Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Х. Д. Икрамов

ОБ УНИТАРНО ТРАНСПОНИРУЕМЫХ МАТРИЦАХ

1. Введение

Хорошо известно, что всякая квадратная матрица A подобна своей транспонированной матрице A^T. Доказательство этого утверждения для комплексных матриц дано, например, в [1, раздел 3.2.3], хотя сам факт справедлив для матриц над любым полем F. Впрочем, в этой статье рассматриваются лишь случаи $F = \mathbf{C}$ и $F = \mathbf{R}$; соответствующие множества матриц обозначаются через $M_n(\mathbf{C})$ и $M_n(\mathbf{R})$.

Комплексные матрицы A и A^T имеют одинаковые собственные значения и одинаковую жорданову структуру для каждого из них, что, собственно, и обеспечивает их подобие. Однако, помимо названных характеристик, A и A^T имеют ряд других общих свойств, например, одинаковые сингулярные числа, а потому и одинаковые спектральную и фробениусову нормы. Не являются ли эти дополнительные свойства следствием возможности преобразовать A в A^T посредством не произвольного, а *унитарного* подобия?

В общем случае, ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Насколько известно автору, первый пример матрицы A, не являющейся унитарно подобной транспонированной матрице A^T, был указан в его статье [2]. Это вещественная треугольная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

То обстоятельство, что A и A^T не являются унитарно подобными, проверялось с помощью критерия Шпехта, формулировку которого мы сейчас напомним. Выражение вида

$$W(s,t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\cdots s^{m_k}t^{n_k},$$

где $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ – целые неотрицательные числа, будем называть словом от (некоммутирующих) переменных s и t. Число $m_1 + n_1 + \cdots + m_k + n_k$ назовем длиной слова $W(s,t)$.

Теорема 1 (критерий Шпехта). *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr}\ W(B, B^*) \tag{2}$$

для всякого слова $W(s,t)$.

Полагая для матрицы (1) $B = A^T$ и $W(s,t) = sts^2t^2$, получим

$$\operatorname{tr} W(A,B) = 39223, \quad \operatorname{tr} W(B,A) = 39991,$$

откуда и следует невозможность унитарного подобия.

Критерий Шпехта, а точнее его конечная версия, предложенная Пирси [3], остается универсальным средством проверки унитарного подобия для конкретных пар A, A^T. Однако такая проверка может оказаться весьма дорогостоящей: согласно Пирси, чтобы убедиться в существовании унитарного подобия между $n \times n$-матрицами A и B, нужно проверить равенства (2) для всех слов длины $1, 2, \dots, 2n^2$.

Будем называть $A \in M_n(\mathbf{C})$ *унитарно транспонируемой* матрицей (или UT-матрицей), если

$$A^T = Q^* A Q \tag{3}$$

для некоторой унитарной матрицы Q. Это не вполне точное название заменяет правильный, но более громоздкий термин "матрица, транспонируемая унитарным подобием".

Исходя из слишком высокой трудоемкости критерия Шпехта–Пирси, мы задаемся следующими вопросами.

1. Можно ли указать конкретные классы матриц, принадлежность к которым гарантирует унитарную транспонируемость?

2. Имеются ли необходимые условия унитарной транспонируемости, более простые, чем условия Шпехта?

После изложения некоторых вспомогательных результатов в разделе 2, в разделе 3 мы указываем ряд классов UT-матриц. Затем, при определенных предположениях о матрице A, мы устанавливаем два необходимых условия унитарной транспонируемости. Условие, формулируемое в разделе 4, относится к произвольным матрицам из $M_n(\mathbf{C})$, а условие из раздела 5 – только к вещественным матрицам.

2. Вспомогательные результаты

Будем обозначать множество всех унитарно транспонируемых матриц символом $\mathcal{U}T$ (или $\mathcal{U}T_n$, если требуется указание порядка). Символ $\mathcal{U}S(A)$ обозначает класс унитарного подобия матрицы A, т.е. множество всех матриц B, унитарно подобных A.

Предложение 1. *Пусть $A \in \mathcal{U}T$ и $B \in \mathcal{U}S(A)$. Тогда $B \in \mathcal{U}T$.*

(Таким образом, унитарная транспонируемость есть свойство всего класса унитарного подобия.)

Доказательство. По условию, $A^T = Q^*AQ$ и $B = P^*AP$ для некоторых унитарных матриц P и Q. Отсюда

$$\begin{aligned} B^T &= P^T A^T \bar{P} = P^T(Q^*AQ)\bar{P} = P^T Q^*(PBP^*)Q\bar{P} \\ &= (P^*Q\bar{P})^* B (P^*Q\bar{P}) = W^*BW, \end{aligned}$$

где $W = P^*Q\bar{P}$ – унитарная матрица.

Предложение 2. *Пусть $A_i \in \mathcal{U}T_{k_i}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Тогда*

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m \in \mathcal{U}T_n,$$

где $n = k_1 + \cdots + k_m$.

Предложение 3. *Если $A \in \mathcal{U}T$, то и $A^T, \bar{A}, A^* \in \mathcal{U}T$.*

Предложение 4. *Пусть $A \in \mathcal{U}T$. Тогда $f(A) \in \mathcal{U}T$ для любого многочлена f.*

Эти три предложения очевидны.

3. Классы унитарно транспонируемых матриц

Лемма 1. *Всякая матрица $A \in M_2(\mathbf{C})$ унитарно транспонируема.*

Доказательство. Вследствие предложения 1 и теоремы Шура (см. [1, раздел 2.3]), матрицу A можно считать треугольной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

По той же теореме Шура, A^T унитарно подобна некоторой верхнетреугольной матрице B вида

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из равенства фробениусовых норм $\|A\|_F = \|A^T\|_F = \|B\|_F$ имеем

$$|b_{12}| = |a_{12}|,$$

или

$$b_{12} = a_{12}e^{i\phi}, \quad \phi \in (-\pi, \pi].$$

Отсюда следует, что

$$B = D^* A D,$$

где

$$D = \mathrm{diag}\{1,\ e^{i\phi}\}.$$

Итак, B и A^T унитарно подобны матрице A.

Определение. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется унитарно квазидиагонализуемой, если унитарным подобием A можно привести к прямой сумме 1×1- и 2×2-матриц.*

Теорема 2. *Всякая унитарно квазидиагонализуемая матрица унитарно транспонируема.*

Это утверждение является простым следствием предложений 1 и 2 и леммы 1.

Следствие 1. *Всякая нормальная матрица унитарно транспонируема.*

Следствие 2. *Всякая матрица с квадратичным минимальным многочленом унитарно транспонируема.*

Доказательство. Всякая матрица с квадратичным минимальным многочленом унитарно квазидиагонализуема (см. [4, теорема 1]).

Наиболее известными типами матриц с квадратичными минимальными многочленами являются проекторы (т.е. матрицы A, определяемые уравнением $A^2 = A$), инволюции ($A^2 = I$) и нильпотенты индекса два ($A^2 = 0$).

Теперь мы опишем ряд классов UT-матриц, отличных от классов, указанных в следствиях 1 и 2. Отправным пунктом является следующее простое наблюдение: (комплексная) симметричная матрица S очевидным образом унитарно подобна матрице S^T (т.е. себе самой), а потому весь класс $\mathcal{U}S(S)$ состоит из UT-матриц. Итак, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна некоторой симметричной матрице, то $A \in \mathcal{U}T_n$.*

Это наблюдение можно распространить на ряд типов обобщенных симметричных матриц. Пусть $H \in M_n(\mathbf{C})$ – невырожденная эрмитова матрица. С помощью H в $\mathbf{C}^n$ можно ввести (незнакоопределенное) скалярное произведение

$$< x, y >_H = (Hx, y), \tag{6}$$

где $(\cdot,\cdot)$ есть *евклидово* скалярное произведение. Матрицы S, симметричные относительно $< \cdot,\cdot >_H$, должны удовлетворять соотношению

$$HS = S^T H,$$

или

$$S^T = HSH^{-1}. \tag{7}$$

Если H не только эрмитова, но и унитарная матрица, то равенство (7) означает, что $S \in \mathcal{U}T$.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой конструкции.

1. $H = I_k \oplus (-I_l)$, $k + l = n$.

Скалярное произведение, задаваемое такой матрицей H, называется псевдоевклидовым. Соответствующий класс обобщенных симметричных матриц составляют *псевдосимметричные* матрицы. Аналогично теореме 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна некоторой псевдосимметричной матрице, то $A \in \mathcal{U}T_n$.*

2. H – перъединичная матрица, т.е.

$$H = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

В этом случае обобщенные симметричные матрицы называются *персимметричными* и визуально определяются свойством симметрии относительно второй главной диагонали $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$. Персимметричной матрицей является, например, жорданова клетка порядка n – матричный тип, в известном смысле противоположный нормальным матрицам из следствия 1.

Теорема 5. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна некоторой персимметричной матрице, то $A \in \mathcal{U}T_n$.*

3. $n = 2m$ – четное число, $H = iJ$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $J^{-1} = -J$, равенство (7) в данном случае принимает вид

$$S^T = -JSJ. \tag{8}$$

Матрицы, удовлетворяющие соотношению (8), называются *гамильтоновыми*. Если S представлена в блочной форме

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

где все четыре блока имеют порядок m, то

$$S_{22} = -S_{11}^T, \quad S_{12} = S_{12}^T, \quad S_{21} = S_{21}^T.$$

Теорема 6. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна некоторой гамильтоновой матрице, то $A \in \mathcal{U}T_n$.*

4. Совпадение спектральных характеристик

Унитарное подобие сохраняет не только собственные значения, но и метрические соотношения между собственными векторами.

Теорема 7. *Предположим, что $A \in M_n(\mathbf{C})$ имеет простые собственные значения λ_1, λ_2 и соответствующие нормированные собственные векторы q_1, q_2. Пусть $B \in \mathcal{U}S(A)$ и p_1, p_2 – нормированные собственные векторы матрицы B для λ_1, λ_2. Тогда*

$$|(q_1, q_2)| = |(p_1, p_2)|. \tag{9}$$

Доказательство. Если $B = W^*AW$, где W – унитарная матрица, то Wq_1 и Wq_2 являются собственными векторами B соответственно для λ_1 и λ_2. В силу простоты этих собственных значений, Wq_1 и Wq_2 могут отличаться от p_1 и p_2 лишь числовыми множителями модуля 1. Поэтому

$$|(p_1, p_2)| = |(Wq_1, Wq_2)| = |(q_1, q_2)|.$$

Следствие 3. *Предположим, что* $A \in M_n(\mathbf{C})$ *имеет простые собственные значения* λ_1, λ_2 *и соответствующие нормированные правые собственные векторы* q_1, q_2 *и левые собственные векторы* p_1, p_2. *Если* A *унитарно транспонируема, то выполняется равенство* (9).

Применим необходимое условие, сформулированное в следствии 3, к матрице (1). Положим $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, -2, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0, 1, -1)^T,$$

$$p_1 = (1, 0, 0)^T, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, 1, 0)^T,$$

$$|(q_1, q_2)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq |(p_1, p_2)| = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Как и во введении статьи, заключаем, что A не является UT-матрицей.

5. Вещественные UT-матрицы

Если вещественные матрицы A и B унитарно подобны, то подобие между ними можно, в действительности, осуществить посредством *вещественной ортогональной* матрицы. (Доказательство этого факта приведено, например, в [5, раздел 2].)

Пусть A – вещественная UT-матрица и Q – вещественная ортогональная матрица, трансформирующая A в A^T:

$$A^T = Q^T A Q. \tag{10}$$

Представим A в виде

$$A = S + K, \quad S = S^T, \quad K = -K^T. \tag{11}$$

Хорошо известно, что такое представление матрицы A единственно, причем

$$S = \frac{1}{2}\,(A + A^T), \quad K = \frac{1}{2}\,(A - A^T).$$

Подставляя (11) в (10), находим

$$S - K = Q^T S Q + Q^T K Q,$$

откуда
$$S = Q^T S Q, \tag{12}$$
$$K = -Q^T K Q. \tag{13}$$

Предположим теперь, что симметричная матрица S имеет только простые собственные значения:
$$S = P^T \Lambda P, \quad P^T P = I, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\},$$
$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j.$$
В силу предложения 1, можно считать, что $S = \Lambda$ уже в исходной матрице A. Переписывая (12) в виде
$$Q\Lambda = \Lambda Q,$$
заключаем, что матрица Q также должна быть диагональной. В сочетании с ортогональностью, это означает, что на диагонали Q могут стоять лишь плюс и минус единицы. Если $Q = \pm I$, то из (13) получаем $K = 0$, что соответствует случаю симметричной матрицы A. Предположим поэтому, что диагональ матрицы Q содержит и плюс, и минус единицы. Без ограничения общности, можно считать, что
$$Q = I_k \oplus (-I_l), \quad 0 < k, l < n, \quad k + l = n.$$
Соответственно этому разложению Q, представим K в блочном виде
$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ -K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix},$$
где K_{11} – блок размера $k \times k$. Теперь (13) дает
$$K_{11} = 0, \quad K_{22} = 0.$$
Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 8. *Пусть A – вещественная и несимметричная UT-матрица, причем матрица S в представлении (11) имеет только простые собственные значения. Тогда в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы S кососимметричная матрица K должна при некоторых натуральных k и l иметь блочную форму*
$$\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ -K_{12}^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Замечание. Квадрат матрицы (14) есть блочно-диагональная матрица
$$-(K_{12}K_{12}^T \oplus K_{12}^T K_{12}).$$

Таким образом, в условиях теоремы 8 матрицы S и K^2 должны иметь ортогональную пару общих инвариантных подпространств, а именно, линейные оболочки первых k и последних l собственных векторов матрицы S.

Необходимое условие ортогональной транспонируемости, даваемое теоремой 8, проиллюстрируем примером, заимствованным из [6]. Для несимметричной матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
имеем
$$S = \operatorname{diag}\{1, 2, 3\},$$
но матрица
$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
не имеет формы (14) ни при каких k и l $(0 < k, l < 3,\ k + l = 3)$. Следовательно, A не является UT-матрицей.

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1990.
2. Х. Д. Икрамов, *Об унитарном подобии взаимно транспонированных матриц.* — ДАН **378**, No. 5 (2001), 592–593.
3. C. Pearcy, *A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of type* I. — Pacific J. Math. **12** (1962), 1405–1416.
4. Х. Д. Икрамов, *Каноническая форма Шура унитарно квазидиагонализуемой матрицы.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **37** (1997), 1411–1415.
5. Х. Д. Икрамов, *Об одном критерии квазидиагонализуемости вещественных матриц.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **40** (2000), 6–20.
6. J. Vermeer, *Examples concerning orthogonal (unitary) similarity of matrices.* — Linear Algebra Appl. **428** (2008), 382–392.

Ikramov Kh. D. On unitarily transposable matrices.

Matrices $A \in M_n(\mathbf{C})$ such that
$$A^T = Q^* A Q \tag{1}$$

for a certain unitary matrix Q are examined. Several classes of matrices with this property are indicated. Under certain assumptions on A, two conditions necessary for (1) to hold are provided.

Московский
государственный университет
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 19 февраля 2007 г.