Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛИНОМА

Введение

Пусть $f(\bar\lambda)$, где $\bar\lambda = \mu_1, \dots, \mu_q$, есть скалярный полином от q переменных, $q > 1$, нули которого следует вычислить.

Способы определения нулей $f(\bar\lambda)$, описанные в классической литературе (см. , например, [1]), существенно используют представление $f(\bar\lambda)$ в виде произведения неприводимых полиномов в рассматриваемом числовом поле. К сожалению, автору неизвестны конструктивные способы вычисления такого представления.

В настоящей статье для вычисления нулей полинома $f(\bar\lambda)$ от нескольких переменных предлагается метод, основанный на представлении $f(\bar\lambda)$ в виде произведения примитивных полиномов. Алгоритм вычисления такого представления основан на так называемой относительной факторизации полинома [2].

Статья состоит из двух параграфов. В §1 приводится алгоритм относительной факторизации полинома, классификация нулей полинома и метод вычисления некоторых из них. В §2 рассматривается применение метода к вычислению $(q-1)$-мерных решений системы нелинейных алгебраических уравнений от q неизвестных.

§1. Классификация нулей полинома и алгоритм их вычисления

1.1. Относительная факторизация полиномов

Пусть $f := f(\mu_1, \dots, \mu_q) = f(\bar\lambda)$ есть полином[1] от q переменных $(q > 1)$. Относительной факторизацией f называются равенства

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00945).

[1]Здесь и ниже $f(\bar\lambda)$ есть разложимый (приводимый) полином; мультипараметром $\bar\lambda$ обозначены переменные, от которых зависит рассматриваемый полином.

вида

$$f(\mu_1, \dots, \mu_q) = \prod_{k=0}^{q-1} \prod_{1 \leqslant i, < \dots < i_{q-k} \leqslant q} f_{i_1 \dots i_{q-k}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{q-k}})$$
$$= g^{(q)} g^{(q-1)} \cdots g^{(2)} \prod_{i=1}^{q} f_i(\mu_i); \tag{1.1}$$

$$f(\mu_1, \dots, \mu_q) = g^{(q)} g^{(q-1)} \cdots g^{(q-r)}, \quad r \geqslant q-2. \tag{1.2}$$

Здесь

$$g^{(q-k)} := \prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{q-k} \leqslant q} f_{i_1, \dots, i_{q-k}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{q-k}}), \quad k = 0, 1, \dots, q-2.$$

Каждый полином $f_{i_1, \dots, i_{q-k}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{q-k}})$ является примитивным над кольцом полиномов от любого нетривиального подмножества переменных $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{q-k}}$ из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$. Каждый из полиномов $g^{(q-k)}(\bar{\lambda})$ есть произведение неприводимых полиномов от одного и того же числа переменных $q-k$. Равенства (1.1), (1.2) будем также называть разложением полинома $f(\bar{\lambda})$ в произведение примитивных полиномов.

Представление $f(\bar{\lambda})$ в виде

$$f = \varphi[f] g[f], \quad \varphi[f] \neq \text{const}, \tag{1.3}$$

называется неполной относительной факторизацией (НОФ) полинома $f(\bar{\lambda})$ [4]. Здесь $g[f] = g(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $i \leqslant q-1$ переменных из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$; $\varphi[f]$ есть полином от q переменных, представленный в виде произведения полиномов от $q-1$ переменных, среди которых могут быть тривиальные полиномы, т.е. константы:

$$\varphi[f] = \prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{q-1} \leqslant q} f_{i_1, \dots, i_{q-1}}(\mu_{i_1, \dots,} \mu_{i_{q-1}}), \quad g[f] := g^{(q)}(\bar{\lambda}).$$

1.2. Алгоритм вычисления относительной факторизации[2]

[2] Алгоритм вычисления относительной факторизации представлен также в работе [3].

Алгоритм вычисления равенств (1.1), (1.2) состоит из конечного числа внешних и внутренних шагов. Результатом выполнения внешнего шага k, $k = 1, \dots, r-1 \leqslant q-1$, является полином $g^{(q-k+1)}$ и последовательность полиномов $\{f_{i_1,\dots,i_{q-k}}\}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{q-k} \leqslant q$, входящих в равенства (1.1), (1.2). Внутренние шаги для фиксированного внешнего шага k состоят в представлении каждого из полиномов $f_{i_1,\dots,i_{q-k}}$ в виде неполной относительной факторизации (1.3).

Начальными данными для первого внешнего шага ($k = 1$) является заданный полином $\varphi^0 = f(\mu_1, \dots, \mu_q)$. Результатом первого шага является неполная относительная факторизация полинома $\varphi^{(0)}$, т.е. равенство вида

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} p^{(1)}, \tag{1.4}$$

где $p^{(1)} = g^{(q)}$ есть полином от q переменных, входящий в равенства (1.1), (1.2), а $\varphi^{(1)}$ есть полином от q переменных, представленный в виде произведения полиномов от $q-1$ переменных, среди которых могут быть тривиальные полиномы:

$$\varphi^{(1)} = \prod_{r=1}^{q} f_{1,\dots,i-1,i+1,\dots,q}(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q).$$

Вычисление равенства (1.4) реализуется применением к полиному $\varphi^{(0)}$ алгоритма неполной относительной факторизации, согласно которому находится последовательность полиномов $\{\varphi_i^{(0)}\}$, $i = 1, \dots, q$, $\varphi_1^{(0)} := \varphi_0$. С этой целью последовательно для каждого $i = 1, \dots, q$ выполняются следующие операции.

$(1, i)$ Полином $\varphi_i^{(0)}$ записывается по степеням параметра $\lambda = \mu_i$:

$$\varphi_i^{(0)} = \sum_{k=0}^{s_i} b_k^{(i)} \lambda^k, \quad b_k^{(i)} = b_k^{(i)}(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q).$$

$(2, i)$ Вычисляется равенство

$$\varphi_i^{(0)} = \delta_i^{(0)} \varphi_{i1}^{(0)},$$

где $\delta_i^{(0)} = \delta_i^{(0)}(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q)$ есть наибольший общий делитель (НОД) последовательности полиномов $b_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots, s_1$.

Результатом первого внешнего шага являются:

– полином $g^{(q)}$, входящий в равенства (1.1), (1.2);

– последовательность полиномов

$$\delta_i^{(0)} := f_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,q}(\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\dots,\mu_q), \quad i=1,\dots,q,$$

которая принимается в качестве начальных данных для выполнения второго внешнего шага;

– представление полинома f в виде

$$f = g^{(q)} \prod_{1\leqslant i<\dots<i_{q-t}\leqslant q} f_{i_1,\dots,i_{q-t}}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_{q-t}}).$$

Рассмотрим реализацию второго (типичного) внешнего шага алгоритма.

К каждому нетривиальному полиному $\varphi^{(1,j)} := \delta_j^{(0)}$ применяется алгоритм НОФ, что соответствует выполнению одного из внутренних шагов.

Результатом выполнения j-го внутреннего шага будет разложение

$$\varphi^{(1,j)} = \varphi^{(2,j)} p^{(2,j)}.$$

Здесь $p^{(2,j)}$ есть полином от $q-1$ переменных; $\varphi^{(2,j)}$ – полином от $q-1$ переменных, представленный в виде произведения полиномов от $q-2$ переменных.

Результатом выполнения второго внешнего шага будут:

– полином $g^{(q-1)} = \prod\limits_{j=1}^{q-1} p^{(2,j)}$, входящий в равенства (1.1), (1.2);

– последовательность полиномов $\delta_i^{(1,j)}$, $i=1,\dots,q$, $j=1,\dots,q-1$, нетривиальные из которых принимаются в качестве начальных полиномов для реализации следующего внешнего шага;

– представление f в виде

$$f = g^{(q)} g^{(q-1)} \prod_{1\leqslant i_1<\dots<i_{q-2}\leqslant q} f_{i_1,\dots,i_{q-2}}(\mu_{i_1,\dots,\mu_{i_{q-2}}}).$$

Выполнение внешних шагов заканчивается на шаге $r \leqslant q-1$, когда каждый полином из последовательности полиномов, выбираемых в качестве начальных для реализации следующего $(r+1)$-го шага, будет неприводимым полиномом (или же произведением неприводимых полиномов).

В результате выполнения r внешних шагов будут получены следующие соотношения:

– равенство (1.1) при $r = q-1$, т.е. представление $f(\bar\lambda)$ в виде

$$f(\bar\lambda) = \prod_{k=1}^{q-1} g^{(q-k+1)} \prod_{i=1}^{q} f_i(\mu_i);$$

– равенство (1.2) при $r \geqslant q-2$, т.е. представление $f(\bar\lambda)$ в виде

$$f(\bar\lambda) = \prod_{k=1}^{r-1} g^{(q-k+1)} \prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{q-r}\leqslant q} f_{i_1,\dots,i_{q-r}}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_{q-r}})$$

$$= \prod_{k=0}^{r} g^{(q-k)},$$

где каждый из полиномов $f_{i_1,\dots,i_{q-r}}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_{q-r}})$ либо неприводим, либо является произведением неприводимых полиномов от одних и тех же переменных.

Справедливость свойств полиномов, входящих в (1.1) и (1.2), следует из способа их построения.

1.3. Классификация нулей полинома

Пусть $f(\bar\lambda) = f(\mu_1,\dots,\mu_q)$ есть скалярный полином от q переменных, $q>1$, представимый в виде относительной факторизации. Рассмотрим уравнение

$$f(\bar\lambda) = 0, \tag{1.5}$$

решения которого суть нули полинома $f(\bar\lambda)$. Будем различать полные и неполные нули $f(\bar\lambda)$.

Полным нулем $f(\bar\lambda)$ называется набор из q фиксированных параметров, составленный из одного или нескольких замкнутых неприводимых многообразий аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, на котором левая часть уравнения (1.5) обращается в нуль.

Пусть $f(\bar\lambda) = \varphi[f]\ g[f]$ есть неполная относительная факторизация полинома $f(\bar\lambda)$, так что $g[f]$ есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от любого числа i, $i<q$, переменных из множества $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_q\}$, $\varphi[f]$ – полином от q переменных, представленный в виде произведения полиномов от $q-1$ переменной.

Неполным нулем полинома $f(\bar\lambda)$ называется нуль полинома $\varphi[f]$, на котором равенство $g[f]=0$ является тождеством относительно некоторых переменых. Другими словами, неполным нулем полинома $f(\bar\lambda)$ называется набор из k, $k<q$, фиксированных параметров, составленный из замкнутых неприводимых многообразий аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, на которых полином $\varphi[f]$ обращается в нуль, а равенство $g[f]=0$ является тождеством.

Из сказанного с учетом равенств (1.1)–(1.3) следует справедливость следующих утверждений.

Каждый полный нуль полинома $f(\bar\lambda)$ является полным нулем полинома $g^{(q)}(\bar\lambda)\equiv g(\bar\lambda)$ и обратно: каждый полный нуль полинома $g(\lambda)$ является полным нулем полинома $f(\bar\lambda)$.

На каждом неполном нуле полинома $f(\bar\lambda)$ равенство $g(\bar\lambda)=0$ обращается в тождество.

Относительно неподвижной точкой полинома $f(\bar\lambda)$ называется многообразие γ_*, на котором оба равенства $f(\bar\lambda,\gamma_*)=0$ и $g(\bar\lambda,\gamma_*)=0$ являются тождествами относительно всех переменных, входящих в мультипараметр $\bar\lambda$.

Будем различать следующие типы нулей полинома $f(\bar\lambda)$: регулярные (собственные и смешанные) нули, сингулярные нули и относительно неподвижные точки. Тип нуля будем определять, используя представление $f(\bar\lambda)$ в виде произведения примитивных полиномов. С этой целью из равенств (1.1), (1.2) выделим следующие последовательности полиномов: последовательности вида

$$\begin{aligned}&f_{k+1}(\mu_{k+1}),\, f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}),\,\dots,\\ &\quad f_{k+1,k+2,\dots,q_1}(\mu_{k+1},\mu_{k+2},\dots,\mu_{q_1}),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $k\geqslant 0$, $2\leqslant q_1\leqslant q$; все полиномы

$$f_{k+1,k+2,\dots,q_1+t}(\mu_{k+1},\mu_{k+2},\dots,\mu_{q_1+t})=\mathrm{const}\quad\text{при}\quad t\geqslant 1;$$

и последовательности вида

$$\begin{aligned}&f_{l,l+1,\dots,k}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_k),\, f_{l,l+1,\dots,k+1}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_{k+1}),\,\dots,\\ &\quad f_{l,l+1,\dots,q_1}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_{q_1}),\quad\text{где}\quad l>1, q_1\leqslant q,\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$f_{l,l+1,\dots,q_1+t}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_{q_1+t})=\mathrm{const}\quad\text{при}\quad t\geqslant 1.$$

Учитывая возможность изменения нумерации переменных, рассмотрим следующие совместные системы нелинейных алгебраических уравнений:

система вида

$$f_1(\mu_1)=0,\ f_{1,2}(\mu_1,\mu_2)=0,\dots,f_{1,2,\dots,q}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_q)=0; \tag{1.8}$$

система вида

$$\begin{cases} f_{k+1}(\mu_{k+1})=0,\\ f_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2})=0,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ f_{k+1,k+2,\dots,q_1}(\mu_{k+1},\mu_{k+2},\dots,\mu_{q_1})=0, \end{cases} \tag{1.9}$$

рассматриваемая при $k=0$, $q_1<q$ и при $k>0$, $q_1\leqslant q$;

система вида

$$\begin{cases} f_{l,l+1,\dots,k}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_k)=0,\\ f_{l,l+1,\dots,k+1}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_{k+1})=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{l,l+1,\dots,q_1}(\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_{q_1})=0 \end{cases} \tag{1.10}$$

при $q_1\leqslant q$, $l>1$, $k>l$.

Каждое решение $\overline{\mu}_q$ системы (1.8) есть замкнутое неприводимое многообразие аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, состоящее из q фиксированных параметров: $\overline{\mu}_q=(\mu_{1*},\dots,\mu_{q*})$. Очевидно, $f(\overline{\mu}_q)=0$ и $g^{(q)}(\overline{\mu}_q)=0$. Решения системы (1.8) называются собственными регулярными нулями полинома $f(\bar{\lambda})$ от q переменных.

Каждое из решений системы (1.9) состоит из фиксированных параметров, число которых меньше q. Решения системы (1.9) порождают смешанные регулярные нули полинома $f(\bar{\lambda})$ от q переменных. Каждый смешанный регулярный нуль состоит из двух (или нескольких) многообразий. В зависимости от числа многообразий, входящих в смешанный нуль, будем различать смешанные нули по уровням. К смешанным регулярным нулям первого уровня полинома $f(\bar{\lambda})$ от q переменных относятся наборы $(\alpha_{*i}^{(1)},\beta_*^{(0)})$, составленные из двух многообразий: $\beta_*^{(0)}$ есть фиксированное решение системы (1.9), а многообразие $\alpha_{*i}^{(1)}$ есть собственный нуль полинома

$$f^{(1)}(\bar{\lambda}):=g^{(q)}(\bar{\lambda},\beta_*^{(0)})\equiv g[f^{(0)}],$$

где $g^{(q)}(\bar{\lambda})$ есть полином от q переменных, входящий в относительную факторизацию (1.1) для полинома $f^{(0)}=f(\bar{\lambda})$. Заметим, что $g^{(q)}(\bar\lambda) = g[f]$, где $g[f]$ – полином из неполной относительной факторизации (1.3) полинома $f(\bar\lambda)$.

Смешанные регулярные нули второго уровня полинома $f(\bar\lambda)$ суть наборы вида $(\alpha_*^{(2)}, \beta_*^{(1)}, \beta_*^{(0)})$, где $(\alpha_*^{(2)}, \beta_*^{(1)})$ есть смешанный регулярный нуль первого уровня полинома $f^{(1)}(\bar\lambda)$.

Аналогично, смешанный регулярный нуль уровня $l \geqslant 1$ для $f(\bar\lambda)$ определяется как набор $(\alpha_*^{(l+1)}, \beta_*^{(l)}, \dots, \beta_*^{(0)})$, где $(\alpha_*^{(l+1)}, \beta_*^{(l)})$ есть смешанный регулярный нуль первого уровня полинома $f^{(l+1)}(\bar\lambda) = g[f^{(l)}]$.

Вычисление сингулярных нулей полинома $f(\bar\lambda)$ от q переменных сводится к анализу решений системы вида (1.10), которая является недоопределенной (имеет число уравнений меньше числа неизвестных). Каждое решение системы (1.10) является замкнутым неприводимым многообразием $\overline{\mu}_{kl}$, зависящим от $k - l$ произвольно выбираемых параметров из множества $\{\mu_l, \mu_{l+1}, \dots, \mu_k\}$, $l > 1$.

1.4. Вычисление регулярных нулей полинома

Пусть $f(\bar\lambda)$ есть полином от q переменных, регулярные (собственные и смешанные) нули которого следует вычислить. Предлагаемый ниже метод состоит из конечного числа шагов. На каждом типичном шаге t, $t = 0, 1, \dots, r$, выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется полином $f^{(t)}(\bar\lambda)$ от u_t переменных, $u_0 = q$, $u_t < u_{t-1}$, $f^{(0)}(\bar\lambda) = f(\bar\lambda)$.

(2) Находится разложение полинома $f^{(t)}(\bar\lambda)$ в произведение примитивных полиномов:

$$f^{(t)}(\bar\lambda) = \prod_{k=0}^{u_t-1} \prod_{1\leqslant i_1<\dots<i_{u_t-k}} f^{(t)}_{i_1,\dots,i_{u_t-k}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{u_t-k}) \equiv \prod_{k=0}^{u_t-1} g^{(u_t-k)}. \tag{1.11}$$

Здесь

$$f^{(t)}_{i_1,\dots,i_{u_t-k}} := f_{i_1,\dots,i_{u_t-k}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{u_t-k})$$

есть полином от $u_t - k$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от любого нетривиального подмножества переменных из $\{\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{u_t-k}\} \subseteq \{\mu_1, \dots, \mu_q\}$.

Операция может быть реализована применением алгоритма относительной факторизации полинома из п. 1.2.

(3) Из факторизации (1.11) выделяется последовательность полиномов вида

$$f^{(t)}_{k+1}(\mu_{k+1}), f^{(t)}_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}),\dots, f^{(t)}_{k+1,\dots,q_1}(\mu_{k+1},\dots,\mu_{q_1}), \tag{1.12}$$

где $k \geqslant 0$, $q_1 \leqslant u_t$, $f^{(t)}_{k+1,\dots,q_1+s}(\mu_{k+1},\dots,\mu_{q_1+s}) = \mathrm{const}$ при $s \geqslant 1$.

(4) С использованием последовательности полиномов (1.12) формируются следующие системы нелинейных алгебраических уравнений: система вида

$$f^{(t)}_1(\mu_1) = 0, f^{(t)}_{1,2}(\mu_1,\mu_2) = 0,\dots, f^{(t)}_{1,2,\dots,u_t}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{u_t}) = 0 \tag{1.13}$$

и система вида

$$\begin{cases} f^{(t)}_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0, \\ f^{(t)}_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f^{(t)}_{k+1,\dots,q_1}(\mu_{k+1},\dots,\mu_{q_1}) = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

рассматриваемая при $k = 0$, $q_1 = u_t$ и при $k > 0$, $q_1 \leqslant u_t$.

Каждое решение системы (1.13) является замкнутым неприводимым многообразием, состоящим из u_t фиксированных параметров, образующих собственный нуль полинома $f^{(t)}(\bar\lambda)$ от u_t переменных. Обозначим фиксированное решение системы (1.13) через $\alpha^{(t)}_*$. Множество всех решений (1.13) при $t = 0$ образует множество всех искомых собственных нулей полинома $f^{(0)}(\bar\lambda) = f(\bar\lambda)$ от q переменных.

Каждое решение системы (1.14) является замкнутым неприводимым многообразием, состоящим из $u_t - q_1$, $q_1 \leqslant u_t$, фиксированных параметров, которые порождают смешанный нуль полинома $f^{(t)}(\bar\lambda)$. Обозначим фиксированное решение системы (1.14) через $\beta^{(t)}_*$.

Для формирования смешанных нулей первого уровня полинома $f^{(t)}(\bar\lambda)$, порожденных многообразием $\beta^{(t)}_*$, следует выполнить следующие операции.

(4$*$) Вычислить полином $f^{(t+1)}(\bar\lambda) := f^{(t)}(\bar\lambda, \beta^{(t)}_*)$ от u_{t+1} переменных.

(5$*$) Найти собственные нули $\alpha^{(t+1)}_i$, $i = 1,\dots,i_*$, полинома $f^{(t+1)}(\bar\lambda)$ и многообразия $\beta^{(t+1)}_j$, $j = 1,\dots,j_*$, порожденные решениями систем вида (1.14) для полинома $f^{(t+1)}(\bar\lambda)$. С этой целью следует выполнить операции (1), (2) для полинома $f^{(t+1)}(\bar\lambda)$.

(6$*$) Образовать наборы $\gamma_{i*}^{(t+1)} := (\alpha_i^{(t+1)}, \beta_*^{(t)})$, $i = 1, \dots, i_*$, состоящие из u_t фиксированных параметров. Каждый из наборов $\gamma_{i*}^{(t+1)}$ является смешанным нулем для полинома $f^{(t+1)}(\bar\lambda)$, так что $f^{(t+1)}(\bar\lambda, \gamma_{i*}^{(t+1)}) = 0$. Учитывая, что, по построению, $f^{(t+1)}(\bar\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$f^{(t+1)}(\bar\lambda) = f^{(t)}(\bar\lambda, \beta_*^{(t)}) = \cdots = f^{(0)}(\bar\lambda, \beta_*^{(t)}, \beta_*^{(t-1)}, \dots, \beta_*^{(0)}),$$

получим

$$f(\alpha_*^{(t+1)}, \beta_*^{(t)}, \dots, \beta_*^{(0)}) = f^{(t+1)}(\alpha_*^{(t+1)}, \beta_*^{(t)}) = 0,$$

т.е. каждый набор параметров $\gamma_{i*}^{(t+1)}$ является смешанным полным нулем полинома $f(\bar\lambda)$ от q переменных.

Процесс формирования смешанных нулей полинома $f(\bar\lambda)$, порожденных многообразием $\beta_*^{(0)}$, заканчивается на шаге $r+1$, когда $f^{(r+1)}(\bar\lambda)$ не будет иметь собственных нулей. Объединение всех наборов $\gamma_{ij}^{(t+1)}$, $i = 1, \dots, i_*$, $j = 1, \dots, j_*$, $t = 0, 1, \dots, r-1$, образует множество всех смешанных полных нулей полинома $f(\bar\lambda)$ от q переменных. Наборы $\gamma_{ij}^{(t+1)}$ для фиксированного t, $t = 0, 1, \dots, r-1$, являются смешанными нулями[3] уровня $t+1$ для полинома $f(\bar\lambda)$.

Параллельно вычислению полных смешанных нулей полинома $f(\bar\lambda)$ находятся его неполные нули. Неполные смешанные нули порождаются теми решениями $\hat\beta_*^{(t)} := \beta_*^{(t)}$ системы (1.14) при $k = 0$, $q_1 = u_t$ для полинома $f^{(t)}(\bar\lambda)$, на которых полином $f^{(t+1)}(\bar\lambda) = f^{(t)}(\bar\lambda, \beta_*^{(t)})$ не имеет собственных нулей. При этом на каждом неполном смешанном нуле $\hat\gamma_*^{(t+1)} = (\hat\beta_*^{(t)}, \beta_*^{(t-1)}, \dots, \beta_*^{(0)})$ полином $f(\bar\lambda)$ обращается в нуль, а равенство $g^{(q)}(\bar\lambda) = 0$ является тождеством.

В случае неподвижной точки $\zeta_*^{(t+1)} = (\beta_*^{(t)}, \dots, \beta_*^{(0)})$ оба равенства $f(\bar\lambda, \xi_*^{(t+1)}) = 0$, $g^{(q)}(\bar\lambda, \xi_*^{(t+1)}) = 0$ являются тождествами относительно всех переменных, входящих в мультипараметр $\bar\lambda$.

[3] Для полинома f, зависящего от двух переменных ($q = 2$), собственные и полные смешанные регулярные нули совпадают.

§2. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений

Пусть
$$p_k(\bar{\lambda}) = p_k(\mu_1, \dots, \mu_q) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$
есть система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) от q неизвестных. Решением системы (2.1) будем называть объединение всех общих нулей полиномов $p_k(\bar{\lambda})$, $k = 1, \dots, n$.

Рассмотрим применение алгоритма вычисления регулярных нулей скалярных полиномов из §1 к решению системы (2.1). С этой целью СНАУ (2.1) запишем в виде следующих трех систем уравнений:
$$f(\bar{\lambda}) = 0; \tag{2.2}$$
$$Z(\bar{\lambda}) = (z_1(\bar{\lambda}), \dots, z_n(\bar{\lambda}))^T = 0; \tag{2.3}$$
$$\begin{cases} f(\bar{\lambda}) = 0, \\ Z(\bar{\lambda}) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$
Здесь $f(\bar{\lambda})$ есть наибольший общий делитель последовательности полиномов $p_k(\bar{\lambda})$, $k = 1, \dots, n$. Система (2.3) состоит из взаимно простых полиномов $z_k(\bar{\lambda}) = \frac{P_k(\bar{\lambda})}{f(\bar{\lambda})}$, $k = 1, \dots, n$. Нули полинома $f(\bar{\lambda})$ образуют многообразия из аффинного пространства, принадлежащие $(q-1)$-мерным решениям системы (2.1). Решения системы (2.3) образуют многообразия, принадлежащие $(q-k)$-мерным решениям системы (2.1), $k > 1$. Нули системы (2.4) образуют многообразия, общие для $(q-1)$-мерных и $(q-k)$-мерных решений системы (2.1).

Для вычисления многообразий, принадлежащих $(q-1)$-мерным решениям системы (2.1), выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется полином $f(\bar{\lambda})$. С этой целью к q-параметрической полиномиальной $1 \times n$ матрице $F(\bar{\lambda}) = [p_1(\bar{\lambda}), \dots, p_n(\bar{\lambda})]$ применяется алгоритм ∇V-q факторизации [5], т.е. находится равенство вида
$$F(\bar{\lambda}) = \nabla(\bar{\lambda}) V(\bar{\lambda}), \tag{2.5}$$
где $\nabla(\bar{\lambda}) = f(\bar{\lambda})$; $V(\bar{\lambda}) := [z_1(\bar{\lambda}), \dots, z_n(\bar{\lambda})]$.

(2) Находятся нули полинома $f(\bar{\lambda})$, для чего используется алгоритм из п. 1.4.

В результате будут найдены регулярные (собственные и смешанные) нули, решающие задачу вычисления многообразий, принадлежащих $(q-1)$-мерным решениям системы (2.1).

Замечания. Вычисление решений систем (2.3) и (2.4) может быть сведено к вычислению нулей скалярных полиномов. Решения СНАУ (2.3) принадлежат нулям скалярного полинома

$$Z^T(\bar{\lambda})Z(\bar{\lambda}) := \sum_{i=1}^{n} z_i^2(\bar{\lambda}).$$

Решения системы (2.4) принадлежат общим нулям скалярных полиномов $f(\bar{\lambda})$ и $\sum z_i^2(\bar{\lambda})$, т.е. решению системы

$$\begin{cases} f(\bar{\lambda}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} z_i^2(\bar{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Б. Л. Ван-дер Варден, *Алгебра*. Наука, М., 1976.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **36**, No. 8 (1996), 6–13.
3. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
4. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры* 2. *Метод неполной относительной факторизации и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 89–107.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры.* 5. *Алгоритм* ∇V-q *факторизации и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 144–153.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 10. Computing zeros of a scalar polynomial.

The paper considers the problem of computing zeros of scalar polynomials in several variables. The zeros of a polynomial are subdivided into the regular (eigen- and mixed) zeros and the singular ones. An algorithm for computing regular zeros, based on a decomposition of a given polynomial into a product of primitive polynomials, is suggested. The algorithm is applied to solving systems of nonlinear algebraic equations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: verakub.@pdmi.ras.ru

Поступило 16 мая 2007 г.