Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

М. Н. Яковлев

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для метода конечных элементов, использующего кусочно-линейные аппроксимации, получена оценка погрешности при отыскании минимума функционала

$$J(u) = \int_a^b [u'(t)]^2 dt + \int_a^b q(t)u^2(t)dt - 2\int_a^b f(t)u(t)dt$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ в следующих предположениях:

$$f(t) \in L(a,b),$$

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) + q_5(t),$$

$$0 \leqslant q_1(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b),$$

$$0 \leqslant q_2(t)(t-a)^2(b-t)^2 \in C[a,b],$$

$$0 \geqslant q_3(t), \quad \int_a^b q_3(t)(t-a)(b-t)dt = d_1 > -\infty,$$

$$0 \geqslant q_4(t)(t-a)^2(b-t)^2 \geqslant d_2 > -\infty,$$

$$q_5(t) \in C[a,b], \quad |q_5(t)| \leqslant d_3,$$

$$c = 1 + \frac{d_1}{b-a} + \frac{4d_2}{(b-a)^2} - d_3\frac{(b-a)^2}{\pi^2} > 0,$$

$$q(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b).$$

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, N – натуральное число, $N > 1$, $h = \frac{b-a}{N}$. Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию $u_N(t)$ функции $u(t) \in C[a,b]$. Положим $\Delta(t) \equiv u(t) - u_N(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Лемма 1. 1. *При* $u(t) \in W_2^2[a,b]$ *верны оценки*

$$\int\limits_a^b \Delta^2(t)dt \leqslant \frac{h^4}{\pi^4}\int\limits_a^b [u''(t)]^2 dt, \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b [\Delta'(t)]^2 dt \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\int\limits_a^b [u'']^2\, dt. \tag{2}$$

2. *При* $u(t) \in W_1^2[a,b]$ *верны оценки*

$$\int\limits_a^b \Delta^2(t)dt \leqslant \frac{h^3}{16}\left(\int\limits_a^b |u''(t)|dt\right)^2, \tag{3}$$

$$\int\limits_a^b |\Delta'(t)]^2 dt \leqslant \frac{h}{4}\left(\int\limits_a^b |u''(t)|dt\right)^2. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[a+(k-1)h, a+kh]$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Тогда $\Delta(a+(k-1)h) = \Delta(a+kh) = 0$ и потому

$$\Delta(t) = \int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} g(t,s)u''(s)ds, \quad a+(k-1)h \leqslant t \leqslant a+kh, \tag{5}$$

где $g(t,s)$ – функция Грина оператора $\frac{d^2}{dt^2}$ с нулевыми граничными условиями на отрезке $[a+(k-1)h, a+kh]$. Норма интегрального оператора с симметричным ядром в пространстве $L^2[a+(k-1)h, a+kh]$ равна модулю его наибольшего по модулю собственного значения $\frac{h^2}{\pi^2}$, откуда получаем оценку (1).

Далее

$$\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} [\Delta'(t)]^2 dt = -\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} u''(t)\Delta(t)dt \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} [u''(t)]^2 dt.$$

Далее, используя (5), имеем

$$|\Delta(t)| \leqslant \frac{h}{4}\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} |u''(t)|dt, \tag{6}$$

откуда

$$\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} \Delta^2(t)dt \leqslant \frac{h^3}{16}\Big(\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} |u''(t)|dt\Big)^2. \qquad (7)$$

Суммируя полученные неравенства получим (3). Далее, из

$$\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} [\Delta'(t)]^2dt = -\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} u''(t)\Delta(t)dt \leqslant \frac{h}{4}\Big(\int\limits_{a+(k-1)h}^{a+kh} |u''(t)|dt\Big)^2,$$

суммируя полученные неравенства и учитывая, что при $a_k \geqslant 0$

$$\sum_k a_k^2 \leqslant \Big(\sum_k a_k\Big)^2,$$

получаем (4).

Лемма 2. *Пусть функция* $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[a,b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b \frac{[u(t)]^2dt}{(t-a)^2(b-t)^2} \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt.$$

Доказательство. Пусть $a < v < \frac{b+a}{2} < w < b$. Тогда имеем

$$\int\limits_v^w \left(u'(s) + \frac{(s-\frac{a+b}{2})u(s)}{(s-a)(b-s)}\right)^2 ds \geqslant 0.$$

Применяя интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_v^w [u'(s)]^2ds + \frac{(w-\frac{a+b}{2})[u(w)]^2}{(w-a)(b-w)} - \frac{(v-\frac{a+b}{2})[u(v)]^2}{(v-a)(b-v)}$$

$$\geqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int\limits_v^w \frac{[u(t)]^2dt}{(t-a)^2(b-t)^2}.$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2 из [1], получим

$$\int_a^b [u'(s)]^2 ds + \frac{(w - \frac{a+b}{2})}{(w-a)} \int_w^b [u'(s)]^2 ds - \frac{(v - \frac{a+b}{2})}{(b-v)} \int_a^v [u'(s)]^2 ds$$
$$\geqslant \frac{(b-a)^2}{4} \int_v^w \frac{[u(s)]^2 ds}{(s-a)^2(b-s)^2}. \qquad (*)$$

Отсюда следует существование несобственного интеграла

$$\int_a^b \frac{[u(s)]^2 ds}{(s-a)^2(b-s)^2}.$$

Переходя к пределу при $v \to a$ и $w \to b$ в неравенстве $(*)$, получим неравенство

$$\int_a^b \frac{[u(s)]^2 ds}{(s-a)^2(b-s)^2} \leqslant \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b [u'(s)]^2 ds.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) + q_5(t), \qquad (8)$$
$$0 \leqslant q_1(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b),$$
$$0 \leqslant q_2(t)(t-a)^2(b-t)^2 \in C[a,b],$$
$$0 \geqslant q_3(t), \quad \int_a^b q_3(t)(t-a)(b-t)dt = d_1 > -\infty,$$
$$0 \geqslant q_4(t)(t-a)^2(b-t)^2 \geqslant d_2 > -\infty,$$
$$q_5(t) \in C[a,b], \quad |q_5(t)| \leqslant d_3 < +\infty \qquad (9)$$

и пусть при $a \leqslant t \leqslant b$

$$f(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b),$$
$$c \equiv 1 + \frac{d_1}{b-a} + \frac{4d_2}{(b-a)^2} - \frac{d_3(b-a)^2}{\pi^2} > 0. \qquad (10)$$

Тогда

(1) *в пространстве функций* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t)$, *на которой квадратичный функционал*

$$J(u) \equiv \int\limits_a^b [u'(t)]^2 dt + \int\limits_a^b q(t)u^2(t)dt - 2\int\limits_a^b f(t)u(t)dt \tag{11}$$

достигает минимума в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$;

(2) *для всех* $v(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ *уравнение*

$$\int\limits_b^a u'(t)v'(t)dt + \int\limits_a^b q(t)u(t)v(t)dt - \int\limits_a^b f(t)v(t)dt = 0 \tag{12}$$

относительно $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ *имеет одно и только одно решение, и этим решением является функция* $u_0(t)$, *на которой функционал* $J(u)$ *достигает минимума в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$;

(3) *верна оценка*

$$\int\limits_a^b [u_0'(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{c^2(b-a)}\left(\int\limits_a^b |f(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt\right)^2; \tag{13}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $u_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$.

(5) *если*

$$f(t) \in L^2(a,b), \quad q^2(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b),$$

то $u_0(t) \in W_2^2(a,b)$ *и верна оценка*

$$\int\limits_a^b [u_0''(t)]^2 dt \leqslant D \equiv 2\int\limits_a^b [f(t)]^2 dt + \frac{2}{c^2(b-a)^2}$$
$$\times \int\limits_a^b q^2(t)(t-a)(b-t)dt\left(\int\limits_a^b |f(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt\right)^2; \tag{14}$$

(6) *если*

$$f(t) \in L(a,b), \quad q(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b),$$

то $u_0(t) \in W_1^2(a,b)$ *и верна оценка*

$$\int_a^b |u_0''(t)|dt \leqslant L \equiv \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$$+\frac{1}{c(b-a)}\int_a^b |q(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt\int_a^b |f(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt; \quad (15)$$

(7) *если*

$$q(t) \in C(a,b), \quad f(t) \in C(a,b),$$

то $u_0(t)$ *является единственным решением краевой задачи*

$$-u''(t)+q(t)u(t)=f(t), \quad a<t<b,$$
$$u(a)=u(b)=0.$$

Доказательство. Утверждения (1)–(4) доказаны в работах [1] и [2]. Докажем утверждение (5). Из соотношения (12) видно, что функция $u_0'(t)$ имеет обобшенную в смысле С. Л. Соболева производную $[u_0'(t)]'$ и эта производная равна функции $-f(t)+q(t)u_0(t)=u_0''(t)$. В силу сделанных предположениц, учитывая оценку (13) и лемму 3 из [1], получаем оценку (14). Утверждение (6) доказывается аналогично.

Докажем (7). Поскольку из принадлежности $u_0(t)$ к пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ следует, что $u_0(t)\in C[a,b]$, то из условий $q(t)\in C(a,b)$ и $f(t)\in C(a,b)$ следует, что $q(t)u_0(t)-f(t)\in C(a,b)$.

По лемме 5 из [3], из того, что $u_0(t)$ имеет обобщенную производную $u_0'(t)$, которая, в свою очередь, имеет обобщенную производную $[u_0'(t)]'=q(t)u_0(t)-f(t)\in C(a,b)$, заключаем, что $u_0(t)\in C^{(2)}(a,b)$ и $[u_0'(t)]'=u_0''(t)$ – вторая производная функции $u_0(t)$ в обычном смысле. Поэтому

$$-u_0''(t)+q(t)u_0(t)=f(t), \quad a<t<b,$$

$$u_0(a)=u_0(b)=0.$$

Пусть $u_1(t)$ – другое решение и пусть $z(t)=u_0(t)-u_1(t)$. Тогда

$$z''(t)z(t)=q(t)z^2(t).$$

Используя лемму 3 из [1], лемму 2 настоящей работы и известное неравенство

$$\int_a^b z^2(t)dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b [z'(t)]^2 dt,$$

получим

$$\int_a^b [z'(t)]^2 dt + \left(\frac{d_1}{b-a} + \frac{4d_2}{(b-a)^2} - \frac{d_3(b-a)^2}{\pi^2} \right) \int_a^b [z'(t)]^2 dt \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$|z(t)|^2 \leqslant \frac{(t-a)(b-t)}{(b-a)} \int_a^b [z'(t)]^2 dt \leqslant 0,$$

т.е. $z(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть

$$\overline{u}_N(t) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^{(N)} \varphi_k^{(N)}(t) \tag{16}$$

– функция, полученная методом Ритца при минимизации функционала $J(u)$. Здесь

$$\varphi_k^{(N)}(t) = \begin{cases} \dfrac{t-(k-1)h}{h}, & t \in [(k-1)h, kh], \\ \dfrac{(k+1)h-t}{h}, & t \in [kh, (k+1)h], \\ 0, & t \notin [(k-1)h, (k+1)h] \end{cases} \qquad (k = 1, \dots, N-1); \tag{17}$$

$$\varphi_0^{(N)}(t) = \begin{cases} \dfrac{a+h-t}{h}, & t \in [a, h], \\ 0, & t \notin [a, h]; \end{cases} \tag{18}$$

$$\varphi_N^{(N)}(t) = \begin{cases} \dfrac{t-b+h}{h}, & t \in [b-h, b], \\ 0, & t \notin [b-h, b]. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда $J(\overline{u}_N) \leqslant J(u_N)$, а поскольку

$$J(\overline{u}_N) = \int\limits_a^b [u_0'(t) - \overline{u}_N'(t)]^2\,dt + \int\limits_a^b q(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2 dt - \int\limits_a^b [u_0']^2 dt - \int\limits_a^b q(t)u_0^2(t)dt,$$

$$J(u_N) = \int\limits_a^b [u_0'(t) - u_N'(t)]^2\,dt + \int\limits_a^b q(t)[u_0(t) - u_N(t)]^2 dt - \int\limits_a^b [u_0'(t)]^2 dt - \int\limits_a^b q(t)u_0^2(t)dt,$$

то мы имеем

$$\int\limits_a^b [u_0'(t) - \overline{u}_N'(t)]^2\,dt + \int\limits_a^b q(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2 dt$$
$$\leqslant \int\limits_a^b [u_0'(t) - u_N'(t)]^2\,dt + \int\limits_a^b q(t)[u_0(t) - u_N(t)]^2\,dt$$
$$\leqslant \left[1 + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |q(t)|(b-t)(t-a)\,dt\right]\int\limits_a^b [u_0'(t) - u_N'(t)]^2\,dt.$$

Поэтому либо при $u_0(t) \in W_2^2(a,b)$

$$\int\limits_a^b [u_0'(t) - u_N'(t)]^2\,dt + \int\limits_a^b q(t)[u_0(t) - u_N(t)]^2\,dt$$

$$\leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right)\int\limits_a^b [u_0''(t)]^2 dt$$
$$\leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right)D,$$

либо при $u_0(t) \in W_1^2(a,b)$

$$\int_a^b [u_0'(t) - u_N'(t)]^2\,dt + \int_a^b q(t)[u_0(t) - u_N(t)]^2\,dt$$
$$\leqslant \frac{h}{4} L^2 \left(1 + \frac{1}{b-a} \int_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right).$$

Пусть $z(t)$ – единственная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$, на которой функционал

$$\int_a^b [z'(t)]^2\,dt + \int_a^b q(t) z^2(t)\,dt - 2\int_a^b z(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]\,dt \tag{20}$$

достигает минимума в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$. Тогда

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt = \int_a^b [z'(t) - \overline{z}'_N(t)][u_0'(t) - \overline{u}'_N(t)]\,dt$$
$$+ \int_a^b q(t)[z(t) - \overline{z}_N(t)][u_0(t) - \overline{u}_N(t)]dt. \tag{21}$$

При $f(t) \in L^2(a,b)$, $q^2(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b)$ получим

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2 dt \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{b-a}\int_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right) D^{1/2}$$
$$\times \left(2 + \frac{b-a}{3c^2}\int_a^b q^2(t)(t-a)(b-t)\,dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt\right)^{1/2}$$
$$\equiv h^2 M \left(\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt \leqslant h^4 M^2. \tag{22}$$

При $f(t) \in L(a,b)$, $q^2(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b)$

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2 dt \leqslant \frac{h^{3/2}}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{b-a}\int_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right)L$$

$$\times\left(2 + \frac{b-a}{3c^2}\int_a^b q^2(t)(t-a)(b-t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\equiv \left(\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt\right)^{1/2} h^{3/2}Q.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. (1) *Если* $f(t) \in L^2(a,b)$, $q^2(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b)$, $c > 0$, *то*

$$\int_a^b [u_0'(t) - \overline{u}_N'(t)]^2\,dt + \int_a^b q(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt$$

$$\leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{b-a}\int_a^b |q(t)|(t-a)(b-t)\,dt\right)D$$

и

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt \leqslant h^4 M^2.$$

(2) *Если* $f(t) \in L(a,b)$, $q(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b)$, $c > 0$, *то*

$$\int_a^b [u_0'(t) - \overline{u}_N'(t)]^2\,dt + \int_a^b q(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt$$

$$\leqslant \frac{h}{4}L^2\left(1 + \frac{1}{b-a}\int_a^b |q(t)|(b-t)(t-a)\,dt\right).$$

(3) *Если* $f(t) \in L(a,b)$, $q^2(t-a)(b-t) \in L(a,b)$, $c > 0$, *то*

$$\int_a^b [u_0(t) - \overline{u}_N(t)]^2\,dt \leqslant h^3 Q^2.$$

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 174–188.
2. М. Н. Яковлев, *Существование неотрицательных решений сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 215–222.
3. М. Н. Яковлев, *Первая краевая задача для сингулярного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 233–245.

Yakovlev M. N. A finite element method for solving singular boundary-value problems.

It is proved that under certain assumptions on the functions $q(t)$ and $f(t)$, there is one and only one function $u_0(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b)$ at which the functional

$$\int\limits_a^b [u'(t)]^2 dt + \int\limits_a^b q(t)u^2(t)dt - 2\int\limits_a^b f(t)u(t)dt$$

attains its minimum. An error bound for the finite element method for computing the function $u_0(t)$ in terms of $q(t)$, $f(t)$, and the meshsize h is presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 мая 2007 г.