Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Х. Д. Икрамов, Х. Фассбендер

ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИВЕДЕНИЕ К БЛОЧНО–ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ ПОСРЕДСТВОМ УНИТАРНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

1. Введение

Одна из классических теорем о перестановочных матрицах утверждает следующее (см. [1, раздел I.4.21]).

Теорема 1. *Перестановочные матрицы* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *могут быть приведены к треугольному виду одним и тем же унитарным подобием, т.е. существует унитарная матрица* $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *такая, что обе матрицы* U^*AU *и* U^*BU *треугольные.*

Для определенности мы будем в дальнейшем считать, что приведенные матрицы являются верхними треугольными.

Стандартное доказательство теоремы 1 основывается на следующем утверждении:

Теорема 2. *Перестановочные матрицы* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *имеют общий собственный вектор.*

Основная цель этой статьи состоит в доказательстве двух утверждений, аналогичных теоремам 1 и 2, но касающихся унитарных конгруэнций, а не подобий. Эти утверждения формулируются и доказываются в разделе 3. Необходимые для этого определения и факты приведены в разделе 2. Следствия наших основных теорем, относящиеся к классу комплексных симметричных матриц, а также к более общему классу сопряженно-нормальных матриц, обсуждаются в разделе 5.

Теоремы 1 и 2 в действительности справедливы в следующих более сильных формулировках.

Теорема 3. *Пусть* $\{A_i\} \subset \mathbf{C}^{n\times n}$ *– произвольное (конечное или бесконечное) семейство перестановочных матриц. Тогда все матри-*

Работа второго автора над этой статьей была поддержана грантом Немецкого научно-исследовательского общества (DFG).

цы этого семейства могут быть приведены к треугольному виду одним и тем же унитарным подобием.

Теорема 4. *Пусть* $\{A_i\} \subset \mathbf{C}^{n\times n}$ *– произвольное (конечное или бесконечное) семейство перестановочных матриц. Тогда существует собственный вектор, общий для всех матриц из* $\{A_i\}$.

В разделе 4 мы доказываем аналоги теорем 3 и 4 для унитарных конгруэнций.

2. Предварительные сведения

Понятие псевдоинвариантного подпространства (впервые введенное в [2]) играет важную роль в этой статье. Пусть $\mathcal{L}$ – произвольное подпространство в $\mathbf{C}^n$. Определим подпространство $\overline{\mathcal{L}}$ соотношением

$$\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{x} \mid x \in \mathcal{L}\}.$$

Назовем $\mathcal{L}$ псевдоинвариантным подпространством матрицы $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, если

$$A\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}.$$

Если $\dim \mathcal{L} = 1$, то всякий ненулевой вектор $x \in \mathcal{L}$ называется псевдособственным вектором матрицы A.

Не всякая матрица из $\mathbf{C}^{n\times n}$ имеет псевдособственные векторы; более того, у большинства матриц таких векторов нет. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Всякая матрица* $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *имеет псевдоинвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2.

Доказательство этого утверждения дано в [3].

Свяжем с матрицей $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ матрицы

$$A_L = \overline{A}A \quad \text{и} \quad A_R = A\overline{A}.$$

Каждой матрице $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ мы сопоставим n комплексных чисел, называемых ее псевдособственными значениями. Наше определение псевдособственных значений отличается от определения, приведенного в [4, раздел 4.6]. Оно опирается на следующие замечательные свойства спектра матрицы $A_L = \overline{A}A$.

1. Он симметричен по отношению к вещественной оси. Кроме того, собственные значения λ и $\overline{\lambda}$ имеют одинаковую кратность.

2. Если у A_L есть отрицательные собственные значения, то они обязательно имеют четную алгебраическую кратность.

Доказательства этих утверждений можно найти в [4, раздел 4.6, задачи 5–7].

Пусть $\lambda(A_L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ есть спектр матрицы A_L.

Определение. *Псевдособственными значениями матрицы A называются n чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$, получаемых следующим образом.*

- *Если $\lambda_i \in \lambda(A_L)$ не лежит на вещественной отрицательной полуоси, то соответствующее псевдособственное значение μ_i определяется как квадратный корень из λ_i, имеющий неотрицательную вещественную часть:*

$$\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re} \mu_i \geq 0.$$

  Кратность числа μ_i полагается равной кратности λ_i.

- *С вещественным отрицательным числом $\lambda_i \in \lambda(A_L)$ мы связываем два сопряженных чисто мнимых псевдособственных значения*

$$\mu_i = \pm\lambda_i^{\frac{1}{2}}.$$

  Кратность каждого из них считается равной половине кратности собственного значения λ_i. Множество

$$c\lambda(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$$

  называется псевдоспектром матрицы A.

В частности, псевдособственные значения комплексной симметричной матрицы A суть вещественные неотрицательные числа, равные сингулярным числам этой матрицы.

Следующая теорема играет в теории унитарных конгруэнций ту же роль, какую в теории унитарного подобия выполняет теорема Шура о приведении к треугольному виду (см. [4]).

Теорема 6 (Теорема Юла). *Всякая матрица $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ может быть приведена посредством унитарной конгруэнции к блочно-треугольному виду с диагональными блоками порядков 1 и 2. Блоки размера 1×1 соответствуют вещественным неотрицательным псевдособственным значениям матрицы A; каждый 2×2 блок соответствует паре сопряженных комплексных псевдособственных значений.*

Эта блочно-треугольная матрица называется нормальной формой Юла матрицы A. Она может быть верхней или нижней блочно-треугольной.

Матрица $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ называется сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^*A}. \tag{1}$$

Нормальная форма Юла сопряженно-нормальной матрицы – это блочно-диагональная матрица с диагональными блоками порядков 1 и 2. Снова блоки размера 1×1 соответствуют вещественным неотрицательным псевдособственным значениям матрицы A; каждый 2×2 блок соответствует паре сопряженных комплексных псевдособственных значений.

Комплексные симметричные матрицы являются сопряженно-нормальными, а их формы Юла суть неотрицательные диагональные матрицы. В этом состоит содержание следующей классической теоремы Такаги (см. [4, раздел 4.4]).

Теорема 7 (Разложение Такаги)**.** *Для всякой симметричной матрицы $S \in \mathbf{C}^{n\times n}$ найдутся унитарная матрица U и неотрицательная диагональная матрица*

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

такие, что

$$S = U\Sigma U^T.$$

Диагональные элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ суть сингулярные числа, или (что то же) псевдособственные значения матрицы S. Матрица U может быть выбрана так, чтобы псевдособственные значения стояли на диагонали матрицы Σ в любом заданном порядке.

3. Основные результаты

Начнем со следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ – псевдоперестановочные матрицы, т.е.*

$$A\overline{B} = B\overline{A}. \tag{2}$$

Тогда матрицы семейства $\{\overline{A}A, \overline{B}B, \overline{A}B\}$ попарно перестановочны.

Доказательство. Используя (2), выводим

$$
\begin{aligned}
(\overline{A}A)(\overline{B}B) &= \overline{A}(A\overline{B})B = \overline{A}(B\overline{A})B = (\overline{A}B)(\overline{A}B) = (\overline{B}A)(\overline{B}A)\\
&= \overline{B}(A\overline{B})A = \overline{B}(B\overline{A})A = (\overline{B}B)(\overline{A}A),\\
(\overline{A}A)(\overline{A}B) &= (\overline{A}A)(\overline{B}A) = \overline{A}(A\overline{B})A = \overline{A}(B\overline{A})A = (\overline{A}B)(\overline{A}A),\\
(\overline{B}B)(\overline{A}B) &= \overline{B}(B\overline{A})B = \overline{B}(A\overline{B})B = (\overline{B}A)(\overline{B}B) = (\overline{A}B)(\overline{B}B). \quad \square
\end{aligned}
$$

Теперь мы докажем аналог теоремы 2.

Теорема 8. *Псевдоперестановочные матрицы* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *имеют общее псевдоинвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2.

Доказательство. Лемма 1 дает представление о том, как следует доказывать теорему. Согласно теореме 4, коммутирующее семейство $\{\overline{A}A, \overline{B}B, \overline{A}B\}$ имеет общий собственный вектор. Обозначим его через x. Тогда

$$\overline{A}Ax = \lambda x, \tag{3}$$

$$\overline{B}Bx = \nu x, \tag{4}$$

$$\overline{A}Bx = \delta x, \tag{5}$$

где λ, ν и δ – некоторые числа. Определим векторы y и z соотношениями

$$\overline{y} = Ax \tag{6}$$

и

$$\overline{z} = Bx. \tag{7}$$

Теперь, используя равенства (3)–(5), получим:

$$Ay = A\overline{(Ax)} = \overline{\overline{A}Ax} = \overline{\lambda}\ \overline{x}, \tag{8}$$

$$Az = A\overline{(Bx)} = \overline{\overline{A}Bx} = \overline{\delta}\ \overline{x}, \tag{9}$$

$$By = B\overline{(Ax)} = \overline{\overline{B}Ax} = \overline{\overline{A}Bx} = \overline{\delta}\ \overline{x}, \tag{10}$$

$$Bz = B\overline{(Bx)} = \overline{\overline{B}Bx} = \overline{\nu}\ \overline{x}. \tag{11}$$

Соотношения (6)–(11) можно объединить следующим образом:

$$A[x\ y\ z] = \overline{[x\ y\ z]}\Lambda_A, \tag{12}$$

$$B[x\ y\ z] = \overline{[x\ y\ z]}\Lambda_B. \tag{13}$$

Здесь

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\lambda} & \overline{\delta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

и

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\delta} & \overline{\nu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Уравнения (12) и (13) показывают, что $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x, y, z\}$ есть общее псевдоинвариантное подпространство матриц A и B. Если $\dim \mathcal{L} \le 2$, то доказывать нечего. Поэтому мы предположим, что векторы x, y и z линейно независимы.

Из (12) и (13) следуют соотношения

$$\overline{A}B[x\ y\ z] = [x\ y\ z]\overline{\Lambda_A}\Lambda_B$$

и

$$\overline{B}A[x\ y\ z] = [x\ y\ z]\overline{\Lambda_B}\Lambda_A.$$

Поскольку $\overline{A}B = \overline{B}A$ и $\operatorname{rank}(x\ y\ z) = 3$, имеем

$$\overline{\Lambda}_A\Lambda_B = \overline{\Lambda}_B\Lambda_A. \tag{16}$$

Однако,

$$\overline{\Lambda}_A\Lambda_B = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\delta} & \overline{\nu} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{\Lambda}_B\Lambda_A = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & \overline{\delta} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, равенство (16) возможно тогда и только тогда, когда

$$\lambda = \delta = \nu = 0.$$

Это означает, что

$$Ay = 0, \quad Az = 0$$

и

$$By = 0, \quad Bz = 0.$$

Тем самым каждый из векторов y и z определяет одномерное псевдоинвариантное подпространство, общее для A и B, а $\operatorname{span}\{y, z\}$ есть общее двумерное псевдоинвариантное подпространство. Теорема доказана. $\square$

Теперь мы сформулируем аналог теоремы 1.

Теорема 9. *Для псевдоперестановочных матриц* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *найдется унитарная матрица* $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *такая, что* $U^T AU$ *и* $U^T BU$ *имеют одинаковую блочно-треугольную форму с диагональными блоками порядков* 1 *и* 2.

Доказательство. Будем рассуждать так же, как в стандартном доказательстве теоремы 1, т.е. построим в явном виде унитарную матрицу, которая приводит к желаемому виду и A, и B. Пусть $\mathcal{L}$ – общее псевдоинвариантное подпространство размерности 1 или 2 для A и B. Существование такого подпространства гарантируется теоремой 8. Выберем в $\mathcal{L}$ какой-либо ортонормированный базис. Он состоит из единственного вектора u_1, если $\dim \mathcal{L} = 1$ (случай 1), или пары ортонормированных векторов u_1, u_2, если $\dim \mathcal{L} = 2$ (случай 2). Построим унитарную матрицу U_1, для которой u_1 является первым столбцом (случай 1) или u_1, u_2 являются первыми двумя столбцами (случай 2). Затем выполним унитарную конгруэнцию

$$A \to A_1 = U_1^T AU_1, \quad B \to B_1 = U_1^T BU_1. \tag{17}$$

Поскольку

$$Au_1 = \mu_A \overline{u}_1, \quad Bu_1 = \mu_B \overline{u}_1$$

(случай 1) и

$$A[u_1\ u_2] = \overline{[u_1\ u_2]} M_A, \quad B[u_1\ u_2] = \overline{[u_1\ u_2]} M_B$$

(случай 2), матрицы A_1 и B_1 в соотношениях (17) должны быть блочно-треугольными:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Переход от матриц A и B к матрицам (18) есть первый шаг в нашем процессе приведения.

Заметим, что свойство псевдоперестановочности (2) сохраняется унитарными конгруэнциями. Отсюда следует, что диагональные блоки матриц (18) удовлетворяют соотношению

$$A_{22}\overline{B}_{22} = B_{22}\overline{A}_{22}.$$

На втором шаге приведения A_{22} и B_{22} обрабатываются таким же образом, каким A и B были обработаны на первом. Пусть

V – полученная в результате унитарная матрица порядка $n-1$ (случай 1) или $n-2$ (случай 2). Положим

$$U_2 = 1 \oplus V$$

(случай 1) или

$$U_2 = I_2 \oplus V$$

(случай 2), где I_2 есть единичная матрица порядка 2. Тогда

$$A_2 = U_2^T A_1 U_2 = (U_1 U_2)^T A (U_1 U_2)$$

и

$$B_2 = U_2^T B_1 U_2 = (U_1 U_2)^T B (U_1 U_2)$$

суть блочно-треугольные матрицы одинаковой блочной структуры:

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{13} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{23} \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & \widetilde{B}_{12} & \widetilde{B}_{13} \\ 0 & \widetilde{B}_{22} & \widetilde{B}_{23} \\ 0 & 0 & \widetilde{B}_{33} \end{bmatrix}.$$

Порядок (1 или 2) блоков $\widetilde{A}_{22}$ и $\widetilde{B}_{22}$ зависит от размерности общего псевдоинвариантного подпространства, выбранного для псевдоперестановочных матриц A_{22} и B_{22}.

Продолжая таким образом, мы в конечном счете приведем A и B к блочно-треугольной форме с диагональными блоками порядков 1 и 2. Произведение унитарных матриц U_i, использованных на отдельных шагах, дает требуемую унитарную матрицу U. $\square$

4. Одновременное приведение трех и более матриц

В этом разделе мы обобщим теоремы 8 и 9 с тем, чтобы получить аналоги теорем 3 и 4, относящиеся к унитарным конгруэнциям.

Начнем с очевидного обобщения леммы 1.

Лемма 2. *Пусть матричное семейство* $\mathcal{A} = \{A_i\} \subset \mathbf{C}^{n\times n}$ *таково, что*

$$A_i \overline{A}_j = A_j \overline{A}_i \tag{19}$$

для любых двух матриц A_i *и* A_j *из* $\mathcal{A}$. *Тогда матрицы семейства* $\{\overline{A}_i A_j\}$ *попарно перестановочны.*

Теперь мы обобщим теорему 8.

Теорема 10. *Пусть в семействе* $\mathcal{A} = \{A_i\} \subset \mathbf{C}^{n\times n}$ *любые две матрицы* $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ *псевдоперестановочны. Тогда найдется псевдоинвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2, *общее для всех матриц из* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Заметим, что мы можем ограничиться рассмотрением только конечных семейств $\mathcal{A}$. В самом деле, предположим, что исходное семейство $\mathcal{A}$ бесконечно и $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ есть его максимальное линейно независимое подмножество. Тогда всякое псевдоинвариантное подпространство, общее для матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, в действительности является общим псевдоинвариантным подпространством всего семейства $\mathcal{A}$. Это замечание показывает также, что матрицы конечного семейства $\mathcal{A} = \{A_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ можно считать линейно независимыми.

По лемме 2, матрицы семейства $\{\overline{A_i} A_j\}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ попарно перестановочны. Пусть x – общий собственный вектор этого семейства (см. теорему 4), т.е.

$$\overline{A}_i A_j x = \delta_{ij} x, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Заметим, что, вследствие соотношений псевдоперестановочности, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Определим векторы $y_1, \ldots, y_m$ соотношениями

$$\overline{y}_i = A_i x, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Тогда

$$A_i y_j = A_i \overline{A_j x} = \overline{\overline{A}_i A_j x} = \overline{\delta}_{ij} \overline{x}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

Объединяя соотношения (21)–(22), получим

$$A_i [x \; y_1 \; \cdots \; y_m] = \overline{[x \; y_1 \; \cdots \; y_m]} \Lambda_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\delta}_{11} & \overline{\delta}_{12} & \cdots & \overline{\delta}_{1m} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\delta}_{21} & \overline{\delta}_{22} & \cdots & \overline{\delta}_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

и т.д.

Равенства (23) означают, что $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x, y_1, \ldots, y_m\}$ есть общее псевдоинвариантное подпространство всего семейства $\mathcal{A}$. Если $\dim \mathcal{L} \leq 2$, то нужный результат получен. Поэтому мы предположим, что

$$d = \dim \mathcal{L} = \operatorname{rank}(x\ y_1\ \ldots\ y_m) \geq 3. \tag{26}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: x есть линейная комбинация векторов $y_1, \ldots, y_m$, т.е.

$$x = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m \tag{27}$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда, применяя матрицу A_i ($i = 1, \ldots, m$) к обеим частям равенства (27), получим (см. (22))

$$A_i x = \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\delta}_{ij}\Big)\overline{x}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, x является псевдособственным вектором для каждой матрицы A_i, а $\operatorname{span}\{x\}$ есть общее одномерное псевдоинвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$.

Случай 2: x не является линейной комбинацией векторов $y_1, \ldots, y_m$.

Пусть r – максимальное число линейно независимых векторов среди $y_1, \ldots, y_m$. Чтобы упростить обозначения, предположим, что векторы $y_1, \ldots, y_r$ линейно независимы. Ввиду (26),

$$r = d - 1 \geq 2.$$

Всякая тройка

$$x, y_i, y_j,$$

где

$$1 \leq i, j \leq r \quad \text{и} \quad i \neq j,$$

линейно независима, и к ней можно применить рассуждение, использованное в теореме 8. Например, для $i = 1, j = 2$ имеем

$$A_1[x\ y_1\ y_2] = \overline{[x\ y_1\ y_2]}M_1,$$
$$A_2[x\ y_1\ y_2] = \overline{[x\ y_1\ y_2]}M_2,$$

где

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\delta}_{11} & \overline{\delta}_{12} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\delta}_{21} & \overline{\delta}_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соотношение псевдоперестановочности $\overline{A}_1 A_2 = \overline{A}_2 A_1$ влечет за собой равенство $\overline{M}_1 M_2 = \overline{M}_2 M_1$, откуда

$$\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{22} = 0.$$

Аналогичным образом показываем, что

$$\delta_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Итак (см. (22)),

$$A_i y_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, r. \tag{28}$$

Если $r = m$, то нужный результат получен. В самом деле, каждый вектор y_i $(i = 1, \dots, m)$ определяет общее одномерное псевдоинвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$, а $\operatorname{span}\{y_i, y_j\}$ $(i \neq j)$ есть общее двумерное псевдоинвариантное подпространство.

Пусть $r < m$ и

$$r < j \leq m.$$

Поскольку y_j есть линейная комбинация векторов $y_1, \dots, y_r$, мы заключаем из (28), что

$$A_i y_j = 0, \quad i = 1, \dots, r; \; j = r + 1, \dots, m.$$

Однако

$$A_j y_i = A_j \overline{A_i} \overline{x} = A_i \overline{A_j} \overline{x} = A_i y_j = 0$$

для $i = 1, \dots, r; j = r+1, \dots, m$. Это означает, что каждый из векторов y_i $(i = 1, \dots, r)$ принадлежит общему ядру всего семейства $\mathcal{A}$. Теорема доказана. □

Из теоремы 10 немедленно вытекает следующий аналог теоремы 3.

Теорема 11. *Пусть в семействе $\mathcal{A} = \{A_i\} \subset \mathbf{C}^{n \times n}$ любые две матрицы $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ псевдоперестановочны. Тогда найдется унитарная матрица $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$ такая, что все матрицы $U^T A_i U$,*

$A_i \in \mathcal{A}$, *имеют одинаковую блочно-треугольную форму с диагональными блоками порядков* 1 *и* 2.

Доказательство теоремы 11 является почти дословным повторением доказательства теоремы 9. Отличия состоят лишь в следующем: на каждом шаге $\mathcal{L}$ выбирается как общее псевдоинвариантное подпространство всего текущего псевдоперестановочного семейства (а не просто пары матриц, как в теореме 9), а вместо теоремы 8 используется теорема 10.

5. Одновременное приведение сопряженно-нормальных матриц

Пусть A – сопряженно-нормальная матрица. Приравнивая диагональные элементы матриц в определении (1), заключаем, что 2-норма i-й строки матрицы A равна 2-норме ее i-го столбца ($1 \leq i \leq n$). Из этого наблюдения легко следует, что если сопряженно-нормальная матрица A имеет блочно-треугольную форму, то в действительности A блочно-диагональна и имеет те же диагональные блоки. Это приводит к такому следствию теоремы 9.

Теорема 12. *Если сопряженно-нормальные матрицы* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *псевдоперестановочны, то найдется унитарная матрица* $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *такая, что* U^TAU *и* U^TBU *имеют одинаковую блочно-диагональную форму с диагональными блоками порядков* 1 *и* 2.

Аналогичное следствие можно сформулировать для теоремы 11.

Теорема 12, разумеется, верна для симметричных матриц A и B. Однако, в этом случае можно получить более сильное утверждение.

Теорема 13. *Пусть* $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *– псевдоперестановочные симметричные матрицы. Тогда найдется унитарная матрица* $V \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *такая, что матрицы* U^TAU *и* U^TBU *вещественные и диагональные.*

Доказательство. Поскольку $A = A^T$ и $B = B^T$, то из (2) вытекает, что

$$A\overline{B} = B\overline{A} = B^T\overline{A^T} = (\overline{B})^*A^* = (A\overline{B})^*.$$

Таким образом, матрица $A\overline{B}$ эрмитова.

В [4, следствие 4.5.18(б)] показано, что симметричные матрицы A и B могут быть приведены к диагональному виду одной и той же унитарной конгруэнцией, если и только если матрица $A\overline{B}$ является нормальной. Пусть W – унитарная матрица, осуществляющая такое приведение для наших матриц A и B. Тогда матрицы

$$\Lambda = W^T A W = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

и

$$M = W^T B W = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

диагональны. Если и Λ, и M вещественны, то теорема доказана; поэтому мы предположим, что они не являются вещественными.

Свойство псевдоперестановочности сохраняется унитарными конгруэнциями, откуда следует, что

$$\Lambda\overline{M} = M\overline{\Lambda},$$

или

$$\lambda_i \overline{\mu}_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь посредством конгруэнции с подходящей диагональной унитарной матрицей D_1 мы можем сделать все числа μ_i вещественными. Вообще говоря, это преобразование изменяет матрицу Λ, однако матрица

$$\widetilde{\Lambda} = D_1 \Lambda D_1 \tag{29}$$

остается диагональной. К тому же, новые числа $\widetilde{\lambda}_i$ и $\widetilde{\mu}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{\lambda}_i \widetilde{\mu}_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда следует, что матрица (29) вещественна во всех позициях, где $\mu_i \neq 0$. Если в матрице $\widetilde{\Lambda}$ остаются невещественные элементы $\widetilde{\lambda_j}$, то мы можем сделать их вещественными, выполняя еще одну конгруэнцию с подходящей диагональной унитарной матрицей D_2. Эта матрица содержит единицы в диагональных позициях, для которых числа $\widetilde{\lambda}_i$ уже вещественны, поэтому матрица $\widetilde{M} = D_1 M D_1$ не изменится. Отсюда мы заключаем, что

$$\widehat{\Lambda} = D_2 \widetilde{\Lambda} D_2 \quad \text{и} \quad \widehat{M} = D_2 \widetilde{M} D_2$$

являются нужными вещественными диагональными матрицами, тогда как

$$V = WD_1D_2$$

есть требуемая унитарная матрица. □

Легко проверить, что справедливо следующее обращение теоремы 13.

Теорема 14. *Если симметричные матрицы $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ могут быть преобразованы в вещественные диагональные матрицы посредством одной и той же конгруэнции, то A и B псевдоперестановочны.*

Литература

1. М. Маркус, Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* Наука, М., 1972.
2. Y. P. Hong, R. A. Horn, *On simultaneous reduction of families of matrices to triangular or diagonal form by unitary congruences.* — Linear Multilinear Algebra **17** (1985), 271–288.
3. H. Fassbender, Kh. D. Ikramov, *Some observations on the Youla form and conjugate-normal matrices.* — Linear Algebra Appl. **422** (2007), 29–38.
4. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1990.
5. D. C. Youla, *A normal form for a matrix under the unitary congruence group.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 694–704.

Ikramov Kh. D., Fassbender H., Simultaneous reduction to block triangular form by a unitary congruence transformation.

Analogs of some classical theorems on commuting matrices are proved. The new theorems deal with unitary congruences rather than unitary similarities; commutation is replaced by concommutation, defined in the paper, whereas normal and Hermitian matrices are replaced by conjugate-normal and symmetric matrices, respectively.

Московский
государственный университет
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 18 января 2007 г.

Institute of Computational Mathematics
TU Braunschweig, Germany
E-mail: h.fassbender@tu-bs.de