Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ОБРАТНЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ H-МАТРИЦ

§1. Введение

В этой работе главным образом рассматривается класс матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, которые могут быть представлены в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$, $n_2 = n - n_1$, и удовлетворяют условиям

$$p_k(A) > 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

и

$$p_i(A)\, p_j(A) > \bar{r}_i(A)\, \bar{r}_j(A), \qquad \text{для всех } 1 \leqslant i \leqslant n_1 \text{ и } n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения:

$$\bar{r}(A) = (\bar{r}_i(A)) = \begin{bmatrix} \bar{r}^{(1)}(A) \\ \bar{r}^{(2)}(A) \end{bmatrix},$$

$$\bar{r}^{(1)}(A) = |A_{12}|\, e^{(2)}, \quad \bar{r}^{(2)}(A) = |A_{21}|\, e^{(1)},$$

где $e^{(i)} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, – это единичные векторы;

$$p(A) = (p_i(A)) = \begin{bmatrix} p^{(1)}(A) \\ p^{(2)}(A) \end{bmatrix},$$

$$p_i(A) = |a_{ii}| - r'_i(A_{11}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,$$

$$p_j(A) = |a_{jj}| - r'_{j-n_1}(A_{22}), \quad n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n;$$

и для матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, через

$$r'_k(B) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} |b_{ki}|, \quad k = 1, \dots, m,$$

обозначаются ее усеченные абсолютные строчные суммы.

Заметим, что в случае $n_1 = n$, т.е. при $A = A_{11}$, условия (1.2) сводятся к условиям диагонального преобладания в A, а условия (1.3) исчезают.

Заметим также, что для нетривиального блочного разбиения, т.е. при $n_2 = n - n_1 > 0$, условия (1.2) допускают ослабление несколькими способами, см. [1]. В частности, в предположении, что выполнены условия (1.3), условия (1.2) равносильны каждой из следующих групп условий:

(a) $p_i(A) > 0,\ i = 1, \dots, n_1$;

(b) $p_j(A) > 0,\ j = n_1 + 1, \dots, n$;

(c) $p_k(A) > 0$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n$;

(d) множество

$$J(A) = \{i:\ |a_{ii}| > r'_i(A),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

непусто, т.е. у матрицы A имеется хотя бы одна строка со строгим диагональным преобладанием.

Рассматриваемый класс матриц был введен в работе [4] и рассматривался, например, в работах [3] и [1]. Следуя статье [1], мы будем называть этот класс классом матриц с псевдоблочным диагональным преобладанием (pbdd) и обозначать его через $PBDD(n_1, n_2)$. Класс всех pbdd-матриц порядка n будет обозначаться через $PBDD_n$.

Заметим, что определение класса $PBDD(n_1, n_2)$ допускает следующую естественную интерпретацию. Введем в рассмотрение матрицы

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} p_i(A) & -\bar{r}_i(A) \\ -\bar{r}_j(A) & p_j(A) \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.4}$$

Тогда условия (1.2) будут означать, что матрицы A_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n$, имеют положительные диагональные элементы, а условия (1.3) могут быть записаны в терминах определителей в виде

$$\det A_{ij} > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Таким образом, $A \in PBDD(n_1, n_2)$ тогда и только тогда, когда все матрицы A_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n$, являются невырожденными M-матрицами, что дает нам еще одну характеризацию рассматриваемого класса матриц.

Как известно (см., например, работы [4, 3, 1]), pbdd-матрицы образуют подкласс класса невырожденных H-матриц. В терминах матриц (1.4), этот результат можно сформулировать в виде следующей красивой теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Если все матрицы* (1.4) *являются невырожденными M-матрицами, то A является невырожденной H-матрицей.*

Следует также заметить, что для фиксированного $n \geqslant 2$ и произвольного n_1, $1 \leqslant n_1 \leqslant n$, любая матрица со строгим диагональным преобладанием (sdd-матрица) порядка n принадлежит классу $PBDD(n_1, n-n_1)$, что немедленно вытекает из следующего простого результата.

Лемма 1.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть для некоторого* $i \in \langle n \rangle$ *справедливо неравенство*

$$r_i'(A) < |a_{ii}|. \tag{1.5}$$

Тогда для любого блочного разбиения

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}, \quad 1 \leqslant n_1 < n,$$

матрицы A мы имеем $p_i(A) > 0$ и

$$\frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)} = \frac{\bar{r}_i(A)}{|a_{ii}| - r_i'(D_A)} \leqslant \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|}, \tag{1.6}$$

где через $D_A = \mathrm{Diag}(A_{11}, A_{22})$ *обозначена блочно диагональная часть A.*

Доказательство. Неравенство (1.6), которое можно записать в виде

$$\bar{r}_i(A)|a_{ii}| \leqslant r_i'(A)[|a_{ii}| - r_i'(A) + \bar{r}_i(A)],$$

равносильно соотношению

$$\bar{r}_i(A)[|a_{ii}| - r_i'(A)] \leqslant r_i'(A)[|a_{ii}| - r_i'(A)],$$

которое, очевидно, справедливо при условии, что $|a_{ii}| \geqslant r_i'(A)$. □

Матрицы со строгим диагональным преобладанием обладают рядом интересных свойств. В частности, их определители и обратные допускают оценки в терминах тех же самых $2n$ величин $|a_{ii}|$ и $r_i'(A)$, $i = 1, \dots, n$, в терминах которых определяется само понятие диагонального преобладания. Точнее говоря, для sdd-матрицы A справедливы неравенства

$$\prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| - r_i'(A)] \leqslant |\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| + r_i'(A)] \tag{1.7}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_{ii}| - r_i'(A)\}}. \tag{1.8}$$

Нижняя оценка в (1.7) принадлежит Островскому [10], а правая оценка, насколько нам известно, была предложена в работе [13]. Что же касается оценки (1.8), то, хотя ее можно проследить, по крайней мере, вплоть до работы Альберга и Нильсона [2], в литературе она часто приписывается Вараху [14].

Как хорошо известно, если A – невырожденная H-матрица, то существует диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ с положительными диагональными элементами такая, что матрица AD имеет строгое диагональное преобладание по строкам (см., например, [5, с. 124]). Следовательно, для произвольной невырожденной H-матрицы A справедливы оценки

$$\prod_{i=1}^{n}\left[|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\frac{d_j}{d_i}\right] \leqslant |\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left[|a_{ii}| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\frac{d_j}{d_i}\right] \tag{1.9}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_{ii}|d_i - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|d_j\}}, \tag{1.10}$$

которые следуют из оценок (1.7) и (1.8) соответственно. Заметим, что оценка (1.10) является тривиальным следствием из более общего результата Варги [15].

Однако, диагональная матрица D известна далеко не всегда, так что оценками (1.9) и (1.10) не всегда можно воспользоваться.

Поэтому естественно рассмотреть возможность получения вычислимых оценок для определителя и нормы обратной для конкретных подклассов класса невырожденных H-матриц.

Данная работа посвящена выводу оценок для определителя и $\|A^{-1}\|_\infty$ для класса pbdd-матриц. В §2 получены двусторонние оценки для $|\det A|$ и приведены следствия из них для некоторых подклассов класса $PBDD(n_1, n_2)$. Что же касается верхней оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$, то она была установлена в работе [8]. В §3 данной статьи мы напоминаем этот результат и даем его более естественное и короткое доказательство. Также мы приводим интерпретацию рассматриваемой оценки в терминах норм матриц, обратных к матрицам (1.4) (см. теорему 3.2). Наконец, в §4 мы рассматриваем обобщения теорем 1.1 и 3.2 на случай блочных $k \times k$ матриц для $k \geqslant 2$.

§2. Оценки для $|\det A|$

В этом параграфе мы выводим двусторонние оценки для модуля определителя матрицы с псевдоблочным диагональным преобладанием. Также мы приводим некоторые следствия из этих оценок для матриц, удовлетворяющих условиям Островского–Брауэра вида

$$r_i'(A)\, r_j'(A) < |a_{ii}|\, |a_{jj}|, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и для матриц со строгим диагональным преобладанием.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)}, \quad \alpha_2 = \max_{n_1+1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\bar{r}_j(A)}{p_j(A)}. \tag{2.1}$$

Сперва мы докажем лемму о блочных 2×2 матрицах, диагональные блоки которых имеют строгое диагональное преобладание.

В этой работе для матрицы $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, через $\mathfrak{M}(B)$ мы обозначаем ее матрицу сравнения. Также мы используем обозначения

$$r(B) = (r_k(B)), \quad r_k(B) = \sum_{j=1}^{m} |b_{kj}|, \quad k = 1, \dots, m.$$

Лемма 2.1. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *представлена в виде*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad A_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}, \quad 1 \leqslant n_i < n, \quad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

Предположим, что

$$p^{(i)}(A) = \mathfrak{M}(A_{ii})e^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

т.е. оба диагональных блока A_{11} *и* A_{22} *являются sdd-матрицами. Тогда*

$$p^{(2)}(A) - \alpha_1\bar{r}^{(2)}(A) \leqslant \mathfrak{M}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})e^{(2)}, \tag{2.4}$$

$$|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|e^{(1)} \leqslant r(A_{22}) + \alpha_1\bar{r}^{(2)}(A), \tag{2.5}$$

$$\Delta_2^{-1}|A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}|\Delta_2 e^{(2)} \leqslant \alpha_1\Delta_2^{-1}\bar{r}^{(2)}(A), \tag{2.6}$$

где константы α_i, $i = 1, 2$, *определены в* (2.1), *а диагональные матрицы* Δ_i, $i = 1, 2$, *задаются соотношениями*

$$\Delta_i e^{(i)} = p^{(i)}(A) = \mathfrak{M}(A_{ii})e^{(i)}, \quad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

Доказательство. Как хорошо известно, sdd-матрицы A_{11} и A_{22} являются невырожденными H-матрицами, и, по теореме Островского (см. [11] или, напр., [5, с. 131]), мы имеем

$$|A_{ii}^{-1}| \leqslant \mathfrak{M}(A_{ii})^{-1}, \quad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.7) очевидно следует, что

$$\mathfrak{M}(A_{ii})^{-1}\Delta_i e^{(i)} = e^{(i)}, \quad i = 1, 2; \tag{2.9}$$

из (2.1) с учетом (2.7) мы получаем

$$\Delta_i^{-1}\bar{r}^{(i)}(A) \leqslant \alpha_i e^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{2.10}$$

а с помощью (2.8), (2.9), и (2.10) мы выводим, что

$$|A_{11}^{-1}||A_{12}|e^{(2)} \leqslant \mathfrak{M}(A_{11})^{-1}|A_{12}|e^{(2)} = \mathfrak{M}(A_{11})^{-1}\Delta_1 \cdot \Delta_1^{-1}\bar{r}^{(1)}(A) \leqslant \alpha_1 e^{(1)}. \tag{2.11}$$

Ввиду (2.11), мы имеем

$$|A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|e^{(2)} \leqslant |A_{21}|\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}|A_{12}|e^{(2)} \leqslant \alpha_1|A_{21}|e^{(1)} = \alpha_1\bar{r}^{(2)}(A), \tag{2.12}$$

откуда легко следуют оценки (2.4) и (2.5).

С помощью (2.8), (2.9), и (2.12) мы получаем

$$\Delta_2^{-1}|A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}|\Delta_2 e^{(2)} \leqslant \Delta_2^{-1}|A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|[\mathfrak{M}(A_{22})^{-1}\Delta_2 e^{(2)}]$$
$$\leqslant \Delta_2^{-1}|A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|e^{(2)} \leqslant \alpha_1 \Delta_2^{-1}\bar{r}^{(2)}(A). \qquad (2.13)$$

Тем самым оценка (2.6) установлена, что и завершает доказательство. □

Замечание 2.1. Для матрицы $A \in PBDD(n_1, n_2)$, в силу (1.3), мы имеем

$$p_i(A)\, p_j(A) > \bar{r}_i(A)\, \bar{r}_j(A), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1, \quad n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n,$$

откуда, ввиду (1.2), следует, что

$$p_j(A) > \frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)} \bar{r}_j(A), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1, \quad n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n,$$

так что, в силу (2.1),

$$\mathfrak{M}(A_{22})e^{(2)} = p^{(2)}(A) > \alpha_1 \bar{r}^{(2)}(A).$$

Последнее соотношение и неравенство (2.12) показывают, что дополнение по Шуру $S_2(\mathfrak{M}(A)) = \mathfrak{M}(A_{22}) - |A_{21}|\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}|A_{12}|$ матрицы $\mathfrak{M}(A)$ относительно подматрицы $\mathfrak{M}(A_{11})$ является M-матрицей со строгим диагональным преобладанием. Поскольку $p^{(1)}(A) = \mathfrak{M}(A_{11})e^{(1)} > 0$, матрица $\mathfrak{M}(A_{11})$ также является M-матрицей со строгим диагональным преобладанием. Следовательно (см., напр., [5, с. 128]), матрица $\mathfrak{M}(A)$ – невырожденная M-матрица, а A – невырожденная H-матрица. Тем самым мы имеем альтернативное доказательство того факта, что класс $PBDD_n$ является подклассом класса невырожденных H-матриц или, другими словами, альтернативное доказательство теоремы 1.1.

Базовым результатом для определителей матриц из класса $PBDD(n_1, n_2)$ является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in PBDD(n_1, n_2)$, где $n_i > 0$, $i = 1, 2$, и $n = n_1 + n_2$. Тогда определитель матрицы A удовлетворяет* *следующим двусторонним оценкам:*

$$|\det A_{11}|\,|\det A_{22}|\prod_{j=n_1+1}^{n}\left[1-\alpha_1\frac{\bar r_j(A)}{p_j(A)}\right]\leqslant|\det A|$$
$$\leqslant|\det A_{11}|\,|\det A_{22}|\prod_{j=n_1+1}^{n}\left[1+\alpha_1\frac{\bar r_j(A)}{p_j(A)}\right],\qquad(2.14)$$

$$|\det A_{11}|\,|\det A_{22}|\prod_{i=1}^{n_1}\left[1-\alpha_2\frac{\bar r_i(A)}{p_i(A)}\right]\leqslant|\det A|$$
$$\leqslant|\det A_{11}|\,|\det A_{22}|\prod_{i=1}^{n_1}\left[1+\alpha_2\frac{\bar r_i(A)}{p_i(A)}\right],\qquad(2.15)$$

$$|\det A_{11}|\prod_{j=n_1+1}^{n}[p_j(A)-\alpha_1\bar r_j(A)]$$
$$\leqslant|\det A|\leqslant|\det A_{11}|\prod_{j=n_1+1}^{n}[r_j(D_A)+\alpha_1\bar r_j(A)],\qquad(2.16)$$

$$|\det A_{22}|\prod_{i=1}^{n_1}[p_i(A)-\alpha_2\bar r_i(A)]$$
$$\leqslant|\det A|\leqslant|\det A_{22}|\prod_{i=1}^{n_1}[r_i(D_A)+\alpha_2\bar r_i(A)],\qquad(2.17)$$

где через $D_A=\mathrm{Diag}(A_{11},A_{22})$ *обозначена блочно диагональная часть* A.

Доказательство. Как хорошо известно, справедливы равенства

$$\det A=\det A_{11}\ \det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$
$$=\det A_{11}\ \det A_{22}\ \det(I-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}),$$

ввиду которых оценки (2.14) немедленно вытекают из соотношения (2.6) в лемме 2.1 и из оценок (1.7).

Оценки (2.15) получаются применением оценок (2.14) к матрице $\widehat{A}=\begin{bmatrix}A_{22}&A_{21}\\A_{12}&A_{11}\end{bmatrix}$, полученной из A симметричной перестановкой блоков.

Оценки (2.16) следуют из (1.7) и оценок (2.4) и (2.5), тогда как оценки (2.17) получаются применением (2.16) к матрице $\widehat{A}$.

□

Замечание 2.2. Очевидно, если $A \in PBDD(n_1, n_2)$, то любая матрица P^TAP, полученная из нее симметричной перестановкой строк и столбцов такой, что перестановка ассоциированная с матрицей P действует на индексных подмножествах $\{1, \dots, n_1\}$ и $\{n_1+1, \dots, n\}$ независимо, также принадлежит классу $PBDD(n_1, n_2)$, и оценки теоремы 2.1 для матриц A и P^TAP совпадают. Однако, если $A \in PBDD_n$, то может случиться, что матрица P^TAP попадает в классы $PBDD(n_1^{(k)}, n_2^{(k)})$ для нескольких расщеплений $n = n_1^{(k)} + n_2^{(k)}$, и, следовательно, оценки (2.14)–(2.17) можно улучшить, если перейти к минимуму и максимуму по всем симметричным перестановкам и по всем соответствующим блочным разбиениям.

Замечание 2.3. Из приведенных выше доказательств леммы 2.1 и теоремы 2.1 ясно, что верхние оценки в (2.14)–(2.15) справедливы для произвольной блочной 2×2 матрицы, диагональные блоки которой имеют строгое диагональное преобладание, тогда как верхняя оценка в (2.16) (в (2.17)) справедлива при условии, что вектор $p^{(1)}(A)$ (или $p^{(2)}(A)$) положителен.

Заметим, что в предположениях теоремы 2.1 вместо значений $|\det A_{ii}|$, $i = 1, 2$, в оценки (2.14)–(2.17) можно подставить их оценки, полученные применением произвольных оценок, справедливых для sdd-матриц. В частности, оценивая $|\det A_{ii}|$, $i = 1, 2$, в (2.16) и (2.17) с помощью оценок (1.7), мы немедленно получаем следующие двусторонние оценки для определителя pbdd-матрицы в терминах величин $p_i(A)$, $r_i(D_A)$, и $\bar{r}_i(A)$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливы оценки*

$$\prod_{i=1}^{n_1} p_i(A) \prod_{j=n_1+1}^{n} [p_j(A) - \alpha_1 \bar{r}_j(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n_1} r_i(D_A) \prod_{j=n_1+1}^{n} [r_j(D_A) + \alpha_1 \bar{r}_j(A)] \quad (2.18)$$

и

$$\prod_{j=n_1+1}^{n} p_j(A) \prod_{i=1}^{n_1} [p_i(A) - \alpha_2 \bar{r}_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{j=n_1+1}^{n} r_j(D_A) \prod_{i=1}^{n_1} [r_i(D_A) + \alpha_2 \bar{r}_i(A)]. \quad (2.19)$$

Как легко видеть, для sdd-матрицы A, для которой мы имеем $\alpha_i < 1$, $i = 1, 2$ (см. лемму 1.1), оценки (2.18) и (2.19) улучшают лежащие в их основе оценки (1.7) (что объясняется использованием более детальной информации о матрице) и, кроме того, обобщают последние на более широкий класс матриц $PBDD(n_1, n_2)$.

Заметим теперь, что оценки теоремы 2.1 легко могут быть улучшены, если вместо оценок (1.7) воспользоваться уточненными оценками для определителя sdd-матрицы, которые мы напоминаем в следующей лемме.

Лемма 2.2 [9, 13]. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет строгое диагональные преобладание. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n} [|a_{ii}| - l_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} [|a_{ii}| + l_i(A)] \quad (2.20)$$

и

$$\prod_{i=1}^{n} [|a_{ii}| - u_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} [|a_{ii}| + u_i(A)], \quad (2.21)$$

где величины $l_i(A)$ и $u_i(A)$, ассоциированные со строго нижней и строго верхней частями матрицы A, определены следующим образом:

$$l_1(A) = 0; \quad l_k(A) = \sum_{1 \leqslant j < k} |a_{kj}|, \quad k = 2, \dots, n;$$

$$u_k(A) = \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} |a_{kj}|, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad u_n(A) = 0.$$

Заметим, что оценки (2.20) и (2.21) в действительности вытекают одна из другой. В этом легко убедиться, если одновременно рассмотреть матрицы A и $P^T AP$, где

$$P = (p_{ij}), \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т.е. P – матрица с единицами на второй главной диагонали.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливы следующие оценки:*

$$|\det A_{11}| \prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| - l_j(D_A) - \alpha_1 \bar{r}_j(A)] \leqslant |\det A|$$

$$\leqslant |\det A_{11}| \prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| + l_j(D_A) + \alpha_1 \bar{r}_j(A)], \tag{2.22}$$

$$|\det A_{22}| \prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| - u_i(D_A) - \alpha_2 \bar{r}_i(A)] \leqslant |\det A|$$

$$\leqslant |\det A_{22}| \prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| + u_i(D_A) + \alpha_2 \bar{r}_i(A)]. \tag{2.23}$$

Доказательство. Оценки (2.22) и (2.23) устанавливаются аналогично оценкам (2.16) и (2.17), но при оценивании определителей дополнений по Шуру $S_2(A)$ и $S_1(A)$ следует соответственно использовать оценки (2.20) и (2.21) вместо оценок (1.7). $\square$

Стоит отметить, что если $A \in PBDD(n_1, n_2)$, то оба ее диагональных блока A_{ii}, $i = 1, 2$, имеют строгое диагональное преобладание и, следовательно, принадлежат классам $PBDD_{n_i}$, $i = 1, 2$, для всех возможных блочных 2×2 разбиений. Следовательно, оценки (2.22) и (2.23) могут использоваться рекуррентно.

Оценивая значения $|\det A_{ii}|$, $i = 1, 2$, в (2.22) и (2.23) соответственно с помощью оценок (2.20) и (2.21) из леммы 2.2, мы немедленно приходим к следующему результату.

Следствие 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in PBDD(n_1, n_2)$, *где* $n_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$, *и* $n = n_1 + n_2$. *Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| - l_i(D_A)] \prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| - l_j(D_A) - \alpha_1 \bar{r}_j(A)] \leqslant |\det A|$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| + l_i(D_A)] \prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| + l_j(D_A) + \alpha_1 \bar{r}_j(A)], \tag{2.24}$$

$$\prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| - u_j(D_A)] \prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| - u_i(D_A) - \alpha_2 \bar{r}_i(A)] \leqslant |\det A|$$

$$\leqslant \prod_{j=n_1+1}^{n} [|a_{jj}| + u_j(D_A)] \prod_{i=1}^{n_1} [|a_{ii}| + u_i(D_A) + \alpha_2 \bar{r}_i(A)]. \tag{2.25}$$

Заметим, что для sdd-матрицы A, для которой $\alpha_i < 1$, $i = 1, 2$, оценки (2.24) и (2.25), очевидно, улучшают соответственно оценки Одера (2.20) и оценки Прайса (2.21). Кроме того, поскольку sdd-матрица A порядка n принадлежит классу $PBDD(n_1, n_2)$ для всех положительных n_1 и n_2 таких, что $n_1 + n_2 = n$, то для матрицы A со строгим диагональным преобладанием оценки (2.24) и (2.25) можно усилить, переходя к максимуму и минимуму по всем нетривиальным расщеплениям $n = n_1 + n_2$, а также по всем симметричным перестановкам $P^T AP$ исходной матрицы.

Следующая лемма показывает, что матрицы, удовлетворяющие строгим условиям Островского–Брауэра,

$$r_i'(A)\, r_j'(A) < |a_{ii}|\, |a_{jj}|, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.26}$$

перестановочно подобны pbdd-матрицам.

Лемма 2.3. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет условиям (2.26). Если $\frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1$, $i = 2, \ldots, n$, то $A \in PBDD(1, n-1)$, а если $\frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $A \in PBDD(n-1, 1)$.*

Доказательство. Предположим, что $\frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1$, $i = 2, \ldots n$. Ясно, что при $n_1 = 1$ и $n_2 = n - 1$ мы имеем

$$\frac{\bar{r}_1(A)}{p_1(A)} = \frac{r_1'(A)}{|a_{11}|}. \tag{2.27}$$

Поскольку $\frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1$ для всех $i > 1$, то, по лемме 1.1,

$$\frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)} \leqslant \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|}, \quad i > 1. \tag{2.28}$$

Теперь из (2.26)–(2.28) следует, что

$$\frac{\bar{r}_1(A)}{p_1(A)}\, \frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)} \leqslant \frac{r_1'(A)}{|a_{11}|}\, \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Ввиду леммы 2.3, мы можем применить оценки (2.23) с $n_1 = 1$ к любой матрице A, удовлетворяющей условиям (2.26), такой что $\frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} < 1$, $i = 2, \dots, n$. Таким образом мы получаем оценки

$$|\det A_{22}|\,[|a_{11}| - \alpha_2 u_1(A)] \leqslant |\det A| \leqslant |\det A_{22}|\,[|a_{11}| + \alpha_2 u_1(A)], \quad (2.29)$$

где

$$\alpha_2 = \max_{2\leqslant j\leqslant n} \frac{\bar r_j(A)}{p_j(A)} = \max_{2\leqslant j\leqslant n} \frac{|a_{j1}|}{|a_{jj}| - \sum\limits_{k\geqslant 2,\, k\neq j} |a_{jk}|}.$$

Заметим, что для 2×2 матрицы A оценки (2.29) точны.

Принимая во внимание то факт, что в рассматриваемом случае блок A_{22}, так же как и все его главные подматрицы, имеет строгое диагональное преобладание, и применяя оценки (2.29) рекуррентно, мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.3. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условиям Островского–Брауэра* (2.26) *и пусть*

$$r_i'(A) < |a_{ii}|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.30)$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left[|a_{ii}| - \max_{i+1\leqslant j\leqslant n} \left\{ \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| - \sum\limits_{k\geqslant i+1,\, k\neq j} |a_{jk}|} \right\} u_i(A) \right] \leqslant |\det A|$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left[|a_{ii}| + \max_{i+1\leqslant j\leqslant n} \left\{ \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| - \sum\limits_{k\geqslant i+1,\, k\neq j} |a_{jk}|} \right\} u_i(A) \right]. \quad (2.31)$$

Сходным образом из оценок (2.22) с $n_2 = 1$ мы получаем следующий аналог (2.31).

Следствие 2.4. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условиям Островского–Брауэра* (2.26) *и пусть*

$$r_i'(A) < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.32)$$

Тогда

$$\prod_{i=2}^{n}\left[|a_{ii}|-\max_{1\leqslant j\leqslant i-1}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1,\ k\neq j}|a_{jk}|}\right\}l_i(A)\right]\leqslant|\det A|$$

$$\leqslant\prod_{i=2}^{n}\left[|a_{ii}|+\max_{1\leqslant j\leqslant i-1}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1,\ k\neq j}|a_{jk}|}\right\}l_i(A)\right]. \qquad (2.33)$$

Очевидно, оценки (2.31) и (2.33) справедливы для любой sdd-матрицы A и для таких матриц соответственно улучшают оценки Прайса и Одера.

Оценки (2.31) впервые были опубликованы в работе [17], в которой они были установлены для sdd-матриц. Затем эти же оценки для случая sdd-матриц появились как теорема 1 в работе [6] (заметим, что в формулировке этой теоремы имеется опечатка). Альтернативные оценки для определителей матриц, удовлетворяющих условиям Островского–Брауэра (2.26), и матриц со строгим диагональным преобладанием, улучшающие оценки Прайса, были предложены в статье [7].

Замечание 2.4. Заметим, что если A – M-матрица со строгим диагональным преобладанием, то, по теореме Гершгорина, $Re\,\lambda_i(A)>0$, так что все вещественные собственные значения A положительны. Поскольку невещественные собственные значения вещественной матрицы встречаются только комплексно сопряженными парами, а значит их произведение положительно, то мы заключаем, что M-матрица со строгим диагональным преобладанием имеет положительный определитель. То же верно и для любой вещественной H-матрицы с положительными диагональными элементами. Следовательно, для таких H-матриц все оценки, справедливые в общем случае для $|\det A|$, справедливы и для $\det A$.

§3. Верхняя оценка для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе мы рассматриваем верхнюю оценку для бесконечной нормы матрицы, обратной к pbdd-матрице. Следующий результат был установлен в работе [8].

Теорема 3.1. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in PBDD(n_1, n_2)$, $n_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{\max\{p_i(A) + \bar{r}_j(A),\ p_j(A) + \bar{r}_i(A)\}}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)}. \tag{3.1}$$

Конечно, поскольку любая sdd-матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ принадлежит классу $PBDD(n_1, n_2)$ при всех $n_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$, таких что $n_1 + n_2 = n$, оценка (3.1), в частности, справедлива для матриц со строгим диагональным преобладанием. Однако, доказательство теоремы 3.1, представленное в работе [8], рассматривает случаи матриц с диагональным преобладанием и матриц без диагонального преобладания по отдельности, что не вполне естественно. Ниже мы приводим модифицированное доказательство верхней оценки (3.1), которое базируется на идее масштабирования столбцов матрицы, использованной в [8], но не зависит от того, имеет ли матрица A диагональное преобладание или же нет.

Доказательство теоремы 3.1. Поскольку $A \in PBDD(n_1, n_2)$ является невырожденной H-матрицей и поскольку, в силу теоремы Островского, для любой невырожденной H-матрицы A мы имеем

$$|A^{-1}| \leqslant \mathfrak{M}(A)^{-1},$$

то, очевидно, достаточно установить оценку (3.1) для случая M-матрицы A.

Итак, пусть A – M-матрица. Положим

$$B_\gamma = AD_\gamma, \qquad \text{где} \qquad D_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \qquad \gamma > 0.$$

Тогда $A^{-1} = D_\gamma B_\gamma^{-1}$ и, следовательно,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\{1, \gamma\} \|B_\gamma^{-1}\|_\infty. \tag{3.2}$$

Более того, если B_γ есть sdd-матрица, то, ввиду (1.8), мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\max\{1, \gamma\}}{(B_\gamma e)_k}. \tag{3.3}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (B_\gamma e)_i &= \gamma p_i(A) - \bar{r}_i(A), \quad i = 1, \dots n_1; \\ (B_\gamma e)_j &= p_j(A) - \gamma \bar{r}_j(A), \quad j = n_1 + 1, \dots n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Равенства

$$(B_{\gamma_{ij}})_i = (B_{\gamma_{ij}})_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n,$$

равносильны соотношениям

$$\gamma_{ij} = \frac{p_j(A) + \bar{r}_i(A)}{p_i(A) + \bar{r}_j(A)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3.5}$$

а условия

$$p_i(A)p_j(A) > \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n,$$

обеспечивают, что

$$\gamma_{ij} > \frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma_{ij}} > \frac{\bar{r}_j(A)}{p_j(A)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3.6}$$

В частности, из (3.6) вытекает, что все величины γ_{ij} положительны.

Пусть теперь

$$\gamma_i = \min_{n_1 < j \leqslant n} \gamma_{ij} = \gamma_{ij_i}, \quad i = 1, \ldots, n_1, \tag{3.7}$$

и пусть

$$\gamma_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \gamma_i = \gamma_{i_0}. \tag{3.8}$$

Тогда, в силу соотношений (3.6) и (3.7)–(3.8), мы имеем

$$\frac{1}{\gamma_i} \geqslant \frac{1}{\gamma_{ij}} > \frac{\bar{r}_j(A)}{p_j(A)} \quad \text{для всех } i \text{ и } j,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\gamma_0} > \frac{\bar{r}_j(A)}{p_j(A)}, \quad j = n_1+1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Аналогично,

$$\gamma_0 \geqslant \gamma_i > \frac{\bar{r}_i(A)}{p_i(A)}, \quad i = 1, \ldots, n_1. \tag{3.10}$$

Соотношения (3.9) и (3.10), с учетом (3.4), показывают, что B_{γ_0} является sdd-матрицей. Следовательно, $\|A^{-1}\|_\infty$ может быть ограничены сверху с помощью оценки (3.3) с $\gamma = \gamma_0$. Для того, чтобы воспользоваться оценкой (3.3), используя (3.8), (3.7) и (3.5), мы выводим

$$\frac{\gamma_0}{(B_{\gamma_0}e)_i} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 p_i(A) - \bar{r}_i(A)} \leqslant \frac{\gamma_i}{\gamma_i p_i(A) - \bar{r}_i(A)}$$

$$= \frac{\gamma_{ij_i}}{\gamma_{ij_i} p_i(A) - \bar{r}_i(A)} = \frac{p_{j_i}(A) + \bar{r}_i(A)}{p_i(A) p_{j_i}(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_{j_i}(A)}, \quad i = 1, \ldots, n_1,$$

откуда следует, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \frac{\gamma_0}{(B_{\gamma_0} e)_i} \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{p_j(A) + \bar{r}_i(A)}{p_i(A) p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)}. \tag{3.11}$$

Аналогично, мы имеем

$$(B_{\gamma_0} e)_i = \gamma_0 p_i(A) - \bar{r}_i(A) \geqslant \gamma_i p_i(A) - \bar{r}_i(A)$$

$$= \gamma_{ij_i} p_i(A) - \bar{r}_i(A) = \frac{p_i(A) p_{j_i}(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_{j_i}(A)}{p_i(A) + \bar{r}_{j_i}(A)},$$

так что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \frac{1}{(B_{\gamma_0} e)_i} \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{p_i(A) + \bar{r}_j(A)}{p_i(A) p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)}. \tag{3.12}$$

Для $j \geqslant n_1 + 1$, с помощью (3.7), (3.8) и (3.5) мы выводим

$$\frac{\gamma_0}{(B_{\gamma_0} e)_j} = \frac{\gamma_0}{p_j(A) - \gamma_0 \bar{r}_j(A)} = \frac{\gamma_{i_0}}{p_j(A) - \gamma_{i_0} \bar{r}_j(A)}$$

$$\leqslant \frac{\gamma_{i_0 j}}{p_j(A) - \gamma_{i_0 j} \bar{r}_j(A)} = \frac{p_j(A) + \bar{r}_{i_0}(A)}{p_{i_0}(A) p_j(A) - \bar{r}_{i_0}(A)\bar{r}_j(A)}, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n,$$

откуда следует, что

$$\max_{n_1+1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\gamma_0}{(B_{\gamma_0} e)_j} \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{p_j(A) + \bar{r}_i(A)}{p_i(A) p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)}; \tag{3.13}$$

аналогично, мы получаем

$$(B_{\gamma_0} e)_j = p_j(A) - \gamma_0 \bar{r}_j(A) = p_j(A) - \gamma_{i_0} \bar{r}_j(A) \geqslant p_j(A) - \gamma_{i_0 j} \bar{r}_j(A)$$

$$= \frac{p_{i_0}(A) p_j(A) - \bar{r}_{i_0}(A)\bar{r}_j(A)}{p_{i_0}(A) + \bar{r}_j(A)}$$

и, следовательно,

$$\max_{n_1+1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{(B_{\gamma_0} e)_j} \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{p_i(A) + \bar{r}_j(A)}{p_i(A) p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)}. \tag{3.14}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться оценкой (3.3) с учетом соотношений (3.11)–(3.14). □

Заметим, что при $n = 2$ оценка (3.1) обращается в равенство, а в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. $A = \mathrm{Diag}\,(A_{11},\ A_{22})$ есть блочно диагональная sdd-матрица, оценка (3.1) сводится к оценке Альберга–Нильсона–Вараха (1.8).

Теперь мы представим интерпретацию теоремы 3.1 в терминах 2×2 матриц A_{ij}, определенных в (1.4). Поскольку

$$(A_{ij})^{-1} = \frac{1}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)} \begin{bmatrix} p_j(A) & \bar{r}_i(A) \\ \bar{r}_j(A) & p_i(A) \end{bmatrix},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n,$$

мы имеем

$$\|(A_{ij})^{-1}\|_\infty = \frac{\max\{p_i(A) + \bar{r}_j(A),\ p_j(A) + \bar{r}_i(A)\}}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_1,\ n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Значит, оценку (3.1) можно записать в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ n_1 < j \leqslant n}} \|(A_{ij})^{-1}\|_\infty. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание тот факт, что $A \in PBDD(n_1, n_2)$ тогда и только тогда, когда все матрицы A_{ij} являются невырожденными M-матрицами, мы приходим к следующей переформулировке теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. *Если все матрицы* (1.4) *являются невырожденными* M*-матрицами, то бесконечная норма обратной матрицы* A^{-1} *удовлетворяет оценке* (3.15).

В заключение этого параграфа мы покажем, что для матриц со строгим диагональным преобладание, как можно было ожидать, оценка (3.1) (или (3.15)) по крайней мере не хуже, чем классическая оценка (1.8). Действительно, пусть

$$\xi = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|a_{kk}| - r'_k(A)\}.$$

Тогда мы имеем

$$p_k(A) - \bar{r}_k(A) = |a_{kk}| - r'_k(A) \geqslant \xi, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и, следовательно,

$$\bar{r}_k(A) \leqslant p_k(A) - \xi, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Используя (3.16), мы выводим

$$\frac{p_i(A) + \bar{r}_j(A)}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)} \leqslant \frac{p_i(A) + p_j(A) - \xi}{p_i(A)p_j(A) - (p_i(A) - \xi)(p_j(A) - \xi)}$$

$$= \frac{p_i(A) + p_j(A) - \xi}{\xi(p_i(A) + p_j(A) - \xi)} = \frac{1}{\xi}.$$

Аналогично,

$$\frac{p_j(A) + \bar{r}_i(A)}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)} \leqslant \frac{1}{\xi}.$$

Таким образом,

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_1\\ n_1+1\leqslant j\leqslant n}} \frac{\max\{p_i(A) + \bar{r}_j(A),\ p_j(A) + \bar{r}_i(A)\}}{p_i(A)p_j(A) - \bar{r}_i(A)\bar{r}_j(A)} \leqslant \frac{1}{\xi}$$

$$= \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_{kk}| - r'_k(A)\}}. \tag{3.17}$$

Как легко видеть из предыдущих рассуждений, оценки (3.1) и (1.8) совпадают тогда и только тогда, когда

$$\|(A_{ij})^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\xi} \quad \text{для некоторых } i \text{ и } j. \tag{3.18}$$

Следует отметить, что из соотношения (3.18), вообще говоря, не следует, что матрица A имеет так называемое равномерное строгое диагональное преобладание, т.е. $|a_{kk}| - r'_k(A) = \xi > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Этот утверждение можно проиллюстрировать следующим простым примером. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 2 & | & 0 & -1 \\ - & - & - & - \\ 0 & | & 2 & -1 \\ -1 & | & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad n_1 = 1,\ n_2 = 2.$$

Тогда $\xi = \min_{1\leqslant k\leqslant 3}\{|a_{kk}| - r'_k(A)\} = 1$, а поскольку

$$(A_{12})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad (A_{13})^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

то оценка (3.15) дает

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\{\|(A_{12})^{-1}\|_\infty,\ \|(A_{13})^{-1}\|_\infty\} = \max\Big\{1,\ \frac{4}{5}\Big\} = 1,$$

что совпадает со значением оценки (1.8). Однако, матрица A при этом не имеет равномерного диагонального преобладания.

Таким образом, утверждение из работы [8], что оценка (3.1) “всегда меньше, чем оценка Вараха, за исключением того случая, когда A имеет равномерное строгое диагональное преобладание” является ошибочным.

§4. Обобщения на случай блочных $k \times k$ матриц

Ниже мы приводим (без доказательства) обобщение теоремы 1.1 на случай блочных $k \times k$ матриц.

Для заданной в блочном виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \tag{4.1}$$

введем в рассмотрение ассоциированные $k \times k$ матрицы

$$A^{(i_1,i_2,\dots,i_k)} = \begin{bmatrix} (\mathfrak{M}(A_{11})e^{(1)})_{i_1} & -(|A_{12}|e^{(2)})_{i_1} & \dots & -(|A_{1k}|e^{(k)})_{i_1} \\ -(|A_{21}|e^{(1)})_{i_2} & (\mathfrak{M}(A_{22})e^{(2)})_{i_2} & \dots & -(|A_{2k}|e^{(k)})_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(|A_{k1}|e^{(1)})_{i_k} & -(|A_{k2}|e^{(2)})_{i_k} & \dots & (\mathfrak{M}(A_{kk})e^{(k)})_{i_k} \end{bmatrix},$$

$$i_j = 1,\dots,n_j, \quad j = 1,\dots,k, \tag{4.2}$$

где $A_{jj} \in \mathbb{C}^{n_j\times n_j}$, $j = 1,\dots k$.

Теорема 4.1. *Пусть $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – блочная матрица вида* (4.1). *Если все матрицы в* (4.2) *являются невырожденными M-матрицами, то A является невырожденной H-матрицей.*

Заметим, что набор $\{A^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}\}$, состоящий из $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ матриц, играет роль набора матриц сравнения, ассоциированных с рассматриваемым блочным разбиением матрицы A (для случая бесконечной нормы).

В заключение мы выдвигаем следующую гипотезу, касающуюся обобщения теоремы 3.2 на случай блочных $k \times k$ матриц.

Гипотеза. В условиях теоремы 4.1 верна оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_k} \|(A^{(i_1,\dots,i_k)})^{-1}\|_\infty. \tag{4.3}$$

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
2. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. SIAM **11** (1963), 95–104.
3. L. Cvetković, V. Kostić, R. S. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set.* — Electr. Trans. Numer. Anal. **18** (2004), 73–80.
4. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **268** (1992), 257–268.
5. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press (1991).
6. Ting-Zhu Huang, Xing-Ping Liu, *Estimations for certain determinants.* — Comp. Math. Appl. **50** (2005), 1677–1684.
7. Jianzhou Liu, Fuzhen Zhang, *Disc separation of the Schur complement of diagonally dominant matrices.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **27** (2005), 665–674.
8. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}$-SDD matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
9. R. Oeder, *Problem E 949.* — Amer. Math. Monthly **58** (1951), 37.
10. A. M. Ostrowski, *Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants.* — Bull. Sci. Math. (2) **61** (1937), 19–32.
11. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
12. A. M. Ostrowski, *Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal.* — Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 26–30.
13. B. Price, *Bounds for determinants with dominant principal diagonal.* — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 497–502.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11**(1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *On diagonal dominance arguments for bounding $\|A^{-1}\|_\infty$.* — Linear Algebra Appl. **14** (1976), 211–217.
16. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer Series Comput. Math. **36**, Springer, 2004.
17. Xue-Rong Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra Appl. **3** (1996), 173–177.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the determinants and inverses of certain H-matrices.

The paper studies a subclass, referred to as $PBDD(n_1, n_2)$, of the class of nonsingular H-matrices. A new characterization of matrices in $PBDD(n_1, n_2)$ is suggested. Two-sided bounds for the determinants of matrices in the class $PBDD(n_1, n_2)$ are derived, and their applications to strictly diagonally dominant matrices and to matrices with the Ostrowski–Brauer diagonal dominance are presented. An upper bound for the infinity norms of the inverses of matrices in $PBDD(n_1, n_2)$ is considered. Extensions to the case of block $k \times k$ matrices, $k \geqslant 2$, are addressed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 4 октября 2007 г.