Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

О НОРМАЛЬНЫХ ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦАХ

1. Введение

Задача об описании нормальных теплицевых матриц, поставленная и решенная авторами в [1–3], привлекла большое внимание в алгебраической литературе. На протяжении десяти лет был предложен ряд ее решений, отличающихся от первоначального (см. [4–8]). Само описание имеет замечательно простой вид и дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть A – комплексная матрица, одновременно нормальная и теплицева. Тогда справедливо хотя бы одно из двух утверждений:*

(a) *A – матрица вида $\alpha I + \beta H$, где α и β – комплексные числа, H – эрмитова теплицева матрица;*

(б) *A представляет собой ϕ-циркулянт для некоторого комплексного числа ϕ, по модулю равного единице.*

Задача описания нормальных ганкелевых матриц, поставленная в [9], оказалась значительно труднее теплицевой задачи. Несмотря на некоторые продвижения, полученные в [8, 10, 11], она все еще далека от полного решения. Имеющиеся частичные результаты состоят, в основном, в указании конкретных подмножеств класса $\mathcal{N}H_n$ нормальных ганкелевых матриц порядка n. Перечислим эти подмножества.

1. Вещественные ганкелевы матрицы и произвольные их комплексные кратные.

2. Матрицы вида

$$\alpha \mathcal{P}_n + \beta H, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

Работа второго автора была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 04-07-90336 и 05-01-00721) и программой фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы в интегральных и дифференциальных уравнениях”.

где

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

есть перъединичная матрица порядка n, а H – произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица.

3. Блочно-диагональные матрицы вида

$$\alpha H_1 + \beta H_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

где H_1 – верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка k $(0 < k < n)$, а H_2 – нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $l = n - k$. При этом мы называем H_1 и H_2 соответственно верхнетреугольной и нижнетреугольной ганкелевыми матрицами, если

$$\{H_1\}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j > k + 1$$

и

$$\{H_2\}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j < l + 1.$$

Эти три класса матриц указаны в [9]. К ним в [11] добавлен еще один.

4. Матрицы вида

$$\alpha H + \beta H^{-1}, \quad \alpha, \beta \in C,$$

где H – невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица.

Все указанные классы матриц были найдены из соображений, различных для каждого класса. Цель данной статьи – указать общий подход, позволяющий получить эти классы как специальные случаи единой схемы. Те нормальные ганкелевы матрицы, которые не входят в классы 1–4, соответствуют основному и наиболее трудному случаю нашей схемы. Этот случай не поддается пока полному анализу. Мы показываем, однако, что неизвестные типы нормальных ганкелевых матриц можно обнаружить лишь в пределах нового и весьма любопытного матричного класса, обобщающего (и содержащего в себе) класс ϕ-циркулянтов.

2. Основные соотношения

Условимся записывать ганкелеву матрицу H порядка n в виде

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & h_1 & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 & h_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_0 & \dots & h_{-n+3} & h_{-n+2} \\ h_0 & h_{-1} & \dots & h_{-n+2} & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Наряду с H рассмотрим теплицеву матрицу

$$T = H\mathcal{P}_n. \tag{2}$$

Определим оператор $\mathcal{T}(f)$, который вектору $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ ставит в соответствие теплицеву строго верхнетреугольную $n\times n$-матрицу с первой строкой

$$(0 \ f_1 \ f_2, \dots, f_{n-1}).$$

Тогда матрица (2) может быть представлена в виде

$$T = t_0 I + \mathcal{T}(x) + (\mathcal{T}(y))^t, \tag{3}$$

где

$$x = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1}), \quad y = (h_{-1}, h_{-2}, \dots, h_{-n+1}), \quad t_0 = h_0.$$

Нас интересуют условия, при которых матрица (1) является нормальной, т.е.

$$HH^* = H^*H. \tag{4}$$

Сейчас мы взглянем на этот вопрос с несколько более общих позиций, чем требуется для сформулированных нами целей. Напомним, что комплексная $n \times n$-матрица A называется сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^*A}. \tag{5}$$

В частности, сопряженно-нормальными являются все симметричные матрицы (как вещественные, так и комплексные).

Теорема 2. *Для того чтобы комплексная $n \times n$-матрица A была одновременно нормальной и сопряженно-нормальной, необходимо и достаточно, чтобы AA^* и A^*A были вещественными матрицами.*

Это утверждение вытекает из сличения определений (4) и (5).

Замечание 1. Нетрудно показать, что вещественность матрицы AA^* (соответственно, A^*A) равносильна тому, что эрмитов множитель в левом (соответственно, правом) полярном разложении матрицы A в действительности является вещественной симметричной матрицей. Мы воспользуемся этим замечанием в последнем разделе статьи.

Следствие 1. *Для того чтобы ганкелева $n \times n$-матрица H была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы HH^* и H^*H были вещественными матрицами.*

Для теплицевой матрицы (2) имеем

$$TT^* = HH^* \quad \text{и} \quad T^*T = \mathcal{P}_n H^* H \mathcal{P}_n.$$

Поэтому следствие 1 можно переформулировать так.

Следствие 2. *Для того чтобы ганкелева $n \times n$-матрица H была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы для сопутствующей ей теплицевой матрицы T матрицы TT^* и T^*T были вещественными.*

В действительности, достаточно потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathrm{Im}\, TT^* = 0. \tag{6}$$

Это соотношение будет в дальнейшем играть основную роль. Вместо того чтобы искать нормальную ганкелеву матрицу H, мы будем искать соответствующую ей теплицеву матрицу (2), для которой выполнено равенство (6).

Положим

$$T = \widehat{T}_1 + i\widehat{T}_2, \tag{7}$$

где

$$\widehat{T}_1 = \frac{T + \overline{T}}{2}, \quad \widehat{T}_2 = \frac{T - \overline{T}}{2i}$$

и i – мнимая единица. Таким образом, $\widehat{T}_1$ – вещественная теплицева матрица вида

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + \mathcal{T}(x) + (\mathcal{T}(y))^t,$$

где

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \quad y = (a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-n+1})$$

и

$$a_j = \operatorname{Re} h_j, \quad j = -n+1, \dots, n-1.$$

В аналогичном представлении

$$\widehat{T}_2 = b_0 I + \mathcal{T}(x) + (\mathcal{T}(y))^t$$

вещественной теплицевой матрицы $\widehat{T}_2$ имеем

$$x = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \quad y = (b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-n+1})$$

и

$$b_j = \operatorname{Im} h_j, \quad j = -n+1, \dots, n-1.$$

Подставляя представление (7) в (6), находим

$$\widehat{T}_2 \widehat{T}_1^t - \widehat{T}_1 \widehat{T}_2^t = 0. \tag{8}$$

Таким образом, еще одной эквивалентной формулировкой ганкелевой нормальной задачи является описание всех пар вещественных теплицевых матриц, удовлетворяющих условию (8). Очевидно, что это условие равносильно требованию, чтобы матрица $T_3 = \widehat{T}_2 \widehat{T}_1^t$ была симметричной.

Замечание 2. Если записать исходную ганкелеву матрицу H в виде

$$H = H_1 + iH_2, \tag{9}$$

аналогичном представлению (7), то равенство (6) предстанет как условие перестановочности вещественных ганкелевых матриц H_1 и H_2. Этот подход к ганкелевой нормальной задаче был использован в [9].

Замечание 3. Если в предыдущем замечании исключить матрицы H класса 1, то ни одна из матриц H_1 и H_2 в (9) не может быть нулевой. Это же относится к матрицам $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ в (8).

Вернемся к условию (8). Предположим, что одна из матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ диагональная. Пусть, для определенности, это будет $\widehat{T}_1$. Тогда, будучи теплицевой, $\widehat{T}_1$ является скалярной матрицей, причем, в силу замечания 3, $\widehat{T}_1 \neq 0$. В этом случае (8) сводится к требованию, чтобы $\widehat{T}_2$ была симметрична. В терминах исходной ганкелевой задачи это означает, что H_1 пропорциональна матрице $\mathcal{P}_n$, а H_2 центросимметрична, т.е. H есть матрица класса 2.

Поэтому в дальнейшем мы считаем, что ни $\widehat{T}_1$, ни $\widehat{T}_2$ не являются диагональными матрицами.

Удобно выделить диагональные части матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$, полагая

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + T_1, \quad \widehat{T}_2 = b_0 I + T_2. \tag{10}$$

Согласно сказанному выше, матрицы T_1 и T_2 считаются ненулевыми. С учетом (10), уравнение (8) перепишется в виде

$$T_2 T_1^t - T_1 T_2^t = a_0(T_2^t - T_2) - b_0(T_1^t - T_1). \tag{11}$$

Матрица, стоящая в правой части равенства (11), теплицева; значит, и в левой части должна стоять теплицева матрица. Выразим последнее условие через элементы $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ матриц T_1 и T_2. Имеем

$$(T_2 T_1^t - T_1 T_2^t)_{i+1,j+1} = (T_2 T_1^t - T_1 T_2^t)_{i,j}, \quad i,j = 1,\ldots,n-1,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (T_2)_{i+1,k}(T_1)_{j+1,k} - \sum_{k=1}^{n} (T_1)_{i+1,k}(T_2)_{j+1,k}$$
$$- \sum_{k=1}^{n} (T_2)_{ik}(T_1)_{jk} + \sum_{k=1}^{n} (T_1)_{ik}(T_2)_{jk} = 0,$$

или, наконец,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k-i-1}a_{k-j-1} - \sum_{k=1}^{n} a_{k-i-1}b_{k-j-1}$$
$$- \sum_{k=1}^{n} b_{k-i}a_{k-j} + \sum_{k=1}^{n} a_{k-i}b_{k-j} = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n-1.$$

Заменим здесь индексы суммирования: в первой и второй суммах положим $m = k-1$, а в третьей и четвертой – $m = k$. Получим

$$\sum_{m=0}^{n-1} b_{m-i}a_{m-j} - \sum_{m=1}^{n-1} a_{m-i}b_{k-j} - \sum_{m=1}^{n} b_{m-i}a_{m-j} + \sum_{m=1}^{n} a_{m-i}b_{m-j} = 0,$$

откуда

$$a_{n-i}b_{n-j} - a_{n-j}b_{n-i} = a_{-i}b_{-j} - a_{-j}b_{-i}, \quad i,j = 1,\ldots,n-1. \tag{12}$$

Элементы, определяющие теплицевы матрицы

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & 0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_{-1} & 0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{-n+1} & b_{-n+2} & b_{-n+3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

удобно записать в виде двух $(n-1)\times 2$-матриц F и G. Столбцами матрицы

$$F(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

являются векторы

$$u_1 = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)^t \quad \text{и} \quad u_2 = (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)^t, \tag{14}$$

а столбцы матрицы

$$G(l_1, l_2) = \begin{bmatrix} a_{-1} & b_{-1} \\ a_{-2} & b_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{-n+1} & b_{-n+1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

суть векторы

$$l_1 = (a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-n+1})^t \quad \text{и} \quad l_2 = (b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-n+1})^t. \tag{16}$$

Определим величины

$$\triangle_{ij}^F = \det \begin{pmatrix} a_{n-i} & b_{n-i} \\ a_{n-j} & b_{n-j} \end{pmatrix} = a_{n-i}b_{n-j} - a_{n-j}b_{n-i}$$

и

$$\triangle_{ij}^G = \det \begin{pmatrix} a_{-i} & b_{-i} \\ a_{-j} & b_{-j} \end{pmatrix} = a_{-i}b_{-j} - a_{-j}b_{-i}.$$

Теперь (12) принимает вид

$$\triangle_{ij}^F = \triangle_{ij}^G, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \tag{17}$$

Дальнейший анализ разобьем на несколько случаев, соответствующих различным значениям ранга матриц F и G. При этом случай $F = G = 0$ невозможен, поскольку означает, что T_1 и T_2 – диагональные матрицы.

3. $F \neq 0$, $G = 0$

В этом случае все величины $\triangle_{ij}^G = 0$. Ввиду (17), имеем $\triangle_{ij}^F = 0$ для всех i, j, откуда $\operatorname{rank} F(u_1, u_2) = 1$. Пусть вещественные числа α и β, удовлетворяющие условию

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \tag{18}$$

и вещественный вектор

$$c = (c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1)^t$$

таковы, что $u_1 = \alpha c$ и $u_2 = \beta c$ (см. (14)). Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(\mathcal{P}_{n-1}c)$, тогда $T_1 = \alpha U$ и $T_2 = \beta U$. Подставляя эти равенства в (11), получим

$$(a_0\beta - b_0\alpha)U^t - (a_0\beta - b_0\alpha)U = 0. \tag{19}$$

Поскольку U – ненулевая строго верхнетреугольная матрица, равенство (19) эквивалентно соотношению

$$(a_0\beta - b_0\alpha)U = 0,$$

т.е. соотношению $a_0\beta - b_0\alpha = 0$, которое можно записать в виде

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Вследствие (18), найдется (вещественное) ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \quad b_0 = \kappa\beta.$$

Теперь представление (10) принимает вид

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + T_1 = \kappa\alpha I + \alpha U = \alpha(\kappa I + U),$$
$$\widehat{T}_2 = b_0 I + T_2 = \kappa\beta I + \beta U = \beta(\kappa I + U),$$

означающий, что $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ являются скалярными кратными одной и той же вещественной верхнетреугольной матрицы. В терминах исходной ганкелевой задачи это означает, что нормальная матрица H есть произведение некоторого комплексного числа и вещественной верхнетреугольной ганкелевой матрицы. В этом случае H принадлежит классу 1.

4. $G \neq 0$, $F = 0$

Этот случай охватывается анализом предыдущего раздела, если матрицы F и G поменять местами. Соответствующая нормальная матрица H есть произведение комплексного числа и вещественной нижнетреугольной ганкелевой матрицы, т.е. снова принадлежит классу 1.

5. $\operatorname{rank} F = 1$, $G \neq 0$

В силу соотношений (17), все определители $\triangle_{ij}^G = 0$, поэтому $\operatorname{rank} G \leqslant 1$. Поскольку $G \neq 0$, имеем $\operatorname{rank} G = 1$.

Как и выше, из условия $\operatorname{rank} F = 1$ находим вещественные числа α и β, связанные соотношением (18), и вещественный вектор

$$c = (c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1)^t$$

такие, что $u_1 = \alpha c$ и $u_2 = \beta c$ (см. (14)). Аналогично, из условия $\operatorname{rank} G = 1$ заключаем, что найдутся вещественные числа γ и δ, связанные соотношением

$$\gamma^2 + \delta^2 \neq 0, \tag{20}$$

и вещественный вектор

$$d = (d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-n+1})^t$$

такие, что $l_1 = \gamma d$ и $l_2 = \delta d$ (см. (16)). Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(\mathcal{P}_{n-1} c)$ и строго нижнетреугольную матрицу $L = (\mathcal{T}(d))^t$; тогда

$$T_1 = \alpha U + \gamma L, \quad T_2 = \beta U + \delta L. \tag{21}$$

Отсюда после несложных выкладок получаем

$$T_2 T_1^t - T_1 T_2^t = (\alpha\delta - \beta\gamma)(LU^t - UL^t). \tag{22}$$

Подставляя (22) и (21) в (11), находим

$$\begin{aligned}(\alpha\delta - \beta\gamma)(LU^t - UL^t) = (a_0\beta - b_0\alpha)U^t - (a_0\delta - b_0\gamma)L \\ +(a_0\delta - b_0\gamma)L^t - (a_0\beta - b_0\alpha)U.\end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что это равенство эквивалентно более простому соотношению

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)UL^t = (a_0\beta - b_0\alpha)U - (a_0\delta - b_0\gamma)L^t. \tag{24}$$

Чтобы упростить последующие записи, определим величины

$$\xi = \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \xi_1 = a_0\beta - b_0\alpha, \quad \xi_2 = b_0\gamma - a_0\delta. \tag{25}$$

В новых обозначениях уравнение (24) принимает вид

$$\xi U L^t = \xi_1 U + \xi_2 L^t. \tag{26}$$

Анализ этого уравнения, в свою очередь, разобьем на несколько подслучаев.

5.1. $\xi = 0$

Это условие означает, что определитель матрицы

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

равен нулю. Поскольку W не имеет нулевых строк (см. (18) и (19)), найдется такое (вещественное) ненулевое число κ, что

$$\gamma = \kappa\alpha, \quad \delta = \kappa\beta. \tag{27}$$

Подстановка (27) в (21) дает

$$T_1 = \alpha U + \kappa\alpha L = \alpha(U + \kappa L), \quad T_2 = \beta U + \kappa\beta L = \beta(U + \kappa L).$$

Таким образом, T_1 и T_2 являются скалярными кратными одной и той же матрицы $T_3 = U + \kappa L$:

$$T_1 = \alpha T_3, \quad T_2 = \beta T_3.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (11), получаем

$$(a_0\beta - b_0\alpha)(T_3^t - T_3) = 0. \tag{28}$$

Это соотношение удовлетворяется, в частности, если T_3 – симметричная матрица. Тогда (см. (10))

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + \alpha T_3, \quad \widehat{T}_2 = b_0 I + \beta T_3, \tag{29}$$

а T есть линейная комбинация (с комплексными коэффициентами) единичной матрицы и вещественной симметричной теплицевой матрицы T_3. Симметрия и теплицевость влекут за собой центросимметричность – свойство, которое сохраняется при переходе к матрице H. Итак, в рассматриваемом случае H является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) перъединичной матрицы $\mathcal{P}_n$ и вещественной центросимметричной ганкелевой матрицы, т.е. принадлежит классу 2.

Если матрица T_3 несимметрична, то (28) превращается в равенство $a_0\beta - b_0\alpha = 0$, которое можно рассматривать как требование вырожденности матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Из условий (18) заключаем, что найдется (вещественное) ненулевое число η такое, что $a_0 = \eta\alpha$ и $b_0 = \eta\beta$. Тогда (см. (29))

$$\widehat{T}_1 = \eta\alpha I + \alpha T_3 = \alpha(\eta I + T_3), \quad \widehat{T}_2 = \eta\beta I + \beta T_3 = \beta(\eta I + T_3).$$

Соответствующая матрица H есть комплексное кратное вещественной ганкелевой матрицы, т.е. принадлежит классу 1.

5.2. $\xi \neq 0$

Положим

$$\mu_1 = -\xi_1/\xi, \quad \mu_2 = -\xi_2/\xi \tag{31}$$

и перепишем (26), разделив обе части на ξ:

$$UL^t = -\mu_1 U - \mu_2 L^t. \tag{32}$$

Полученному равенству придадим вид

$$(U + \mu_2 I)(L^t + \mu_1 I) = \mu_1\mu_2 I. \tag{33}$$

Исследование этого уравнения разобьем на несколько подслучаев, соответствующих различным значениям коэффициентов μ_1 и μ_2.

5.2.1. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$

В соответствии с определением величин ξ_1 и ξ_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_0\beta - b_0\alpha = 0, \\ a_0\delta - b_0\gamma = 0 \end{cases}$$

относительно a_0 и b_0 с ненулевым определителем $-\xi$. Следовательно,

$$a_0 = b_0 = 0.$$

Равенство (33) принимает вид $UL^t = 0$. Напомним, что оба сомножителя суть строго верхнетреугольные теплицевы матрицы. Обозначим через k_U номер первой ненулевой наддиагонали в матрице U и через k_L аналогичный номер для L^T. Тогда U и L можно представить в блочном виде

$$U = \begin{pmatrix} O_{(n-k_U+1)(k_U-1)} & \widetilde{U} \\ O_{(k_U-1)(k_U-1)} & O_{(k_U-1)(n-k_U+1)} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} O_{(k_L-1)(n-k_L+1)} & O_{(k_L-1)(k_L-1)} \\ \widetilde{L} & O_{(n-k_L+1)(k_L-1)} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{U}$ и $\widetilde{L}$ – квадратные матрицы, а символ $0_{n_1 n_2}$ обозначает нулевую матрицу размера $n_1 \times n_2$.

Условие $UL^t = 0$ приводит к соотношению

$$k_U + k_L \geqslant n + 2,$$

или

$$k_U - 1 \geqslant n - k_L + 1.$$

Отсюда следует, что группы столбцов, содержащие подматрицы $\widetilde{U}$ и $\widetilde{L}$, имеют непересекающиеся индексы. Это значит, что соответствующая ганкелева матрица H имеет вид комплексной линейной комбинации

$$H = \alpha H_1 \oplus \beta H_2,$$

где H_1 и H_2 – вещественные ганкелевы матрицы, причем H_1 – верхнетреугольная, а H_2 – нижнетреугольная. Другими словами, H принадлежит классу 3.

5.2.2. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$

В этом случае уравнение (33) сводится к уравнению

$$(U + \mu_2 I)L^t = 0. \tag{34}$$

Верхнетреугольная ганкелева матрица $U + \mu_2 I$ с ненулевым диагональным элементом μ_2 невырожденна, поэтому (34) означает, что $L = 0$. Из условия $\mu_1 = \xi_1 = 0$ выводим существование (вещественного) ненулевого числа κ такого, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \quad b_0 = \kappa\beta.$$

Используя эти соотношения, формулы (21) и равенство $L = 0$ вместе с представлением (10), получаем

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + T_1 = \kappa\alpha I + \alpha U = \alpha(\kappa I + U),$$

$$\widehat{T}_2 = b_0 I + T_2 = \kappa\beta I + \beta U = \beta(\kappa I + U).$$

Соответствующая матрица H есть комплексное кратное вещественной верхнетреугольной ганкелевой матрицы, т.е. принадлежит классу 1.

5.2.3. $\mu_1 \neq 0, \ \ \mu_2 = 0$

Этот случай аналогичен предыдущему с переменой ролей коэффициентов μ_1 и μ_2. Уравнение (33) принимает вид

$$U(L^t + \mu_1 I) = 0.$$

Поскольку $L + \mu_1 I$ – невырожденная матрица, то $U = 0$. Из условия $\mu_2 = \xi_2 = 0$ выводим существование (вещественного) ненулевого числа κ такого, что

$$a_0 = \kappa\gamma, \quad b_0 = \kappa\delta.$$

Используя эти соотношения, формулы (21) и равенство $U = 0$ вместе с представлением (10), получаем

$$\widehat{T}_1 = a_0 I + T_1 = \kappa\gamma I + \gamma L = \gamma(\kappa I + L),$$

$$\widehat{T}_2 = b_0 I + T_2 = \kappa\delta I + \delta L = \delta(\kappa I + L).$$

Соответствующая матрица H есть комплексное кратное вещественной нижнетреугольной ганкелевой матрицы, т.е. принадлежит классу 1.

5.2.4. $\mu_1 \neq 0, \ \mu_2 \neq 0$

Перепишем (33) в виде

$$\Big(\frac{1}{\mu_2} U + I\Big)\Big(\frac{1}{\mu_1} L^t + I\Big) = I \tag{35}$$

и определим матрицу

$$W = \frac{1}{\mu_2} U + I. \tag{36}$$

Треугольная матрица W имеет единичную диагональ и, следовательно, обратима. Поэтому из (36) и (35) получаем

$$U = \mu_2(W - I), \quad L = \mu_1(W^{-1} - I)^t.$$

Подстановка этих выражений в (21) дает

$$T_1 = \alpha\mu_2(W - I) + \gamma\mu_1(W^{-1} - I)^t,$$

$$T_2 = \beta\mu_2(W - I) + \delta\mu_1(W^{-1} - I)^t,$$

откуда

$$\widehat{T_1} = \alpha\mu_2 W + \gamma\mu_1 W^{-t} + (a_0 - \alpha\mu_2 - \gamma\mu_1)I,$$

$$\widehat{T_2} = \beta\mu_2 W + \delta\mu_1 W^{-t} + (b_0 - \beta\mu_2 - \delta\mu_1)I.$$

Покажем, что в этих формулах коэффициенты при единичных матрицах равны нулю. Согласно (31) и (25), имеем

$$\mu_1 = -\frac{\xi_1}{\xi} = \frac{\alpha b_0 - \beta a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \mu_2 = -\frac{\xi_2}{\xi} = \frac{\delta a_0 - \gamma b_0}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Поэтому

$$a_0 - \alpha\mu_2 - \gamma\mu_1 = \frac{\alpha\delta a_0 - \beta\gamma a_0 - \alpha\delta a_0 + \alpha\gamma b_0 - \alpha\gamma b_0 + \beta\gamma a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma} = 0$$

и

$$b_0 - \beta\mu_2 - \delta\mu_1 = \frac{\alpha\delta b_0 - \beta\gamma b_0 - \beta\delta a_0 + \beta\gamma b_0 - \alpha\delta b_0 + \beta\delta a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma} = 0.$$

Таким образом,

$$\widehat{T_1} = \alpha\mu_2 W + \gamma\mu_1 W^{-t}, \quad \widehat{T_2} = \beta\mu_2 W + \delta\mu_1 W^{-t}.$$

Соответствующая матрица H является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) невырожденной вещественной верхнетреугольной ганкелевой матрицы $H_1 = W\mathcal{P}_n$ и нижнетреугольной ганкелевой матрицы H_1^{-1}, т.е. H принадлежит классу 4.

6. $\operatorname{rank} F = 2$

Это основной и наиболее трудный случай. В силу соотношений (17), ранг матрицы G также равен двум. Кроме того, существует 2×2-матрица

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

с определителем

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{37}$$

такая, что

$$G = FW. \tag{38}$$

Вспоминая выражения для матриц $F(u_1, u_2)$ и $G(l_1, l_2)$ (см. (13) и (15)), заключаем, что матричное равенство (38) эквивалентно скалярным соотношениям

$$a_{-i} = \alpha a_{n-i} + \gamma b_{n-i}, \quad b_{-i} = \beta a_{n-i} + \delta b_{n-i}. \tag{39}$$

Записав теплицеву матрицу (2) в виде

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

мы можем заменить вещественные соотношения (39) комплексной формулой

$$t_{-i} = \phi t_{n-i} + \psi \overline{t_{n-i}}, \tag{41}$$

где

$$\phi = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Условие (37) приобретает при этом комплексную форму

$$|\phi|^2 - |\psi|^2 = 1. \tag{42}$$

При $\psi = 0, |\phi| = 1$ получаем хорошо известную алгебру ϕ-циркулянтных матриц. По этой причине матрицы, определяемые соотношениями (41) и (42), мы называем (ϕ, ψ)-*циркулянтами*.

В настоящее время мы не имеем описания класса (ϕ, ψ)-циркулянтов при $\psi \neq 0$. Можно лишь констатировать, что не описанные еще типы нормальных ганкелевых матриц или, точнее, соответствующие им теплицевы матрицы нужно искать как (ϕ, ψ)-циркулянты, удовлетворяющие условию (6). Не умея пока решать эту задачу в общем виде, мы продемонстрируем ее решение в частном случае ϕ-циркулянтов.

Пусть вначале $\phi = 1$. Воспользуемся замечанием 1 (см. раздел 2), согласно которому интересующий нас теплицев циркулянт T должен в своем полярном разложении $T = SU$ иметь *вещественный* симметричный множитель S. Напомним, что этот множитель определяется однозначно (даже для вырожденной T) как положительно полуопределенный квадратный корень из TT^*. Алгебра циркулянтов замкнута относительно матричной операции сопряжения, поэтому матрица TT^* является (вещественным) циркулянтом. Но тогда и S, будучи многочленом с вещественными коэффициентами от TT^*, также есть вещественный циркулянт.

Если T – невырожденная матрица, то унитарный сомножитель ее полярного разложения тоже определен однозначно, а именно $U = S^{-1}T$. Матрица U, вообще говоря, комплексная, но, как и T и S, является циркулянтом. Вырожденная матрица T допускает бесконечно много полярных разложений. Однако, пользуясь соображениями непрерывности, нетрудно показать, что и в этом случае имеется разложение, оба сомножителя которого суть циркулянты.

Приведенные соображения обосновывают следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть H – ганкелев циркулянт, а T - соответствующий ему теплицев циркулянт (см. (2)). Матрица H является нормальной тогда и только тогда, когда T есть произведение вещественного симметричного положительно полуопределенного циркулянта S и унитарного циркулянта U. При этом H есть произведение того же вещественного теплицева циркулянта S и унитарного ганкелева циркулянта $U\mathcal{P}_n$.*

Замечание 4. Сами по себе симметричные матрицы S в упомянутых выше полярных разложениях не дают новой информации о нормальных ганкелевых матрицах. В самом деле, всякая такая матрица S центросимметрична и, после умножения ее на $\mathcal{P}_n$, дает вещественную центросимметричную ганкелеву матрицу, т.е. матрицу класса 2. В то же время унитарные циркулянты U порождают унитарные же ганкелевы циркулянты. Это семейство нормальных ганкелевых матриц не содержится ни в одном из классов 1–4.

Применяя такие же рассуждения при $\phi = -1$, получаем следующий аналог теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть H – косой ганкелев циркулянт, а T – соответствующий ему косой теплицев циркулянт (см. (2)). Матрица H является нормальной тогда и только тогда, когда T есть произведение вещественного симметричного положительно полуопределенного косого циркулянта S и унитарного косого циркулянта U. При этом H есть произведение того же вещественного теплицева косого циркулянта S и унитарного косого ганкелева циркулянта $U\mathcal{P}_n$.*

Пусть, наконец, $|\phi| = 1$ и $\phi \neq \pm 1$. Те же рассуждения, что и выше, приводят к существенно иному результату. Сомножитель S полярного разложения по-прежнему должен быть вещественной матрицей, оставаясь при этом ϕ-циркулянтом. При комплексном ϕ эти два требования совместимы, только если S – скалярная матрица. Но тогда сама матрица T, с точностью до скалярного множителя, должна быть унитарным ϕ-циркулянтом. В результате получаем такое утверждение.

Теорема 5. *Ганкелев ϕ-циркулянт H тогда и только тогда является нормальной матрицей, когда он является скалярным кратным унитарной матрицы.*

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *Об описании нормальных теплицевых матриц.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **34** (1994), 473–479.
2. Х. Д. Икрамов, *О классификации нормальных теплицевых матриц с вещественными элементами.* — Матем. заметки **57** (1995), 670–680.
3. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **36** (1996), 3–10.
4. В. И. Гельфгат, *Критерий нормальности теплицевой матрицы.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **35** (1995), 1428–1432.
5. D. R. Farenick et al, *Normal Toeplitz matrices.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17** (1996), 1037–1043.
6. K. Ito, *Every normal Toeplitz matrix is either of type* I *or of type* II. — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17** (1996), 998–1006.
7. A. Arimoto, *A simple proof of the classification of normal Toeplitz matrices.* — Electronic J. Linear Algebra **9** (2002), 108–111.
8. G. Gu, L. Patton, *Commutation relations for Toeplitz and Hankel matrices.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **24** (2003), 728–746.
9. Х. Д. Икрамов, *К вопросу об описании нормальных ганкелевых матриц.* — Фундам. прикл. матем. **3** (1997), 809–819.
10. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *О кососимметричной части произведения теплицевых матриц.* — Матем. заметки **63** (1998), 138–141.
11. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Об одном новом классе нормальных ганкелевых матриц.* — Вестн. МГУ. Серия "Вычисл. математика и кибернетика" (2007) No. 1, 10–13.

Ikramov Kh. D., Chugunov V. N. On normal Hankel matrices.

The problem of characterizing normal Hankel matrices is still far from being solved completely. Partial results available mainly are descriptions of certain subsets of the class of normal Hankel matrices. These subsets were found separately and using different arguments. This paper presents a general approach allowing, in particular, to obtain all the known subsets as special cases. Normal Hankel matrices outside of these subsets correspond to the main (and the most difficult) case of our treatment. At the moment, this case defies complete analysis. However, we show that unknown types of normal Hankel matrices can only be found within a new and very interesting matrix class that extends (and contains) the class of ϕ-circulants.

Московский государственный университет

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Институт вычислительной математики РАН

E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru

Поступило 26 декабря 2006 г.