное ядро оператора, обратного к

$$K^{AB} = \partial^2 \delta^{AB} - f^{AKB} R_\mu^K \partial_\mu$$

(т.е. функция Грина σ-модели).

Для дальнейшего вычисления используем анзац для функции Грина в окрестности диагонали

$$G^{AB}(x,y) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N^{AB}(x,y) p_N(x-y),$$

где

$$p_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\ln\mu^2 x^2, \ldots,$$

а гладкие коэффициенты $a_N^{AB}(x,y)$ удовлетворяют цепочке рекуррентных уравнений

$$-(x_\mu - y_\mu)\left(\partial_\mu \delta^{AC} - \frac{1}{2}\,f^{AKC} R_\mu^K\right) a_0^{CB} = 0;$$

$$-(x_\mu - y_\mu)\left(\partial_\mu \delta^{AC} - \frac{1}{2}\,f^{AKC} R_\mu^K\right) a_{N+1}^{CB} + K^{AC} a_N^{CB} = (N+1) a_{N+1}^{AB}$$

с условием $a_0^{AB}(x,x) = \delta^{AB}$ (см. [2, 5]).

В результате достаточно простых вычислений мы получаем для (6)

$$\mathfrak{J}_\mu^A(x) = e_0 \left[\frac{1}{e^2(\Lambda)} - \frac{C(G)}{12\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right] J_\mu^A(x), \tag{7}$$

где $J_\mu^A(x) = 1/2\partial_\mu R_\mu^A(x)$.

Сравнивая (7) с (5), убеждаемся, что перенормировки эффективного действия и одночастичной вершинной функции не совпадают. Но, поскольку в правой части (4) ноль, левая может быть умножена на произвольную ненулевую константу. Если $\mathfrak{J}_\mu^A(x)$ умножить на

$$Z = 1 - e_0^2 \frac{C(G)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + O\left(e_0^2\right),$$

то совпадение перенормировок восстанавливается. Ситуация, связанная с несовпадением перенормировок возникает и в теории Янга–Миллса [6], в которой дополнительный множитель Z сводится к множителю перенормировки калибровочного поля (см. [7]). В рассматриваемой теории, по-видимому, имеет место аналогичное явление, однако этот факт не проверен.

Автор благодарит академика Л. Д. Фаддеева, а также Т. А. Болохова за ценные замечания.

Литература

1. Л. Д. Фаддеев, — Теор. Мат. Физ. **148** (2006), 133.
2. I. Jack, H. Osborn, — Nucl. Phys. B **207** (1982), 474.
3. L. Faddeev, *Mass in Quantum Yang-Mills Theory (comment on Clay Millenium Problem).* — Bull. Brazil Math. Soc.; New Series **33** (2) (2002), 201–212.
4. А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны.* — Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск пер. с англ. (1999).
5. П. Рамон, *Теория поля. Современный вводный курс.* — Пер. с англ., Мир, М. (1984).
6. А. А. Багаев, *Перенормировка квантовых уравнений движения для полей Янга–Миллса в формализме фонового поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 5.
7. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* — “Наука”, М. (1978).

Bagaev A. A. Note on renormalization of quantum equation of motion for matrix sigma-model.

Infinite part of one-prong vertex for matrix σ model calculate in background field formalism in one-loop approach. Is shown that renormalizations of quantum equation of motion and effective action coincide if the additional factor has been introduced.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 11 октября 2007 г.