Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ УЛУЧШЕНИИ ОЦЕНОК ЧИСТЯКОВА ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Введение и предварительные сведения

Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $m \geqslant 1$. Пусть

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \tag{1.1}$$

– разбиение множества $\langle m \rangle = \{1, \ldots, m\}$ в объединение непересекающихся непустых подмножеств. Определим неотрицательные $n \times n$ матрицы

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij}), \quad \hat{a}_{ij} = \max_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

и

$$\check{A} = (\check{a}_{ij}), \quad \check{a}_{ij} = \min_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В этих обозначениях перроновский корень матрицы A удовлетворяет следующим оценкам.

Теорема 1.1 [4, 1]. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрицы порядка $m \geqslant 1$ и пусть фиксировано разбиение (1.1) индексного множества на непересекающиеся непустые подмножества. Если неотрицательные матрицы B и C порядка n удовлетворяют условиям*

$$B \geqslant \hat{A}, \quad C \leqslant \check{A}, \tag{1.4}$$

то для перроновского корня матрицы A справедливы двусторонние оценки

$$\rho(C) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{1.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то правое неравенство в (1.5) является равенством тогда и только тогда, когда

$$B = \hat{A} = \check{A}, \tag{1.6}$$

и левое неравенство в (1.5) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$C = \check{A} = \hat{A}. \tag{1.7}$$

В частности, любое из неравенств

$$\rho(\check{A}) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\hat{A}) \tag{1.8}$$

является равенством тогда и только тогда, когда $\hat{A} = \check{A}$; *в противном случае оба неравенства в* (1.8) *являются строгими.*

Напомним, что неравенства (1.5) представляют собой основной результат работы Чистякова [4], а утверждения, относящиеся к случаю равенств, были установлены а статье [1].

При $n = 1$ теорема 1.1 сводится к следующему классическому результату, принадлежащему Фробениусу.

Теорема 1.2. *Пусть* A – *неотрицательная матрица порядка* $m \geqslant 1$. *Тогда ее перроновский корень удовлетворяет двусторонним оценкам*

$$\min_{i\in\langle m\rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle m\rangle} r_i(A), \tag{1.9}$$

где

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то любое из неравенств в* (1.9) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\min_{i\in\langle m\rangle} r_i(A) = \max_{i\in\langle m\rangle} r_i(A). \tag{1.10}$$

Нам также понадобятся следующие хорошо известные свойства перроновского корня.

Теорема 1.3 (см., напр., [5, глава 2, теорема 1.11]). *Пусть* A – *неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 1$. *Если для некоторого неотрицательного вектора* $x \neq 0$ *выполнено неравенство*

$$Ax \geqslant \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{1.11}$$

то

$$\rho(A) \geqslant \alpha, \tag{1.12}$$

а если для положительного вектора x выполнено неравенство

$$Ax \leqslant \beta x, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \geqslant 0, \tag{1.13}$$

то

$$\rho(A) \leqslant \beta. \tag{1.14}$$

Кроме того, если матрица A неприводима и неравенство (1.11) *(неравенство* (1.13)*) справедливо для неотрицательного вектора $x \neq 0$, то неравенство* (1.12) *(неравенство* (1.14)*) является равенством тогда и только тогда, когда неравенство* (1.11) *(неравенство* (1.13)*) является равенством.*

Теорема 1.4 (см., напр., [5, глава 2, следствие 1.5]). *Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядка $n \geqslant 1$. Если $A \leqslant B$, то для перроновских корней A и B справедливо неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{1.15}$$

Кроме того, если матрица B неприводима и $A \neq B$, то неравенство (1.15) *является строгим.*

В §2 настоящей работы мы предлагаем новые двусторонние оценки для перроновского корня, которые формулируются в терминах некоторого набора, состоящего из $m_1 \times \cdots \times m_n$, где $m_i = |M_i|$, $i = 1, \ldots, n$, агрегированных $n \times n$ матриц, ассоциированных с фиксированным блочным $n \times n$, $1 \leqslant n \leqslant m$, разбиением заданной неотрицательной матрицы A порядка m. Пусть A представлена в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

где

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

– разбиение индексного множества на непересекающиеся непустые подмножества, а

$$A_{ij} = A[M_i, M_j], \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

– подматрицы матрицы A, соответствующие строчным индексам из M_i и столбцовым индексам из M_j. Определим $n \times n$ матрицы

$$A^{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & r_{i_1}(A_{12}) & \ldots & r_{i_1}(A_{1n}) \\ r_{i_2}(A_{21}) & r_{i_2}(A_{22}) & \ldots & r_{i_2}(A_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i_n}(A_{n1}) & r_{i_n}(A_{n2}) & \ldots & r_{i_n}(A_{nn}) \end{bmatrix}, \qquad (1.17)$$
$$i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $r_{i_k}(A_{kj})$ обозначает соответствующую строчную сумму A_{kj}.

Тогда (см. теорему 2.1) перроновский корень матрицы A удовлетворяет оценкам

$$\min_{i_1,\ldots,i_n} \rho(A^{(i_1,i_2,\ldots,i_n)}) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \rho(A^{(i_1,i_2,\ldots,i_n)}). \qquad (1.18)$$

Кроме того, мы показываем, что оценки (1.18) улучшают как оценки Фробениуса (1.9), так и более общие оценки Чистякова (1.8). Также мы показываем, что оценки (1.18) могут разве лишь улучшаться при переходе от заданного разбиения индексного множества к более мелкому (необходимые определения введены в §2); другими словами, оценки (1.18) монотонны относительно блочных разбиений.

В §3 верхняя оценка из (1.18) используется для вывода условий, достаточных для того, чтобы удовлетворяющая им комплексная матрица принадлежала классу невырожденных H-матриц. Эти условия, аннонсированные в работе [3], сформулированы в теореме 3.1.

В заключение этого вводного параграфа мы приводим список обозначений и соглашений, используемых на протяжении данной статьи.

• $\langle m \rangle = \{1, \ldots, m\}$, где m – натуральное число.

• $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ – единичный вектор.

• Матричные и векторные неравенства понимаются покомпонентно. Точнее говоря, для $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m, n \geqslant 1$, неравенство $A \geqslant B$ означает, что $a_{ij} \geqslant b_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

• Для $m \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ и непустых подмножеств $R \subseteq \langle m \rangle$ и $S \subseteq \langle n \rangle$ через $A[R, S]$ обозначается подматрица $(a_{ij})_{\substack{i\in R\\ j\in S}}$.

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ через

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

обозначаются строчные суммы элементов матрицы A.

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ через $|A|$ обозначается матрица $(|a_{ij}|)$, элементами которой являются модули элементов A.

§2. Двусторонние оценки для перроновского корня

В этом параграфе мы формулируем и доказываем основные результаты статьи, а именно теоремы 2.1 и 2.2, которые устанавливают двусторонние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы и их монотонность относительно блочных разбиений.

Сперва мы доказываем лемму, которая относится к весьма частному случаю, но служит ключом к общему результату.

Для заданной неотрицательной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 2$, введем в рассмотрение $(m-1)\times(m-1)$ матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, образуюшие набор агрегированных матриц, ассоциированных с блочным $(m-1)\times(m-1)$ разбиением A, соответствующим $M_1 = \{1, 2\}$, $M_i = \{i+1\}$, $i = 2, \ldots, m-1$:

$$A^{(1)} = A^{(1,3,\ldots,m)} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{31}+a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

$$A^{(2)} = A^{(2,3,\ldots,m)} = \begin{bmatrix} a_{21}+a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31}+a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка m, $m \geqslant 2$, пусть $x = (x_i)$ – правый перроновский вектор A и пусть матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ определены в соответствии с (2.1) и (2.2).*

Тогда

$$\min_{i=1,2} \rho(A^{(i)}) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i=1,2} \rho(A^{(i)}). \tag{2.3}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то любое из неравенств в (2.3) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$x_1 = x_2; \tag{2.4}$$

в противном случае оба неравенства в (2.3) *являются строгими.*

Доказательство. Предположим сперва, что матрица A неприводима. В этом случае, как хорошо известно, ее перроновский вектор x положителен. Не теряя общности, мы также предполагаем, что компоненты вектора x удовлетворяют условию

$$x_1 \geqslant x_2, \tag{2.5}$$

что может быть обеспечено перестановкой первых двух строк и столбцов матрицы A и приводит к тому, что матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ меняются местами.

Обозначим

$$u = (x_1, x_1, x_3, \ldots, x_m)^T. \tag{2.6}$$

В силу (2.5), мы имеем

$$u \geqslant x,$$

откуда следует, что

$$\rho(A)x = Ax \leqslant Au. \tag{2.7}$$

Ввиду (2.6) и (2.1), из (2.7) вытекает неравенство

$$A^{(1)}\hat{u} \geqslant \rho(A)\hat{u}, \tag{2.8}$$

где

$$\hat{u} = (x_1, x_3, \ldots, x_m)^T$$

– подвектор векторов x и u. Применяя теорему 1.3 к матрице $A^{(1)}$, из (2.8) мы выводим, что

$$\rho(A^{(1)}) \geqslant \rho(A),$$

откуда немедленно следует правое неравенство в (2.3).

Аналогично, обозначив

$$v = (x_2, x_2, x_3, \ldots, x_m)^T,$$

мы выводим

$$v \leqslant x,$$

$$\rho(A)x = Ax \geqslant Av,$$

$$A^{(2)}\hat{v} \leqslant \rho(A)\hat{v}, \tag{2.9}$$

где

$$\hat{v} = (x_2, x_3, \dots, x_m)^T.$$

По теореме 1.3, из (2.9) вытекает, что

$$\rho(A^{(2)}) \leqslant \rho(A),$$

откуда следует левое неравенство в (2.3).

Для того, чтобы перенести неравенства (2.3) на общий приводимый случай, достаточно рассмотреть матрицу A_ε, близкую к A, и использовать предельный переход.

Рассмотрим случаи равенства. Предположим, что матрица A неприводима и что

$$\rho(A^{(1)}) = \rho(A). \tag{2.10}$$

Если $y = (y_2, y_3, \dots, y_m)^T$ – неотрицательный правый перроновский вектор для матрицы $A^{(1)}$, то из (2.10) следует равенство

$$A^{(1)}y = \rho(A)y. \tag{2.11}$$

Обозначим $\tilde{y} = (y_2, y^T)^T$. Тогда, в силу (2.11), мы имеем

$$A\tilde{y} = A\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \rho(A)\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Пусть теперь $w = (w_i)_{i=1}^m$ – левый перроновский вектор матрицы A. Заметим, что w положителен, поскольку матрица A неприводима. Используя (2.12), мы выводим

$$w^T A\tilde{y} = (w^T A)\tilde{y} = \rho(A)w^T\tilde{y}$$

$$= w^T(A\tilde{y}) = \rho(A)[w^T\tilde{y} + w_2(\alpha - y_2)].$$

Отсюда следует, что $w_2(\alpha - y_2) = 0$, а так как $w_2 > 0$, то мы имеем $\alpha = y_2$. Следовательно, равенство (2.12) равносильно соотношению

$$A\tilde{y} = \rho(A)\tilde{y},$$

означающему, что $\tilde{y}$ есть правый перроновский вектор исходной матрицы A. Поскольку, в силу неприводимости A, ее правый перроновский вектор определен однозначно с точностью до положительного множителя, мы заключаем, что при некотором $\xi > 0$ имеет место равенство $x = \xi\tilde{y}$. Тем самым доказано, что $x_1 = x_2$.

Тот факт, что из равенства $\rho(A) = \rho(A^{(2)})$ также следует соотношение (2.4), устанавливается аналогично.

Наконец, если $x_1 = x_2$, то из равенства

$$Ax = \rho(A)x$$

мы получаем

$$A^{(i)}\hat{x} = \rho(A)\hat{x}, \quad i = 1, 2, \quad \text{где} \quad \hat{x} = (x_1, x_3, \ldots, x_m)^T,$$

откуда следует, что

$$\rho(A) = \rho(A^{(1)}) = \rho(A^{(2)}).$$

Лемма доказана полностью. □

При доказательстве леммы 2.1 нами попутно был установлен следующий результат.

Следствие 2.1. *Если в условиях леммы* 2.1 *матрица* A *неприводима, то неравенство* $\rho(A^{(1)}) > \rho(A^{(2)})$ *равносильно неравенству* $x_1 > x_2$.

Из приведенного доказательства второй части леммы 2.1 следует, что предположение о неприводимости матрицы A может быть ослаблено, и справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть* A – *неотрицательная матрица порядка* $m \geqslant 1$, *имеющая левый перроновский вектор* $w = (w_i)_{i=1}^m$ *такой, что* $w_1 w_2 > 0$. *Тогда любое из неравенств в* (2.3) *является равенством в том и только том случае, когда* A *имеет правый перроновский вектор* $x = (x_i)_{i=1}^m$ *такой, что* $x_1 = x_2$.

Переход от $m \times m$ матрицы A к паре $(m-1)\times(m-1)$ матриц $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, определенных в (2.1)–(2.2), будем называть агрегацией столбцов 1 и 2 матрицы A. Аналогично, результатом агрегации столбцов i и $i+1$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, являются матрицы

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i}+a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i}+a_{i,i+1} & a_{i,i+2} & \cdots & a_{i,m} \\ a_{i+2,1} & \cdots & a_{i+2,i-1} & a_{i+2,i}+a_{i+2,i+1} & a_{i+2,i+2} & \cdots & a_{i+2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i}+a_{m,i+1} & a_{m,i+2} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}$$

и

$$A^{(i+1)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i}+a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i}+a_{i-1,i+1} & a_{i-1,i+2} & \cdots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i-1} & a_{i+1,i}+a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i}+a_{m,i+1} & a_{m,i+2} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}.$$

Следующая лемма легко следует из определения (1.17) агрегированных матриц $A^{(i_1,i_2,\ldots,i_n)}$ и из только что введенного определения агрегации двух последовательных столбцов.

Лемма 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 2$, – неотрицательная матрица, представленная в блочном виде*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{ij} = A[M_i, M_j], \quad i,j = 1,\ldots,n;$$

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m.$$

Тогда каждая из ассоциированных с ней агрегированных матриц

$$A^{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & r_{i_1}(A_{12}) & \ldots & r_{i_1}(A_{1n}) \\ r_{i_2}(A_{21}) & r_{i_2}(A_{22}) & \ldots & r_{i_2}(A_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i_n}(A_{n1}) & r_{i_n}(A_{n2}) & \ldots & r_{i_n}(A_{nn}) \end{bmatrix},$$

$$i_k \in M_k, \quad k = 1,\ldots,n,$$

может быть получена из A последовательной агрегацией пар соседних столбцов.

Из лемм 2.1 и 2.2 немедленно вытекает следующая теорема, представляющая собой первый основной результат этой работы.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 2$, – неотрицательная матрица, представленная в виде*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (2.13)$$

где $A_{ij} = A[M_i, M_j]$, $i, j = 1, \dots, n$, *и* $\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *– разбиение индексного множества на непересекающиеся непустые подмножества.*

Тогда

$$\min \rho(A^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}) \leqslant \rho(A) \leqslant \max \rho(A^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}), \qquad (2.14)$$

где минимум и максимум берутся по всем $i_k \in M_k$, $k = 1, \dots, n$.

Кроме того, если матрицы A *неприводима, то любое из неравенств в* (2.14) *является равенством тогда и только тогда, когда правый перроновский вектор* $x = (x_i)_{i=1}^{m}$ *матрицы* A *удовлетворяет условиям*

$$x_{i_k} = c_k \quad \text{для всех} \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \dots, n. \qquad (2.15)$$

В противном случае оба неравенства в (2.14) *являются строгими.*

Из лемм 2.1 и 2.2 также следует, что для взаимосвязанных блочных разбиений неотрицательной матрицы A оценки для $\rho(A)$, даваемые теоремой 2.1, поддаются сравнению. Точнее, мы будем говорить, что разбиение

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \qquad (2.16)$$

множества $\langle m \rangle$ на непересекающиеся непустые подмножества *мельче*, чем разбиение

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n'} M'_i \qquad (2.17)$$

(а разбиение (2.17) *грубее*, чем разбиение (2.16)) если $n > n'$ и каждое подмножество M'_i, $i = 1, \dots, n'$, является объединением некоторых подмножеств M_i, $i = 1, \dots, n$.

В этой терминологии мы имеем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m \geqslant 2$, *– неотрицательная матрица. Если* (2.16) *и* (2.17) *– это разбиения индексного множества* $\langle m \rangle$, *причем разбиение* (2.16) *мельче, чем разбиение* (2.17), *то имеют место неравенства*

$$\min_{i'_1, \dots, i'_{n'}} \rho(A^{(i'_1, \dots, i'_{n'})}) \leqslant \min_{i_1, \dots, i_n} \rho(A^{(i_1, \dots, i_n)}) \leqslant \rho(A) \qquad (2.18)$$

и

$$\rho(A) \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \rho(A^{(i_1,\ldots,i_n)}) \leqslant \max_{i'_1,\ldots,i'_{n'}} \rho(A^{(i'_1,\ldots,i'_{n'})}), \tag{2.19}$$

где минимум и максимум берутся по всем $i'_k \in M'_k$, $k = 1, \ldots, n'$, *и по всем* $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо как левое неравенство в (2.18), *так и правое неравенство в* (2.19) *являются равенствами, либо оба они выполняются строго.*

Заметим, что в том крайнем случае, когда $n' = 1$, тривиальное разбиение $\langle m\rangle = M'_1$ является, очевидно, более грубым, чем любое разбиение (2.16), для которого $n \geqslant 2$. Следовательно, по теорем 2.2, мы имеем

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} r_i(A) \leqslant \min_{i_1,\ldots,i_n} \rho(A^{(i_1,\ldots,i_n)}) \leqslant \rho(A)$$
$$\leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \rho(A^{(i_1,\ldots,i_n)}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} r_i(A). \tag{2.20}$$

Таким образом, теорема 2.1 дает улучшение теоремы Фробениуса 1.2.

С другой стороны, очевидно, что для всех $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, справедливы неравенства

$$\breve{A} \leqslant A^{(i_1,\ldots,i_n)} \leqslant \hat{A},$$

где матрицы $\breve{A}$ и $\hat{A}$ определены в соответствии с (1.2) и (1.3). Следовательно, по свойству монотонности перроновского корня, см. теорему 1.4, мы получаем

$$\rho(\breve{A}) \leqslant \rho(A^{(i_1,\ldots,i_n)}) \leqslant \rho(\hat{A}), \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Тем самым показано, что для любого фиксированного разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ индексного множества оценки теоремы 2.1, по крайней мере, не хуже, чем оценки Чистякова (1.8).

§3. Условия невырожденности

В этом параграфе, основываясь на верхней оценке теоремы 2.1, мы выводим условия, достаточные для того, чтобы заданная матрица принадлежала классу невырожденных H-матриц.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, – заданная матрица. При фиксированном разбиении

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества представим матрицу A в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{ij} = A[M_i, M_j], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

По определению, A является невырожденной H-матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения

$$\mathfrak{M}(A) = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной M-матрицей.

В соответствии с определением (1.17) (рассматриваемым в контексте вещественных матриц), положим

$$\mathfrak{M}(A)^{(i_1,i_2,\dots,i_n)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(\mathfrak{M}(A_{11})) & -r_{i_1}(|A_{12}|) & \dots & -r_{i_1}(|A_{1n}|) \\ -r_{i_2}(|A_{21}|) & r_{i_2}(\mathfrak{M}(A_{22})) & \dots & -r_{i_2}(|A_{2n}|) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_{i_n}(|A_{n1}|) & -r_{i_n}(|A_{n2}|) & \dots & r_{i_n}(\mathfrak{M}(A_{nn})) \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$
$$i_k \in M_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

и введем обозначения

$$p_{i_k}(A_{kk}) = r_{i_k}(\mathfrak{M}(A_{kk})), \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Новые достаточные условия принадлежности A классу невырожденных H-матриц представлены в следующей теореме, анонсированной в работе [3].

Теорема 3.1. *Если во введенных выше обозначениях все матрицы* $\mathfrak{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_n)}$, *где* $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, *являются невырожденными* M*-матрицами, то* A *является невырожденной* H*-матрицей.*

Доказательство. Поскольку все матрицы (3.1) являются невырожденными M-матрицами, их диагональные элементы положительны, т.е.

$$p_{i_k}(A_{kk}) > 0, \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Это означает, что все диагональные блоки A_{kk}, $k = 1, \ldots, n$, матрицы A имеют строгое диагональное преобладание. Следовательно, все матрицы A_{kk} являются невырожденными H-матрицами, а все матрицы $\mathfrak{M}(A_{kk})$ – невырожденными M-матрицами.

Рассмотрим регулярное блочное расщепление Якоби матрицы $\mathfrak{M}(A)$:

$$\mathfrak{M}(A) = \Delta - P, \tag{3.3}$$

где через

$$\Delta = \mathrm{Diag}\,(\mathfrak{M}(A_{11}), \ldots, \mathfrak{M}(A_{nn})) \tag{3.4}$$

обозначена блочно диагональная часть $\mathfrak{M}(A)$. Как хорошо известно (см., напр., [5, глава 6, теорема 2.3]), Z-матрица $\mathfrak{M}(A)$ является невырожденной M-матрицей тогда и только тогда, когда

$$\rho(P\Delta^{-1}) < 1. \tag{3.5}$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство (3.5).

Определим (точечную) диагональную матрицу

$$D = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_m) = \mathrm{Diag}\,(D_1, \ldots, D_n)$$

порядка m с помощью соотношения

$$De^{(m)} = \Delta e^{(m)}, \tag{3.6}$$

так что

$$d_{i_k} = p_{i_k}(A_{kk}), \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и рассмотрим неотрицательную матрицу

$$R = D^{-1} P \Delta^{-1} D, \tag{3.7}$$

диагонально сопряженную с матрицей $P\Delta^{-1}$.

В блочных обозначениях мы имеем

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ D_i^{-1} P_{ij} \Delta_j^{-1} D_j, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Применяя теорему 2.1 к матрице R и используя соотношения

$$\begin{aligned}(R_{kj} e)_{i_k} &= ((D_k^{-1} P_{kj} \Delta_j^{-1} D_j) e)_{i_k} = (D_k^{-1} P_{kj} e)_{i_k} \\ &= r_{i_k}(|A_{kj}|)/p_{i_k}(A_{kk}), \quad j \neq k, \quad i_k \in M_k,\end{aligned}$$

вытекающие из (3.7), (3.6) и (3.3), мы получаем, что

$$\begin{aligned}\rho(P\Delta^{-1}) &= \rho(D^{-1} P \Delta^{-1} D) \\ &\leqslant \max_{i_1, \dots, i_n} \rho \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{r_{i_1}(|A_{12}|)}{p_{i_1}(A_{11})} & \dots & \frac{r_{i_1}(|A_{1n}|)}{p_{i_1}(A_{11})} \\ \frac{r_{i_2}(|A_{21}|)}{p_{i_2}(A_{22})} & 0 & \dots & \frac{r_{i_2}(|A_{2n}|)}{p_{i_2}(A_{22})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{i_n}(|A_{n1}|)}{p_{i_n}(A_{nn})} & \frac{r_{i_n}(|A_{n2}|)}{p_{i_n}(A_{nn})} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \max_{i_1, \dots, i_n} \rho([D^{(i_1, \dots, i_n)}]^{-1} P^{(i_1, \dots, i_n)}), \qquad (3.8)\end{aligned}$$

где матрицы $D^{(i_1, \dots, i_n)}$ и $P^{(i_1, \dots, i_n)}$ определены в соответствии с (1.17).

Поскольку для всех $(i_1, \dots, i_n)$

$$\mathfrak{M}(A)^{(i_1, \dots, i_n)} = D^{(i_1, \dots, i_n)} - P^{(i_1, \dots, i_n)}$$

– это регулярные (точечные) расщепления Якоби невырожденных M-матриц $\mathfrak{M}(A)^{(i_1, \dots, i_n)}$, мы имеем (см. напр., [5, глава 6, теорема 2.3]):

$$\rho([D^{(i_1, \dots, i_n)}]^{-1} P^{(i_1, \dots, i_n)}) < 1 \quad \text{для всех} \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ввиду (3.8), отсюда следует справедливость неравенства (3.5), что и завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что при $n = m$ теорема 3.1 сводится к утверждению, что A является невырожденной H-матрицей, если $\mathfrak{M}(A)$ – невырожденная M-матрица, которое справедливо по определению невырожденных H-матриц. В противоположном крайнем случае $n = 1$ теорема 3.1 сводится к хорошо известному утверждению, что матрица, имеющая строгое диагональное преобладание, является невырожденной H-матрицей. В случае же $1 < n < m$ теорема 3.1

дает нетривиальный набор Z-матриц меньшего порядка, который можно рассматривать как набор матриц сравнения.

Наконец, в блочном 2×2 случае ($n = 2$), мы имеем:

$$\mathfrak{M}(A)^{(i_1,i_2)} = \begin{bmatrix} p_{i_1}(A_{11}) & -r_{i_1}(|A_{12}|) \\ -r_{i_2}(|A_{21}|) & p_{i_2}(A_{22}) \end{bmatrix}, \quad i_1 \in M_1, \quad i_2 \in M_2.$$

При этом (см., напр., [5, глава 6, теорема 2.3]) $\mathfrak{M}(A)^{(i_1,i_2)}$ является невырожденной M-матрицей тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны, т.е. выполнены условия

$$p_{i_1}(A_{11}) > 0, \quad p_{i_2}(A_{22}) > 0,$$

и

$$p_{i_1}(A_{11}) p_{i_2}(A_{22}) > r_{i_1}(|A_{12}|) r_{i_2}(|A_{21}|).$$

Поэтому при $n = 2$ класс матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1, совпадает с классом матриц, введенным в работе [7] и исследованным в работах [6, 2, 3] (см. также [8]).

Литература

1. Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина, *Обобщенное свойство монотонности перроновского корня.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 13–29.
2. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
4. В. П. Чистяков, *К оценке перронова корня неотрицательных матриц.* — Докл. АН СССР **246** (1979), 548–550.
5. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
6. L. Cvetković, V. Kostić, R. S. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set.* — Electr. Trans. Numer. Anal. **18** (2004), 73–80.
7. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **268** (1992), 257–268.
8. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Improving Chistyakov's bounds for the Perron root of a nonnegative matrix.

The paper presents new two-sided bounds for the Perron root of a block-partitioned nonnegative matrix, improving Chistyakov's bounds. The equality cases are analyzed. As an application, new conditions sufficient for a complex matrix to be a nonsingular H-matrix are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 19 ноября 2007 г.