Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

**В. Н. Кублановская**

# К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНОГО СПЕКТРА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

## Введение

Статья посвящена исследованию свойств конечного спектра многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\overline{\lambda})$ общего вида. В терминах решений "детерминантной" системы нелинейных алгебраических уравнений (ДСНАУ) и в терминах нулей скалярных полиномов предлагается классификация точек спектра на регулярные (собственные и смешанные), сингулярные и регулярно-сингулярные спектры. Среди последних выделяются так называемые критические точки. Рассматриваются способы вычисления скалярных полиномов, нули которых образуют точки спектра; предлагаются алгоритмы вычисления точек регулярного спектра, основанные на различных видах факторизаций характеристического полинома матрицы. Приводятся векторные характеристики, т.е. решения уравнения $F(\overline{\lambda})x = 0$ в точках спектра.

Статья состоит из двух параграфов. В §1 дается определение конечного спектра $q$-параметрической полиномиальной матрицы, классификация точек спектра в терминах как решений ДСНАУ, так и в терминах нулей скалярных полиномов. В §2 предлагаются способы вычисления регулярного спектра, основанные на вычислении нулей характеристического полинома матрицы, заданного в виде различных факторизаций, и рассматриваются способы вычисления других скалярных полиномов, нули которых образуют точки спектра.

## §1. Классификация точек спектра

### 1.1. Определение конечного спектра

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00945).

Пусть $F := F(\overline{\lambda}) = F(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ есть $q$-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга $\rho$: $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$.

Конечным спектром $\sigma[F]$ матрицы $F$ называется множество точек аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, на котором ранг матрицы меньше ее нормального ранга $\rho$.

В каждой точке спектра $\sigma[F]$ уравнения

$$F(\overline{\lambda})x = 0 \quad \text{и} \quad y^T F(\overline{\lambda}) = 0 \tag{1.1}$$

имеют ненулевые правое $x$ и левое $y$ решения. В дальнейшем будем рассматривать только правые решения. Каждое решение уравнения (1.1) определяет спектральную пару, которая состоит из точки спектра $\sigma[F]$ и вектора, являющегося решением уравнения (1.1) в рассматриваемой точке. Точки спектра будем называть скалярными спектральными характеристиками, а им соответствующие векторы – векторными спектральными характеристиками.

Спектр $\sigma[F]$ представим в виде объединения трех множеств:

$$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F] \cup \sigma_{rs}[F], \tag{1.2}$$

где $\sigma_r[F]$ – регулярный спектр, $\sigma_s[F]$ – сингулярный спектр, а $\sigma_{rs}[F]$ – регулярно-сингулярный спектр матрицы $F$.

Ниже в соответствии с разложением (1.2) приводится определение спектра матрицы $F$ в терминах решений детерминантной системы нелинейных алгебраических уравнений (ДСНАУ), а также в терминах нулей скалярных полиномов.

### 1.2. Спектральные характеристики матрицы $F$ в терминах ДСНАУ [1, 2]

Точки конечного спектра $\sigma[F]$ определяются решениями системы детерминантных нелинейных алгебраических уравнений вида

$$Z[F] := F\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\rho \\ j_1, \ldots, j_\rho \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\rho \leqslant n. \end{matrix} \tag{1.3}$$

Здесь $Z[F] = (z_1[F], \ldots, z_N[F])^T$ есть вектор, компоненты которого суть всевозможные миноры $F\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\rho \\ j_1, \ldots, j_\rho \end{pmatrix}$ порядка $\rho$ матрицы $F$. В соответствии с представлением $\sigma[F]$ в виде (1.2) запишем систему (1.3) в виде следующих уравнений:

$$f[F] := \text{НОД}\{z_k[F]\}_{k=1}^{k=N} = 0; \tag{1.4}$$

$$\hat{Z}[F] := \frac{1}{f[F]} Z[F] = (\hat{z}_1[F], \ldots, \hat{z}_N[F])^T = 0; \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} f[F] = 0, \\ \hat{Z}[F] = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Нули характеристического полинома $f[F]$ матрицы $F$ образуют множество точек регулярного спектра $\sigma_r[F]$, так что $\sigma_r[F]$ есть множество многообразий, принадлежащих $(q-1)$-мерным решениям ДСНАУ (1.3). Решения системы (1.5), т.е. системы из взаимно простых полиномов $\hat{z}_k = \hat{z}_k(\overline{\lambda})$, $k = 1, \ldots, N$, образуют множество точек сингулярного спектра $\sigma_s[F]$ матрицы $F$, так что $\sigma_s[F]$ есть множество многообразий, принадлежащих $(q-k)$-мерным решениям ДСНАУ (1.3) при $k > 1$. Решения системы (1.6) образуют множество точек регулярно-сингулярного спектра $\sigma_{rs}[F]$ матрицы $F$, состоящее из многообразий, образованных пересечением $(q-1)$-мерных и $(q-k)$-мерных решений ДСНАУ (1.3).

Рассмотрим векторные спектральные характеристики матрицы $F$, соответствующие точкам спектра $\sigma[F]$. Для этого введем в рассмотрение $q$-параметрическую полиномиальную $\rho N \times \rho$ матрицу $\mathcal{A}[F] = [A_1, \ldots, A_N]^T = \mathcal{A}(\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $\det A_k = z_k[F]$, $k = 1, \ldots, N$, так что вектор $Z[F]$ из (1.3) является ассоциированным вектором для матрицы $\mathcal{A}[F]$: $A_k$ есть матрица минора $z_k[F]$, $k = 1, \ldots, N$.

Для определения правых векторных характеристик матрицы $\mathcal{A}[F]$ рассмотрим систему вида

$$\mathcal{A}[F]\eta = 0. \tag{1.7}$$

Решение $\eta_*$ уравнения (1.7), вычисленное в фиксированной точке $\sigma[F]$ и удовлетворяющее условиям $\mathcal{A}_*\eta_* = 0$, $\eta_* \in N_c[\mathcal{A}]$, $\eta_*$ – ненулевой свободный вектор,[1] образует спектральную пару $(|*|, \eta_*)$ матрицы $F$. Звездочкой обозначена рассматриваемая точка $\sigma[F]$.

Для установления принадлежности точки $|*|$ спектра к одному из множеств $\sigma_r[F]$ или $\sigma_s[F]$ применяется "$\xi$-критерий" [3].

[1] Свободным называется полиномиальный вектор, компоненты которого суть взаимно простые полиномы.

Рассмотрим применение “$\xi$-критерия” к матрице $F(\overline{\lambda})$ полного ранга. Пусть $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$. Заметим, что матрица $F$ полного столбцового ранга отличается от соответствующей ей матрицы $\mathcal{A}[F]$ только наличием у $\mathcal{A}[F]$ совпадающих между собой строк. Так что все спектральные свойства матриц $F$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

Согласно $\xi$-критерию выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется матрица $F(\overline{\lambda})$ в точке спектра $\sigma[F]$, тип которой следует установить ($F_* := F(*)$, звездочкой обозначена рассматриваемая точка спектра). Если эта точка есть набор из $q$ фиксированных параметров, то $F_*$ есть постоянная матрица. Если точка содержит свободные (спектральные) параметры из мультипараметра $\overline{\lambda}$, то $F_*$ есть полиномиальная матрица от свободных параметров.

(2) Находится нуль-пространство $W_0$ матрицы $F_*$ ($W_0 := N_c[F_*]$). Операция (2) может быть реализована алгоритмом $\Delta W$-$q$ факторизации при $q = 0$ и $q = 1$.

(3) Вычисляется полиномиальный вектор $\xi(\overline{\lambda}) = F(\overline{\lambda})W_0$.

(4) Вычисляется полином $\delta[\xi]$, т.е. НОД из компонентов вектора $\xi(\overline{\lambda})$.

Если $\delta[\xi] \neq \mathrm{const}$, то рассматриваемая точка принадлежит регулярному спектру матрицы $F$. Если $\delta[\xi] = \mathrm{const}$, но рассматриваемая точка удовлетворяет СНАУ вида $\xi(\overline{\lambda}) = 0$, т.е. $\xi_* = \xi(*)$ есть нулевой вектор, то эта точка принадлежит сингулярному спектру матрицы $F$.

### 1.3. Спектральные характеристики матрицы в терминах скалярных полиномов

Пусть $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F] \cup \sigma_{rs}[F]$. Рассмотрим структуру спектра $\sigma[F]$ в терминах нулей следующих скалярных полиномов: характеристического полинома $f[F]$, нули которого образуют регулярный спектр $\sigma_r[F]$; полинома $f_s[F] = \hat{Z}^T\hat{Z}$, нулям которого принадлежит сингулярный спектр $\sigma_s[F]$, и полинома $f_{rs}[F] = f^2[F] + \hat{Z}^T\hat{Z}$, нулям которого принадлежат точки спектра $\sigma_{rs}[F]$.

#### 1.3.1. Регулярный спектр в терминах нулей $f[F]$

Представим конечный регулярный спектр $\sigma_r[F]$ в виде

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F]. \tag{1.8}$$

Множество $\sigma_{r1}[F]$ есть объединение собственных нулей характеристического полинома $f[F]$. Множество $\sigma_{r1}[F]$ будем называть собственным регулярным спектром матрицы $F(\overline{\lambda})$. Каждая точка $\alpha_* \in \sigma_{r1}[F]$ есть замкнутое неприводимое многообразие, состоящее из $q$ фиксированных параметров. Уравнение $F(\alpha_*)x = 0$ имеет своим решением ненулевой постоянный вектор $x_*$ (несколько векторов), удовлетворяющий условию

$$x_* \in \{N_c[F(\alpha_*)] \setminus N_c[F]_{\alpha_*}\}. \qquad (1.9)$$

Пару $(\alpha_*; x_*)$, состоящую из фиксированной точки $\alpha_*$ собственного спектра $\sigma_{r1}[F]$ и вектора $x_*$, удовлетворяющего соотношению (1.9), будем называть собственной спектральной парой, $\alpha_*$ – собственным значением, а $x_*$ – собственным вектором матрицы $F(\overline{\lambda})$.

Множество $\sigma_{r2}[F]$ есть смешанный регулярный спектр матрицы $F$ и состоит из объединения смешанных нулей характеристического полинома матрицы $F$ уровней $l$ $(l = 1, \dots, r)$. Каждая точка $\sigma_{r2}[F]$ есть набор из замкнутых неприводимых многообразий, число которых определяет уровень, которому она принадлежит. Точка $\sigma_{r2}[F]$ уровня $l$ имеет или вид $\gamma_*^{(l+1)} = (\alpha_*^{(l+1)},\, \beta_*^{(l)}, \dots, \beta_*^{(0)})$, т.е. является точкой полного смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$, или вид $\widehat{\gamma}_*^{(l)} = (\widehat{\beta}_*^{(l)},\, \beta_*^{(l-1)}, \dots, \beta_*^{(0)})$, т.е. является точкой неполного смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$.

Многообразие $\gamma_*^{(l+1)}$ есть набор из $q$ фиксированных параметров, который является нулем как полинома $f[F]$, так и полинома $g[F]$. Здесь и ниже $g[F]$ обозначает полином, входящий в неполную относительную факторизацию [НОФ] характеристического полинома $f[F]$: $f[F] = \varphi[F]g[F]$. Многообразие $\widehat{\gamma}_*^{(l)}$ состоит из фиксированных параметров, число которых меньше $q$. При этом $\widehat{\gamma}_*^{(1)}$ является нулем $f[F]$, тогда как равенство $g[F] = g(\overline{\lambda}, \widehat{\gamma}_*) = 0$ на многообразии $\widehat{\gamma}_*$ является тождеством относительно по крайней мере одной из переменных, входящих в мультипараметр[2] $\overline{\lambda}$ полинома $g[F]_* = g(\overline{\lambda}, \widehat{\gamma}_*)$.

Точки смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ вида $\widetilde{\gamma}_* = (\widetilde{\beta}_*^{(l)},\, \beta_*^{(l-1)}, \dots, \beta_*^{(0)})$, на которых равенства $f[F]_* = f(\overline{\lambda}, \widetilde{\gamma}_*) = 0$ и $g[F]_* =$

[2]Здесь и ниже мультипараметром $\overline{\lambda}$ обозначены независимые переменные рассматриваемого полинома (свободные параметры рассматриваемой матрицы).

$g[\overline{\lambda}, \widetilde{\gamma}_*] = 0$ являются тождествами относительно всех переменных, входящих в мультипараметр $\overline{\lambda}$, являются неподвижными точками регулярного спектра матрицы $F(\overline{\lambda})$.

В дальнейшем неполные точки смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ и неподвижные точки будем обозначать также наборами $(\overline{\lambda}, \widehat{\gamma}_*)$, $(\overline{\lambda}, \widetilde{\gamma}_*)$, состоящими из $q$ параметров, причем параметры, входящие в $\overline{\lambda}$, являются свободными (спектральными параметрами).

Каждой точке $\sigma_{r2}[F]$, состоящей из $q$ фиксированных параметров, соответствует ненулевой вектор (несколько векторов), удовлетворяющий соотношению

$$x_* \in \{N_c[F(*)] \setminus N_c[F]_*\}, \tag{1.10}$$

где звездочкой обозначена точка $\sigma_{r2}[F]$.

Каждой неполной точке смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ соответствует полиномиальный вектор $x_*(\overline{\lambda})$ (несколько полиномиальных векторов), удовлетворяющий соотношению

$$x_*(\overline{\lambda}) \in \{N_c[F(\overline{\lambda}, \widehat{\gamma}_*)] \setminus N_c[F(\overline{\lambda})]_{\widehat{\gamma}_*}\}. \tag{1.11}$$

### 1.3.2. Сингулярный спектр в терминах нулей скалярного полинома

Пусть $F = F(\overline{\lambda}) \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$, $\sigma_s[F]$ – сингулярный спектр матрицы $F(\overline{\lambda})$. Представим $\sigma_s[F]$ в виде

$$\sigma_s[F] = \sigma_{s1}[F] \cup \sigma_{s2}[F] \cup \sigma_{rs}[F]. \tag{1.12}$$

Здесь множество $\sigma_{s1}[F]$ есть собственный сингулярный спектр $F(\overline{\lambda})$, $\sigma_{s2}[F]$ есть смешанный сингулярный спектр $F(\overline{\lambda})$, $\sigma_{rs}[F]$ есть регулярно-сингулярный спектр $F(\overline{\lambda})$.

Обозначим через $f_s[F]$ скалярный полином, нули которого образуют точки $\sigma_s[F]$: собственные сингулярные нули $f_s[F]$ содержат точки $\sigma_{s1}[F]$; неподвижные сингулярные нули $f_s[F]$ содержат точки $\sigma_{rs}[F]$, смешанные сингулярные нули $f_s[F]$ содержит точки $\sigma_{s2}[F]$.

В качестве $f_s[F]$ может быть выбран любой из следующих полиномов.

1) $f_s[F] = \hat{Z}^T \hat{Z}$, где $\hat{Z} := \hat{Z}[F]$ есть полиномиальный вектор, компоненты которого суть взаимно простые полиномы, образующие систему (1.5).

2) $f_s[F] = \det[VV^T]$, где $V := V(\overline{\lambda})$ есть $m \times n$ матрица, входящая в $\nabla V$-$q$ факторизацию [5] матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$:

$$F(\overline{\lambda}) = \nabla(\overline{\lambda})V(\overline{\lambda}). \tag{1.13}$$

Если $\sigma_{rs}[F]$ есть пустое множество, то по свойствам алгоритма $\nabla V$-$q$ факторизации конечный спектр $\sigma[V]$ матрицы $V(\overline{\lambda}) \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ совпадает с сингулярным спектром матрицы $F(\overline{\lambda})$. Следовательно, точки сингулярного спектра $\sigma_s[F]$ принадлежат нулям полинома $f_s[F] = f_s[V] = \det(VV^T)$.

3) $f_s[F] = \det[F^{(v)T}F^{(v)}]$. Здесь $F^{(v)} = F^{(v)}(\overline{\lambda})$ есть матрица полного ранга, конечный спектр которой совпадает с сингулярным спектром матрицы $F(\overline{\lambda})$.

Алгоритм вычисления $F^{(v)}$ состоит в построении конечной последовательности матриц $F^{(k)} = F^{(k)}(\overline{\lambda})$, $k = 1, \ldots, v$. В качестве начальной берется матрица $F^{(0)} = W_0$, т.е. базисная матрица правого нуль-пространства $N_c[F]$ из полиномиальных решений матрицы $F(\overline{\lambda})$, регулярный спектр которой удовлетворяет условиям

$$\sigma_r[W_0] = \sigma_{r2}[W_0], \quad \sigma_{r1}[\bar{W}_0] = \varnothing.$$

Переход от шага $k$ к шагу $k+1$ осуществляется применением алгоритма $\Delta W$-$q$ факторизации к матрице $F^{(k)^T}$, т.е. вычислением равенства

$$F^{(k)^T} W^{(k)} = [\Delta^{(k)}, 0], \tag{1.14}$$

где $W^{(k)} = [W_1^{(k)}, W_0^{(k)}]$, $W_0^{(k)} = N_c[F^{(k)^T}]$.

Результатом выполнения шага $k$ является матрица $F^{(k+1)} := W_0^{(k)^T}$.

Реализация каждого шага осуществляется применением алгоритма $\Delta W$-$q$ факторизации [2]. При записи полиномиальной матрицы $F^{(k)}$ в виде матричного полинома в алгоритме $\Delta W$-$q$ факторизации в качестве ведущего параметра берется параметр $\lambda = \mu_{k+1}$. При переходе от шага $k$ к шагу $k+1$ из спектра $\sigma_{r2}[F^{(k)}]$ исчерпываются точки, принадлежащие нулям наследственного полинома $\psi_1[F^{(k)}]$. Процесс исчерпывания заканчивается на шаге $k = v$, где $v$ есть число нетривиальных наследственных полиномов матрицы $F(\overline{\lambda})$. В результате будет вычислена матрица $F^{(v)}(\overline{\lambda})$, не имеющая регулярного спектра: $\sigma[F^{(v)}] = \sigma_s[F]$.

В качестве скалярного полинома, нули которого содержат точки $\sigma_s[F]$, берется полином

$$f_s[F^{(v)}] = \det[F^{(v)T}F^{(v)}].$$

Обоснование алгоритма вычисления матрицы $F^{(v)}(\overline{\lambda})$ базируется на следующих утверждениях (см. [1, 3, 7]).

1°. $\sigma_s[F^{(k)}] = \sigma_s[F^{(k+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, v-1$.

2°. $\varphi[F^{(k)}] = \psi_{k+1}[F]\varphi[F^{k+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, v-1$.

Здесь $\psi_k[F]$, $k = 1, \dots, v$, есть последовательность нетривиальных наследственных полиномов матрицы $F(\overline{\lambda})$:

$$\psi_k[F] = \frac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]}, \quad k = 1, \dots, v;$$

$f_0[F] = f[F]$ – наибольший общий делитель всевозможных миноров порядка $\rho$ матрицы $F(\overline{\lambda}) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$; $f_k[F]$ – наибольший общий делитель всевозможных миноров порядка $\rho - k$ матрицы $F(\lambda)$; $f_k[F] = \varphi_k[F]g_k[F]$, $k = 0, 1, \dots, v$, есть неполная относительная факторизация полинома $f_k[F]$:

$$\varphi[F] = \varphi_0[F] = \psi_1[F]\psi_2[F]\cdots\psi_v[F], \quad \psi_{v+1}[F] = \mathrm{const}.$$

3°. $\psi_{k+1}[F] = \psi_k[W_0]$, $\psi_{k+1}[F^{(k)}] = \psi_k[F^{(k+1)}]$, $k = 1, \dots, v-1$.

### 1.4. Спектральные характеристики регулярно-сингулярного спектра матрицы

Пусть $F(\overline{\lambda}) \in F_m^{m\times n}$, $\sigma_{rs}[F]$ – регулярно-сингулярный спектр матрицы $F(\overline{\lambda})$. Представим $\sigma_{rs}[F]$ в виде

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_{rs}^{(0)}[F] \cup \sigma_{rs}^{(1)}[F] \cup \sigma_{rs}^{(2)}[F]. \tag{1.15}$$

Множество $\sigma_{rs}^{(0)}[F]$ состоит из замкнутых неприводимых многообразий $\varkappa_*$ аффинного пространства, на которых выполняются соотношения

$$N_c[F(\overline{\lambda}, \varkappa_*)] = N_c[F]_{\varkappa_*} = \{0\}. \tag{1.16}$$

Другими словами, $\sigma_{rs}^{(0)}[F]$ есть множество таких точек $\sigma_{rs}[F]$, что равенство $F(\overline{\lambda}, \varkappa_*)x = 0$ выполняется только на нулевом векторе $x_* = 0$.

Множество $\sigma_{rs}^{(1)}[F]$ состоит из замкнутых неприводимых многообразий $\nu_*$ аффинного пространства, на которых выполняется соотношение

$$\Gamma(\overline{\lambda}, \nu_*) := N_c[F(\overline{\lambda}, \nu_*)] \equiv N_c[F]_{\nu_*} \neq \{0\}. \tag{1.17}$$

При этом $\Gamma(\overline{\lambda}, \nu_*)$ есть непустое множество. Другими словами, $\sigma_{rs}^{(1)}[F]$ есть множество тех точек $\sigma_{rs}[F]$, для которых равенство $F(\overline{\lambda}, \nu_*)x = 0$ выполняется только на полиномиальном решении $x_*(\lambda)$, удовлетворяющем соотношению

$$x_*(\lambda) \in \{N_c[F(\overline{\lambda}, \nu_*)] \cap N_c[F]_{\nu_*}\} \neq \varnothing, \tag{1.18}$$

так что спектральный вектор, соответствующий точке $\nu_*$, совпадает с полиномиальным решением матрицы $F(\overline{\lambda})$, вычисленным в этой точке.

Множество $\sigma_{rs}^{(2)}[F]$ состоит из точек множества $\sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$, на которых равенство $F(\overline{\lambda}, \gamma_*)x = 0$ выполняется на полиномиальном решении $x_*(\overline{\lambda})$, удовлетворяющем соотношению

$$x_*(\lambda) \in \{N_c[F(\overline{\lambda}, \gamma_*)] \cap N_c[F]_{\gamma_*}\}. \tag{1.19}$$

Точки множеств $\sigma_{rs}^{(0)}[F]$ и $\sigma_{rs}^{(1)}[F]$ будем называть критическими точками спектра $\sigma_{rs}[F]$. Обозначим через $f_{rs}[F]$ полином, нули которого содержат точки спектра $\sigma_{rs}[F]$. В качестве нулей $f_{rs}[F]$ могут быть взяты решения любой из следующих систем из двух уравнений:

1) $f[F] = 0$, $\hat{z}^T \hat{z} = 0$;

2) $\det[\nabla(\overline{\lambda})] = 0$, $\det[V(\overline{\lambda})V^T(\overline{\lambda})] = 0$, где $\nabla(\overline{\lambda})$ и $V(\overline{\lambda})$ – матрицы, входящие в $\nabla V$-$q$ факторизацию (1.13) матрицы $F(\overline{\lambda})$;

3) $f[F] = 0$, $\det[F^{(v)T}F^{(v)}] = 0$, где $F^{(v)}$ – матрица нуль-пространства $N_c[F]$, не содержащая регулярного спектра.

## §2. Вычисление регулярного спектра

Пусть $F := F(\overline{\lambda})$, где $\overline{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, есть полиномиальная $q$-параметрическая $m \times n$ матрица ранга $\rho$; $f[F]$ – характеристический полином матрицы $F$. Конечный регулярный спектр $\sigma_r[F]$ матрицы $F$ представим в виде

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F],$$

где $\sigma_{r1}[F]$ есть множество собственных нулей полинома $f[F]$; $\sigma_{r2}[F]$ есть множество смешанных нулей $f[F]$.

Ниже предлагаются три способа вычисления точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ и им соответствующих векторов, удовлетворяющих уравнению $F(\overline{\lambda})x = 0$ в рассматриваемых точках спектров $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$. Все три способа предполагают известным (заранее вычисленным) характеристический полином матрицы $F$. Они используют различные виды факторизации полинома $f[F]$. Общим для всех способов является так называемый элементарный шаг [6].

### 2.1. Алгоритм элементарного шага

Элементарный шаг вычисляет собственные и смешанные нули преобразуемых полиномов. Алгоритм реализации элементарного шага выполняет следующие операции.

а) Заданный полином $f(\overline{\lambda})$ от $u$ переменных ($u > 1$) представляется в виде произведения примитивных полиномов, для чего используется алгоритм из [6]:

$$f(\overline{\lambda}) = \prod_{k=0}^{u-1} \prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{u-k}\leqslant u} f_{i_1,\ldots,i_{u-k}}(\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_{u-k}}) = \prod_{k=0}^{u-1} g^{(u-k)}(\overline{\lambda}),$$

где

$$g^{(u-k)}(\overline{\lambda}) = \prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{u-k}} f_{i_1,\ldots,i_{u-k}}(\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_{u-k}}), \quad g[f] := g^{(u)}(\overline{\lambda}). \tag{2.1}$$

Здесь $f_{i_1,\ldots,i_{u-k}}(\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_{u-k}})$ – полином от $u-k$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от любого нетривиального подмножества его переменных; $g[f]$ – полином от $u$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от любого числа переменных из множества $\{\mu_1,\ldots,\mu_q\}$.

б) Из равенства (2.1) выделяются последовательности полиномов вида

$$f_{k+1}(\mu_{k+1}), f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}), \ldots, f_{k+1,\ldots,q_1}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_{q_1}), \tag{2.2}$$

где $k \geqslant 0$, $q_1 \leqslant u$, $f_{k+1,\ldots,q_1,q_1+t}\ (\mu_{k+1},\ldots,\mu_{q_1},\mu_{q_1+t)} = \mathrm{const}$ при $t \geqslant 1$.

в) Формируются следующие системы нелинейных алгебраических уравнений: система

$$f_1(\mu_1) = 0, \quad f_{1,2}(\mu_1, \mu_2) = 0, \ \ldots, \ f_{1,2,\ldots,u}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_u) = 0, \quad (2.3)$$

и системы

$$\begin{cases} f_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0, \\ f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_{k+1,k+2,\ldots,q_1}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_{q_1}) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

рассматриваемые при $k = 0$, $q_1 < u$ и при $k > 0$, $q_1 \leqslant u$.

г) Находятся решения $\alpha_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, i_0$, и $\beta_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, j_0$, соответственно систем (2.3) и (2.4).

Объединение всех решений $\alpha_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, i_0$, образует собственные нули полинома $f(\overline{\lambda})$. Каждое фиксированное решение $\beta_*^{(0)}$ из множества $\beta_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, j_0$, порождает смешанные нули $f(\overline{\lambda})$ разных уровней и, в частности, неподвижные точки уравнения $f(\overline{\lambda}) = 0$.

### 2.2. Первый способ вычисления $\sigma_r[F]$

Реализация первого способа состоит в построении последовательности полиномов $f^{(t)}(\overline{\lambda})$, $t = 0, 1, \ldots, r$, от $u_t$ переменных, $u_{t-1} > u_t$ ($f^{(0)}(\overline{\lambda}) = f[F]$, $f^{(r)}(\overline{\lambda})$ не имеет собственных нулей), из нулей которых формируются точки $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$.

Выполняются следующие операции.

(1) К полиному $f^{(0)}(\overline{\lambda})$ применяется элементарный шаг, т.е. операции (а)–(г) из п. 2.1. Результатом являются множество $\{\alpha_i^{(0)}\}$, $i = 1, \ldots i_0$, $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i^{(0)}[f^{(0)}]$, и множество $\{\beta_j^{(0)}\}$, $j = 1, \ldots, j_0$, $\beta_j^{(0)} = \beta_j^{(0)}[f^{(0)}]$. Точки множества $\{\alpha_i^{(0)}\}$ образуют точки собственного спектра $\sigma_{r1}[F]$.

(2) Для каждого фиксированного $\beta_*^{(0)}$ из множества $\{\beta_j^{(0)}\}$ вычисляется полином $f^{(1)}(\overline{\lambda}) = g[f_0]_* \equiv g(\overline{\lambda}, \beta_*^{(0)})$ от $u_1$ переменных ($u_1 < u_0$).

(3) К полиному $f^{(1)}(\overline{\lambda})$ применяется алгоритм элементарного шага, в результате которого будут вычислены множества $\{\alpha_i^{(1)}\}$, $i = 1, \ldots i_1$, и $\{\beta_j^{(1)}\}$, $j = 1, \ldots, j_1$.

Возникают следующие ситуации.

В первой ситуации для непустых многообразий $\alpha_i^{(1)}$ формируются наборы $(\alpha_i^{(1)}, \beta_*^{(0)})$, которые образуют точки смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ первого уровня, порожденные многообразием $\beta_*^{(0)}$. В этом случае равенство $f^{(1)}(\overline{\lambda}) = 0$ не является тождеством относительно по крайней мере одной из переменных, входящих в мультипараметр $\overline{\lambda}$.

Во второй ситуации многообразие $\alpha_*^{(1)}$ пусто, а многообразие $\gamma_1 := \widehat{\beta}_*$ образует неполный нуль полинома $f^{(1)}(\overline{\lambda})$. В этом случае равенство $f^{(1)}(\overline{\lambda}) = g(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}^{(0)})_* = 0$ является тождеством.

В третьей ситуации оба равенства $f(\overline{\lambda}) = 0$, $f^{(1)}(\overline{\lambda}) = 0$ на многообразии $\beta_*^{(0)}$ являются тождествами относительно всех независимых переменных. Многообразие $\beta_*^{(0)}$ образует неподвижную точку спектра $\sigma_r[F]$.

Вычисление точек $\sigma_{r2}[F]$ второго и следующих уровней, порожденных многообразием $\beta_*^{(0)}$, реализуется аналогично. Так наборы вида $(\alpha_i^{(2)},\ \beta_*^{(1)},\ \beta_*^{(0)})$ есть точки второго уровня из $\sigma_{r2}[F]$. Здесь $(\alpha_i^{(2)}, \beta_*^{(1)})$ есть смешанный нуль первого уровня полинома $f^{(2)}(\overline{\lambda}) = g[f_1^{(1)}]_* = f^{(2)}(\overline{\lambda}, \beta_*^{(1)})$, число переменных которого меньше $u_1$. Через $g[f^{(1)}]$ обозначен полином $g(\overline{\lambda})$, входящий в равенство (2.1) для полинома $f^{(1)}(\overline{\lambda})$.

Наборы вида $\gamma_*^{(l+1)} = (\alpha_*^{(l+1)}, \beta_*^{(l)}, \ldots, \beta_*^{(0)})$ образуют точки смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$, порожденные многообразием $\beta_*^{(0)}$.

Процесс вычисления точек $\sigma_{r2}[F]$, порожденных многообразием $\beta_*^{(0)}$, заканчивается на шаге $r$, когда $f^{(r)}(\overline{\lambda})$ не имеет собственных нулей.

Объединение всех наборов $\gamma_*^{(l+1)}$, $l = 0, 1, \ldots r-1$, вычисленных для каждого из многообразий множества $\beta_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, j_0$, образует множество точек смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ соответствующих уровней.

## 2.3. Второй способ вычисления $\sigma_r[F]$

Второй способ вычисления $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ состоит в выполнении следующих операций.

(1) Вычисляется характеристический полином $f[F]$ матрицы $F(\overline{\lambda})$, зависящей от $q$ параметров.

(2) Вычисляется неполная относительная факторизация $f[F]$:

$$f[F] = \varphi[F]g[F], \tag{2.5}$$

где

$$\varphi[F] = \prod_{k=1}^{q} f_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,q}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$$

есть полином от $q$ переменных, $f^{(k,0)}(\overline{\lambda}) := f_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots q}$ – полиномы от $q-1$ переменных; $g[F]$ – полином от $q$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от $i \leqslant q-1$ переменных из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$.

(3) Вычисляются собственные и смешанные нули полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$ для каждого фиксированного $k = 1, \ldots, q$.

С этой целью к полиному $f(\overline{\lambda}) := f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$ (при фиксированном $k$) применяется алгоритм элементарного шага (операции (а)–(г) из п. 2.1).

Обозначим через $\alpha_{i,k}$, $i = 1, \ldots, i_k$, собственные нули полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$, через $\gamma_{j,k}^{(l)}, j = 1, \ldots, j_k$, – смешанные (полные) нули уровня $l$, $l = 1, \ldots, r_k$, полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$ и через $\widehat{\gamma}_{j,k}^{(l)}$ – смешанные (неполные) нули полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$ уровня $l$, $l = 1, \ldots, r_k$. Рассмотрим раздельно вычисление спектров $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$.

Для вычисления $\sigma_{r1}[F]$ выполняются следующие операции.

(1) Для каждого фиксированного собственного нуля $\alpha_{*,k}$ полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$ вычисляется полином $g(\lambda, \alpha_{*,k})$ от одной переменной и находятся все его корни $\lambda_{sk}$, $s = 1, \ldots, s_*$. Здесь $g(\overline{\lambda}) = g[F]$ есть полином из равенства (2.1), вычисленного для полинома $f[F]$.

(2) Составляются наборы $(\lambda_{sk}, \alpha_{*,k})$, $s = 1, \ldots s_k$, для фиксированного многообразия $\alpha_{*,k}$.

(3) Операции (1), (2) выполняются для каждого фиксированного $\alpha_{i,k}$, $i = 1, \ldots, i_k$.

Объединение всех полученных наборов образует множество всех собственных нулей полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$. Искомый спектр $\sigma_{r1}[F]$ (или, что то же, объединение всех собственных нулей $f[F]$) образуется как объединение собственных нулей полиномов $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$, $k = 1, \ldots, q$.

Рассмотрим построение $\sigma_{r2}[F]$. Обозначим через $\gamma_{*,k}^{(l)}$ фиксированный смешанный нуль уровня $l$ полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$. Для вычисления точек смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$ уровня $l$ матрицы $F(\overline{\lambda})$ выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется полином $g(\lambda, \gamma_{*,k}^{(l)})$, и находятся все его корни $\widehat{\lambda}_{pk}$, $p = 1, \ldots, p_k$.

(2) Формируются наборы $(\widehat{\lambda}_{pk}; \gamma_{*,k}^{(l)})$.

(3) Операции (1), (2) выполняются для каждого многообразия $\gamma_{j,k}^{(l)}$, $j = 1, \ldots, j_k$. Полученные наборы $(\widehat{\lambda}_{pk}, \gamma_{i,k}^{(l)})$, $p = 1, \ldots, p_k$, $i = 1, \ldots, i_k$, образуют смешанные нули уровня $l$ полинома $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$.

Объединение смешанных нулей всех уровней полиномов $f^{(k,0)}(\overline{\lambda})$, $k = 1, \ldots, q$, образует точки $\sigma_{r2}[F]$, зависящие от всех $q$ параметров.

### 2.4. Третий способ вычисления $\sigma_r[F]$

Пусть $F = F(\overline{\lambda})$, где $\overline{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, есть полиномиальная $q$-параметрическая $m \times n$ матрица ранга $\rho$; $f[F]$ – характеристический полином $F$.

Обозначим через $f_k[F]$ наибольший общий делитель всевозможных миноров порядка $\rho - k$ матрицы $F$; $k = 0, 1, \ldots, \rho - 1$, $f_0[F] = f[F]$. Пусть $f_k[F] = \varphi_k[F] g_k[F]$ есть НОФ полинома $f_k[F]$; $\psi_k[F] = \frac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]}$, $k = 1, \cdots, v$, есть последовательность нетривиальных наследственных полиномов матрицы $F(\overline{\lambda})$, так что имеет место равенство

$$f[F] = \psi_1[F]\psi_2[F] \cdots \psi_v[F] g[F]. \tag{2.6}$$

Здесь $g[F]$ есть полином от $q$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от любого нетривиального подмножества переменных из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$. Число переменных каждого из наследственных полиномов не превосходит $q - 1$.

На равенство (2.6) будем ссылаться как на разложение характеристического полинома матрицы $F(\overline{\lambda})$ в произведение наследственных полиномов.[3]

Способ вычисления $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$, основанный на разложении $f[F]$ вида (2.6), состоит из конечного числа шагов, совпадающего с числом нетривиальных наследственных полиномов из (2.6). Каждый $k$-ый шаг ($k = 1, \ldots, v$) вычисляет точки $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$, порождаемые нулями полинома $\psi_k[F]$.

[3] Методы вычисления наследственных полиномов представлены в [7].

Рассмотрим выполнение типичного (первого) шага. Начальными данными является полином $\widehat{\psi}(\overline{\lambda}) := \psi_1[F]$ от $u$ переменных, $u = q-1$. Для вычисления нулей полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$ применяется алгоритм элементарного шага из п. 2.1.

Выполняются следующие операции.

(1) Вычисляются решения $\widehat{\alpha}_i[\widehat{\psi}]$, $i = 1,\dots,i_1$, системы (2.3), т.е. собственные нули полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$, которые суть замкнутые многообразия, состоящие из $u = q-1$ фиксированных параметров, входящих в мультипараметр $\overline{\lambda}$ полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$.

(2) На каждом фиксированном нуле $\widehat{\alpha}_*$ из множества $\{\widehat{\alpha}_i[\widehat{\psi}]\}$, $i = 1,\dots,i_1$, вычисляется полином $g[F]$, где $g[F]$ – полином из равенства (2.1), так что $g[F]_* = g(\lambda,\widehat{\alpha}_*)$ есть полином от одной переменной.

(3) Находятся корни $\lambda_{s,*}$, $s = 1,\dots,s_*$, полинома $g[F]_*$ и формируются наборы из $q$ фиксированных параметров вида $\alpha_* := (\lambda_{s,*},\widehat{\alpha}_*)$.

(4) Операции (1)–(3) выполняются для каждого фиксированного $\widehat{\alpha}_*$ из $\{\widehat{\alpha}_i[\widehat{\psi}]\}$, $i = 1,\dots,i_1$. Результатом будут наборы из $q$ фиксированных параметров вида

$$(\lambda_{s,i},\widehat{\alpha}_i),\quad i = 1,\dots,i_1,\quad s = 1,\dots,s_i, \tag{2.7}$$

которые являются собственными нулями полинома $f[F]$, порожденными собственными нулями фиксированного наследственного полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$ из (2.6).

Объединение наборов вида (2.7), вычисленных для всех наследственных полиномов из равенства (2.6), образует искомое множество $\sigma_{r1}[F]$.

Множество $\sigma_{r2}[F]$, состоит из полных и неполных смешанных нулей полинома $f[F]$, т.е. из объединения смешанных нулей $f[F]$ уровней $l = 1,\dots,r:\quad \sigma_{r2}[F] = \bigcup\limits_{l=1}^{r} \sigma_{r2}^{(l)}[F]$.

Рассмотрим вычисление $\sigma_{r2}^{(l)}[F]$ для фиксированного уровня $t$. Пусть $\sigma_{r2}^{(t)}[\widehat{\psi}]$ обозначает множество смешанных нулей уровня $t$ полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$, т.е. наборы параметров $\gamma_*^{(t)} := (\widehat{\alpha}_*^{(t)},\widehat{\beta}_*^{(t-1)},\dots,\widehat{\beta}_*^{(0)})$ для полных и наборы параметров $\widehat{\gamma}_*^{(t)} = (\widehat{\beta}_*^{(t-1)},\dots,\widehat{\beta}_*^{(0)})$ для неполных смешанных нулей полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$ уровня $t \geqslant 1$.

Вычисление $\gamma_*^{(t)}$ для $t \geqslant 1$ начинается с $t = 1$. Множество $\gamma_*^{(1)} := \gamma_*^{(1)}[\widehat{\psi}]$ состоит из наборов вида $(\widehat{\alpha}_*^{(1)},\widehat{\beta}_*^{(0)})$, где $\widehat{\beta}_*^{(0)}$ есть фиксированное решение системы (2.4), $\widehat{\alpha}_*^{(1)}$ есть собственный нуль полинома $\widehat{\psi}^{(1)}(\overline{\lambda}) = \hat{g}(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}_*^{(0)})$, $\hat{g} = g^{(u)}$ есть полином от $q-1$ переменных, входящий в относительную факторизацию полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$, т.е. в равенство (2.1). Множество $\gamma_*^{(2)}$ состоит из наборов вида $(\widehat{\alpha}_*^{(2)}, \widehat{\beta}_*^{(1)}, \widehat{\beta}_*^{(0)})$, где $(\widehat{\alpha}_*^{(2)}, \widehat{\beta}_*^{(1)})$ есть полный смешанный нуль полинома $\widehat{\psi}^{(1)}(\overline{\lambda}) = \hat{g}(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}_*^{(0)})$. Многообразие $\widehat{\alpha}_*^{(2)}$ есть фиксированный собственный нуль полинома $\widehat{\psi}^{(2)}(\overline{\lambda}) := \widehat{\psi}^{(1)}(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}_*^{(1)})$.

Аналогично вычисляется набор из $q-1$ фиксированных параметров $\gamma_*^{(t)} = (\widehat{\alpha}_*^{(t)},\ \widehat{\beta}_*^{(t-1)}, \ldots, \widehat{\beta}_*^{(0)})$, где $\widehat{\beta}_*^{(t-1)}$ есть фиксированное решение системы (2.4) для полинома $\widehat{\psi}^{(t-1)}(\overline{\lambda}) = \widehat{\psi}^{(t-2)}(\overline{\lambda}, \beta_*^{(t-2)})$, $\widehat{\alpha}_*^{(t)}$ есть фиксированный собственный нуль полинома $\widehat{\psi}^{(t)}(\overline{\lambda})$.

По построению имеют место равенства

$$\widehat{\psi}^{(t)}(\overline{\lambda}) = \widehat{\psi}^{(t-1)}(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}^{(t-1)}) = \cdots = \hat{g}(\overline{\lambda}, \widehat{\beta}_*^{(t-1)}, \ldots, \widehat{\beta}_*^{(0)}),$$

так что $\hat{g}(\widehat{\alpha}_*^{(t)}, \widehat{\beta}_*^{(t-1)}, \ldots, \widehat{\beta}_*^{(0)}) = 0$.

Процесс построения многообразий $\gamma_*^{(t)}$ продолжается до тех пор, пока при некотором $t = r$ полином $\widehat{\psi}^{(r)}(\overline{\lambda})$ не будет иметь собственных нулей.

Параллельно полным смешанным нулям полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$ вычисляются наборы, образующие неполные смешанные нули $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$.

Объединение всех построенных наборов для каждого фиксированного решения $\widehat{\beta}_*^{(0)}$ из множества $\widehat{\beta}_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, j_0$, решений системы (2.4) для полинома $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$ образует множество смешанных нулей уровня $t$ полинома $f[F]$, порожденных полиномом $\widehat{\psi}(\overline{\lambda})$.

### 2.5. Спектральные пары

Рассмотрим спектральные пары, образованные точками регулярного спектра $\sigma_r[F]$. Каждой точке $\alpha_*^{(0)} \in \sigma_{r1}[F]$ соответствует ненулевой постоянный вектор $x_*$ (несколько векторов $x_{*i}$), удовлетворяющий условию

$$x_* \in \{N_c[F(\alpha_*^{(0)})] \setminus N_c[F]_{\overline{\lambda}=\alpha_*^{(0)}}\}.$$

Каждой точке $(\alpha_*, \overline{\beta}_*)$, где $\overline{\beta}_* = (\beta_*^{(l-1)}, \ldots, \beta_*^{(0)})$, смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$, состоящей из $q$ параметров, соответствует ненулевой постоянный вектор $x_*$ (несколько векторов), удовлетворяющий условию

$$x_* \in \{N_c[F(\alpha_*, \overline{\beta}_*)] \setminus N_c[F(\overline{\lambda}, \overline{\beta}_*)]_{\overline{\lambda}=\alpha_*}\}.$$

Каждой точке $\widehat{\gamma}_* = (\widehat{\beta}_*^{(l)}, \beta_*^{(l-1)}, \dots, \beta_*^{(0)})$ смешанного спектра $\sigma_{r2}[F]$, число параметров которой меньше $q$, соответствует полиномиальный вектор $x_*^{(l)}$ (несколько полиномиальных векторов), удовлетворяющий условию:

$$x_*(\overline{\lambda}) \in \{N_c[F(\overline{\lambda}, \widehat{\gamma}_*)] \setminus N_c[F]_{\widehat{\gamma}_*}\},$$

где $N_c[F]_{\widehat{\gamma}_*}$ – значение правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F$ в точке $\widehat{\gamma}_*$.

## Литература


1. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
2. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
3. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 6. Спектральные характеристики полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 132–149.
4. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 89–107.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 5. Алгоритм $\nabla V$-$q$ факторизации и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 144–153.
6. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 10. Вычисление нулей скалярного полинома.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 119–130.
7. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 4. $AB$-алгоритм и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 127–143.



Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 11. Computing the regular spectrum of a polynomial matrix.

For a general multiparameter polynomial matrix $F(\overline{\lambda})$, solution of the equation $F(\overline{\lambda})x = 0$ at points of the finite spectrum of $F(\overline{\lambda})$ is considered. Points of the spectrum of $F(\overline{\lambda})$ are classified in terms of solutions of the determinantal system of nonlinear algebraic equations and also in terms of zeros of certain scalar polynomials (in particular, the characteristic polynomial of the matrix).

Algorithms for computing points of the finite regular spectrum of the matrix with the corresponding vectors are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

*E-mail*: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 7 мая 2007 г.