Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

Ю. К. Демьянович*, **А. В. Зимин**

ВЭЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ

1. Введение

Аппроксимации на многообразии строились ранее с использованием проекций плоских аппроксимаций, связанных с касательным многообразием (см. [1]). Сплайн-вэйвлетные разложения на равномерных сетках рассматривались в работах [2–4]. В одномерном случае сплайн-вэйвлетные разложения (декомпозиция и реконструкция) на неравномерной сетке построены в [5–6].

В данной работе предлагается общий подход к построению цепочек вложенных пространств сплайнов на гладком (не обязательно компактном) многообразии, базирующийся на аппроксимационных соотношениях; здесь удается получить вэйвлетное разложение в случае произвольного векторного пространства. Полученные результаты иллюстрируются построением вэйвлетного разложения цепочки просранств B_φ-сплайнов (см. [6]) нулевого порядка на гладком многообразии.

2. Аппроксимацонные соотношения

Рассмотрим цепочку векторов $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. Эту цепочку представим в виде матрицы, которую будем обозначать так же, как и цепочку векторов:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots)^T. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathbb{X}(\mathcal{M})$ – линейное пространство измеримых вещественнозначных функций, заданных на некотором s-мерном (возможно, некомпактном) гладком многообразии $\mathcal{M}$. Зададим вектор-функцию $\varphi: \quad \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами $[\varphi]_j(t)$, $t \in \mathcal{M}$, такими

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 07-01-00451 и 07-01-00269.

что $[\varphi]_j \in \mathbb{X}(\mathcal{M})$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Пусть функции $\omega_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют соотношению

$$\omega^T(t)A = \varphi(t), \tag{2.2}$$

где

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \ldots)^T. \tag{2.3}$$

Соотношение (2.2) будем называть *аппроксимационным соотношением.*

Наряду с вектор-функцией (2.3) рассмотрим вектор-функцию

$$\overline{\omega}(t) = (\ldots, \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \ldots)^T,$$

удовлетворяющую (вообще говоря, другому) аппроксимационному соотношению (с той же правой частью)

$$\overline{\omega}^T(t)\overline{A} = \varphi(t), \tag{2.4}$$

где

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{\mathbf{a}}_{-1}, \overline{\mathbf{a}}_0, \overline{\mathbf{a}}_1, \ldots)^T, \quad \overline{\mathbf{a}}_j \in \mathbb{R}^{m+1}. \tag{2.5}$$

Лемма 1. *Если $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – линейно независимые системы функций, то*

$$A = g(\overline{\omega}^T\overline{A}), \quad \overline{g}(\omega^T A) = \overline{A}; \tag{2.6}$$

здесь $g \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, g^{(-1)}, g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots)^T$ и $\overline{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{g}^{(-1)}, \overline{g}^{(0)}, \overline{g}^{(1)}, \ldots)^T$ – системы функционалов, биортогональные системам $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, так что

$$g\omega^T = I, \quad \overline{g}\,\overline{\omega}^T = I. \tag{2.7}$$

Доказательство. Приравнивая левые части соотношений (2.2) и (2.4), имеем

$$\omega^T A = \overline{\omega}^T\overline{A}. \tag{2.8}$$

Умножая (2.8) на векторы g и $\overline{g}$, ввиду (2.7), получаем первое и второе из равенств (2.6) соответственно. □

Следствие 1. *В условиях леммы 1 справедливы соотношения*

$$A = g(\overline{\omega}^T(\overline{g}(\omega^T A))), \quad \overline{g}(\omega^T(g(\overline{\omega}^T\overline{A})) = \overline{A}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Соотношения (2.9) получаются взаимными подстановками в равенствах (2.6). □

Замечание. Если известно, что выполнено калибровочное соотношение $\omega = \mathfrak{P}\overline{\omega}$ с матрицей $\mathfrak{P}$, то умножая его эквивалентную запись

$$\omega^T = \overline{\omega}^T \mathfrak{P}^T \tag{2.10}$$

на вектор-столбец функционалов g слева, ввиду первого из соотношений (2.7), находим

$$I = g(\overline{\omega}^T \mathfrak{P}^T). \tag{2.11}$$

Если компоненты вектор-столбца g определены на $\overline{\omega}^T$, то полагая $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} g\overline{\omega}^T$, из (2.11) выводим $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, откуда следует, что матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$; кроме того, умножая (2.10) слева на вектор-столбец $\overline{g}$, получаем $\mathfrak{P}^T = \overline{g}\omega^T$.

3. Оснащенные семейства подмножеств

Предположим, что $\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – семейство подмножеств многообразия $\mathcal{M}$, каждое из которых гомеоморфно открытому s-мерному шару.

Определение 1. *Для фиксированной точки $t \in \mathcal{M}$ число κ_t элементов множества $\{j \mid t \in \mathfrak{S}_j\}$ называется кратностью накрытия точки t семейством $\mathfrak{S}$.*

Пусть семейство $\mathfrak{S}$ таково, что для почти всех точек $t \in \mathcal{M}$ справедливо равенство

$$\kappa_t = m + 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Для каждой точки $t \in \mathcal{M}$ со свойством (3.1) рассмотрим содержащее ее множество $\mathfrak{C}_{(t)}$, являющееся пересечением всех множеств $\mathfrak{S}_j$ из $\mathfrak{S}$. Очевидно, что множество $\mathfrak{C}_{(t)}$ гомеоморфно открытому шару и состоит из точек, удовлетворяющих свойству (3.1), а множество $\mathfrak{C}$ различных множеств $\mathfrak{C}_{(t)}$ для упомянутых t счетно, так что в дальнейшем их перенумеруем и обозначим $\mathfrak{C}_k$; итак, $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и, кроме того, справедливы соотношения

$$\mathfrak{C}_{k'} \cap \mathfrak{C}_{k''} = \emptyset \quad \text{при} \quad k' \neq k'',\ k', k'' \in \mathbb{Z},$$

$$Cl\,(\mathfrak{S}_j) = Cl\left(\bigcup_{\mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{S}_j} \mathfrak{C}_k\right), \quad Cl\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_k\right) = Cl\,(\mathcal{M}), \tag{3.2}$$

где символ Cl означает замыкание.

Определение 2. *Говорят, что семейство подмножеств* $\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *множества* $\mathcal{M}$ *оснащено полной системой векторов* $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ *пространства* $\mathbb{R}^{m+1}$, *если для почти всех точек* $t \in \mathcal{M}$ *система векторов*

$$A_t \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid t \in \mathfrak{S}_j\} \tag{3.3}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^{m+1}$; *в этом случае система векторов* A *называется полным оснащением семейства* $\mathfrak{S}$.

Из (3.1)–(3.3) следует, что если A – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$, то при фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ верны соотношения

$$A_{t'} = A_{t''} \quad \text{при} \quad t', t'' \in \mathfrak{C}_k, \tag{3.4}$$

благодаря чему можно ввести обозначение

$$A_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} A_t \quad \text{при} \quad t \in \mathfrak{C}_k. \tag{3.5}$$

4. Пространства сплайнов. Вложенность пространств

Функции $\omega_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}$, почти везде удовлетворяющие соотношениям

$$\omega^T(t)A = \varphi(t), \quad \omega_j = 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j, \tag{4.1}$$

называются $(A, \varphi, \mathfrak{S})$-*сплайнами* $(m+1)$-*го порядка;* здесь

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \dots)^T. \tag{4.2}$$

Теорема 1. *Если цепочка* A *является полным оснащением семейства* $\mathfrak{S}$, *то в пространстве* $\mathbb{X}(\mathcal{M})$ *существует единственная вектор-функция* (4.2), *удовлетворяющая соотношениям* (4.1).

Доказательство. В соответствии с определением множества $A_{(k)}$ (см. также формулы (3.4)–(3.5)), из (4.1) имеем

$$\sum_{\mathbf{a}_j \in A_{(k)}} \mathbf{a}_j \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathfrak{C}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Поскольку по определению полного оснащения множество векторов $\{\mathbf{a}_j \mid \mathbf{a}_j \in A_{(k)}\}$ является базисом в $\mathbb{R}^{m+1}$, матрица системы (4.3) неособенная, так что неизвестные $\omega_j(t)$, рассматриваемые при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{C}_k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$, определяются однозначно. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 линейная независимость компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на клетке $\mathfrak{C}_k$ эквивалентна линейной независимости системы функций $\{\omega_j(t) \mid \mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{S}_j\}$ на этой клетке.*

Доказательство вытекает из системы (4.3), т.к. в условиях теоремы 1 матрица упомянутой системы неособенная. $\square$

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 1 компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ линейно независимы на каждой клетке $\mathfrak{C}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, то система функций $\{\omega_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – линейно независимая система.*

Доказательство. Рассматривая равенство $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j(t) \equiv 0$ при $t \in \mathfrak{C}_k$, видим, что в сумме останутся лишь слагаемые с теми индексами j, которые принадлежат множеству $\{j \mid \mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{S}_j\}$. Из-за неособенности матрицы системы (4.3) и благодаря линейной независимости компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на клетке $\mathfrak{C}_k$, приходим к выводу, что все коэффициенты c_j с упомянутыми индексами равны нулю. Поскольку для каждого $j \in \mathbb{Z}$ найдется такое $k = k(j)$, что $\mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{S}_j$, то все коэффициенты c_j окажутся равными нулю. $\square$

Теорема 4. *Пусть цепочка A – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$, а матрица $\mathfrak{P}$ такова, что при*

$$\mathfrak{P}^T A = \overline{A} \tag{4.4}$$

существует вектор-функция $\overline{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \dots)^T$ со свойствами

$$\overline{\omega}^T(t)\overline{A} = \varphi(t), \quad [\mathfrak{P}\overline{\omega}]_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Тогда справедливо калибровочное соотношение

$$\omega(t) \equiv \mathfrak{P}\overline{\omega}(t). \tag{4.6}$$

Доказательство. Подставляя (4.4) в первое из соотношений (4.5), имеем $\overline{\omega}^T(t)\mathfrak{P}^T A = \varphi(t)$, так что $(\mathfrak{P}\overline{\omega}(t))^T A = \varphi(t)$. Отсюда, ввиду второго из соотношений (4.5) и однозначной разрешимости задачи (4.1), получаем (4.6). $\square$

Лемма 2. *Если ω и $\overline{\omega}$ удовлетворяют соотношениям*

$$\omega^T A = \varphi, \quad \overline{\omega}^T \overline{A} = \varphi, \tag{4.7}$$

соответственно, а система функционалов $\overline{g}$ биортогональна системе функций $\overline{\omega}^T$, т.е.

$$\overline{g}\,\overline{\omega}^T = I, \tag{4.8}$$

то матрица

$$\mathfrak{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{g}\omega^T)^T \tag{4.9}$$

удовлетворяет условию

$$\mathfrak{P}^T A = \overline{A}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Из (4.7) имеем

$$\omega^T(t)A = \overline{\omega}^T(t)\overline{A}. \tag{4.11}$$

Применяя $\overline{g}$ к (4.11) и используя (4.8), находим: $\overline{g}\omega^T(t)A = \overline{A}$, так что с учетом обозначения (4.9) получаем (4.10). □

Предположим, что кроме семейства $\mathfrak{S}$ на многообразии $\mathcal{M}$ имеется еще одно семейство подмножеств $\overline{\mathfrak{S}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\mathfrak{S}}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, и $\overline{A}$ – его полное оснащение.

Из теоремы 4 и леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Если A и $\overline{A}$ – полные оснащения систем $\mathfrak{S}$ и $\overline{\mathfrak{S}}$, $\varphi(t)$ – вектор-функция с линейно независимыми компонентами на соответствующих им клетках $\mathfrak{C}_k$ и $\overline{\mathfrak{C}}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, а матрица $\mathfrak{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{g}\omega^T)^T$ удовлетворяет второму из соотношений* (4.5), *то справедливо калибровочное соотношение* (4.6).

5. О вэйвлетном разложении линейных пространств

В вещественном векторном пространстве $\mathbb{L}$ рассмотрим две системы элементов $\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\overline{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$; пусть система ω состоит из линейно независимых элементов.

Предположим, что

(A) *выполнены соотношения*

$$\omega_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_{ij}\overline{\omega}_j \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

где при каждом фиксированном $i \in \mathbb{Z}$ множества $\{\mathfrak{p}_{ij} \mid \mathfrak{p}_{ij} \neq 0, j \in \mathbb{Z}\}$ конечны[1] *и $\mathfrak{p}_{ij} \in \mathbb{R}^1$.*

[1] В дальнейшем все рассматриваемые суммы имеют конечное число ненулевых слагаемых.

Соотношения (5.1) называются *калибровочными соотношениями в пространстве* $\mathbb{L}$. В дальнейшем системы ω и $\overline{\omega}$ будем представлять в виде бесконечных одностолбцовых матриц

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)^T, \quad \overline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \overline{\omega}_{-1}, \overline{\omega}_0, \overline{\omega}_1, \dots)^T;$$

запишем калибровочные соотношения в виде

$$\omega = \mathfrak{P}\overline{\omega}, \tag{5.2}$$

где $\mathfrak{P}$ – (бесконечная) матрица из элементов $\mathfrak{p}_{ij}$, $\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

Обозначим $g \stackrel{\text{def}}{=} \{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ систему линейных функционалов, биортогональную системе ω, так что $\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; записывая систему g в виде одностолбцовой матрицы $g \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, g_{-1}, g_0, g_1, \dots)^T$, указанное свойство биортогональности представим в форме

$$g\ \omega^T = I; \tag{5.3}$$

здесь $I = (\delta_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – единичная матрица.

Рассмотрим пространства $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}})$, и $\overline{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}})$, где символ $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку перечисленных векторов. Ввиду предположения (A), верно соотношение $\mathbb{S} \subseteq \overline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{L}$.

Пусть выполнено следующее условие:

(B) *существуют линейные продолжения фунционалов g_i на пространство $\overline{\mathbb{S}}$ такие, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ количество ненулевых элементов во множестве $\{\langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle\}_{i\in\mathbb{Z}}$ конечно.*

Теорема 6. *Если выполнены предположения* (A)–(B), *то матрица $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} g\overline{\omega}^T$ с элементами $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle$, $i, j \in \mathbb{Z}$, является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$.*

Доказательство. Транспонируем соотношение (5.2) и умножим его на одностолбцовую матрицу g слева; с учетом формулы (5.3) и предположения (B) находим $I = g\overline{\omega}^T\ \mathfrak{P}^T$; последнее эквивалентно равенству

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I. \tag{5.4}$$

Теорема доказана. □

Определим линейную операцию проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\overline{\mathbb{S}}$ на $\mathbb{S}$ равенством

$$\mathcal{P}\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle g_i, \overline{u}\rangle\, \omega_i \quad \forall \overline{u} \in \overline{\mathbb{S}} \tag{5.5}$$

и введем линейное пространство $\mathbb{W} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{I} - P)\,\overline{\mathbb{S}}$, где $\mathcal{I}$ – тождественная операция. Очевидно, что пространство $\overline{\mathbb{S}}$ может быть представлено в виде прямой суммы: $\overline{\mathbb{S}} = \mathbb{S}\dot{+}\mathbb{W}$. Эта формула дает вэйвлетное разложение пространства $\overline{\mathbb{S}}$; первое слагаемое в этом разложении называем *основным* пространством, а второе – *вэйвлетным* пространством.

Пусть $\mathbb{R}_0^\infty$ – пространство бесконечных последовательностей $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ с конечным числом ненулевых элементов $c_j \in \mathbb{R}^1$; будем представлять их вектор-столбцами $\mathbf{c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots)^T$. Если элемент $\overline{u}$ лежит в пространстве $\overline{\mathbb{S}}$, то с некоторыми коэффициентами $\overline{c}_j \in \mathbb{R}^1$ верно равенство $\overline{u} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{\omega}_j \overline{c}_j$; полагая $\overline{\mathbf{c}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, \overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \dots)^T$ запишем это в виде $\overline{u} = \overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}}, \quad \overline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}_0^\infty$.

Предположим, что

(C) *система* $\{\overline{\omega}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *состоит из линейно независимых векторов.*

Пусть $\{\overline{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – система линейных функционалов со свойством $\langle \overline{g}_i, \overline{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}$; последнее с помощью обозначения $\overline{g} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\dots, \overline{g}_{-1}, \overline{g}_0, \overline{g}_1, \dots)^T$ запишем в виде

$$\overline{g}\,\overline{\omega}^T = I. \tag{5.6}$$

Теорема 7. *Пусть выполнены предположения* (A)–(C), *а элемент* $\overline{u} \in \overline{\mathbb{S}}$ *представлен в виде суммы* $\overline{u} = u + w$, *где* $u \in \mathbb{S}$, $w \in \mathbb{W}$. *Тогда для векторов* $\overline{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{b}$, *составленных из коэффициентов разложения элементов* $\overline{u}$, u, w *по базисам,* $\overline{u} = \overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}}$, $u = \omega^T\mathbf{c}$, $w = \overline{\omega}^T\mathbf{b}$, *справедливы формулы декомпозиции*

$$\mathbf{c} = \mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}}, \quad \mathbf{b} = \overline{\mathbf{c}} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}} \tag{5.7}$$

и формулы реконструкции

$$\overline{\mathbf{c}} = \mathfrak{P}^T\mathbf{c} + \mathbf{b}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Из определения (5.5) для $u = \omega^T\mathbf{c}$ имеем

$$u = \mathcal{P}\overline{u} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega_i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle \overline{c}_j = \omega^T\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}},$$

откуда, ввиду единственности разложения по базису ω, выводим первое из соотношений (5.7). Из (5.2) и (5.6) получаем

$\overline{g}\omega^T = \overline{g\omega}^T\mathfrak{P}^T$, откуда $\mathfrak{P}^T = \overline{g}\omega^T$. Переписывая представление $\overline{u} = u + w$ в виде $\overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}} = \omega^T\mathbf{c} + \overline{\omega}^T\mathbf{b}$ и умножая последнее соотношение слева на $\overline{g}$, а затем используя определение матрицы $\mathfrak{Q}$ и равенство (5.6), находим (5.8). Подставляя в формулу (5.8) только что установленное первое из соотношений (5.7), получаем второе соотношение в (5.7). Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Пространство вэйвлетов* $\mathbb{W}$ *представимо в виде*

$$\mathbb{W} = \{w \mid w = \overline{\omega}^T\mathbf{b} \quad \forall\mathbf{b} \in \ker\mathfrak{Q}\}, \tag{5.9}$$

где $\ker\mathfrak{Q}$ *– множество векторов пространства* $\mathbb{R}_0^\infty$, *преобразуемых матрицей* $\mathfrak{Q}$ *в нуль.*

Доказательство соотношения (5.9) легко получается применением матрицы $\mathfrak{Q}$ ко второму соотношению в (5.7) и использованием формулы (5.4). $\square$

6. Некоторые варианты вэйвлетных разложений при $m = 0$

Пусть упомянутое выше семейство $\{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ подмножеств s-мерного гладкого многообразия $\mathcal{M}$ таково, что для почти всех точек $t \in \mathfrak{S}_j$ справедливо равенство

$$\kappa_t = 1. \tag{6.1}$$

В рассматриваемом случае связные множества точек t со свойством (6.1) совпадают с одним из множеств семейства $\{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, так что, используя прежние обозначения, имеем $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{S}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, и, кроме того,

$$\mathfrak{C}_{k'} \cap \mathfrak{C}_{k''} = \emptyset \quad \text{при} \quad k' \neq k'',\ k', k'' \in \mathbb{Z}, \quad Cl\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_k\right) = Cl\,(\mathcal{M}). \tag{6.2}$$

Нетрудно видеть, что в данном случае любая последовательность $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ненулевых чисел b_j может рассматриваться как оснащение семейства $\{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (одномерными) векторами.

Предположим, что на многообразии $\mathcal{M}$ имеется два семейства подможеств $\{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\overline{\mathfrak{S}}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$ со свойствами (6.1)–(6.2), причем второе из них является измельчением первого, т.е. для каждого $j' \in \mathbb{Z}$ существует $j \in \mathbb{Z}$, так что $\overline{\mathfrak{S}}_{j'} \subseteq \mathfrak{S}_j$.

В предыдущей схеме вместо цепочек векторов рассмотрим последовательности из вещественных чисел $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\overline{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Эти последовательности представим в виде одностолбцовых матриц

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)^T, \quad \overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \overline{a}_{-1}, \overline{a}_0, \overline{a}_1, \dots)^T.$$

В рассматриваемом случае φ – скалярная функция, $\varphi \in \mathbb{X}(\mathcal{M})$.

6.1. Пусть $A = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)^T$ состоит из ненулевых компонент; тогда задача об определении вектор-функции

$$\omega(t) = (\dots, \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \dots)^T$$

из соотношений

$$\omega^T(t)A = \varphi(t), \quad \omega_i = 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_i$$

имеет единственное решение:

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \varphi(t)/a_i & \text{при } \ t \in \mathfrak{S}_i, \\ 0 & \text{при } \ t \notin \mathfrak{S}_i. \end{cases}$$

6.2. Предположим, что выполнено условие

(D) *существует решение $\overline{\omega}(t)$ задачи*

$$\overline{\omega}^T(t)\overline{A} = \varphi(t), \quad \omega_j = 0 \quad \forall t \notin \overline{\mathfrak{S}}_j, \tag{6.3}$$

где

$$\overline{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \dots)^T.$$

Условие (D) означает, что если $\overline{a}_j = 0$, то $\varphi(t) \equiv 0$ $\forall t \in \overline{\mathfrak{S}}_j$. В частности, решением является вектор-функция $\overline{\omega}$ с компонентами

$$\overline{\omega}_j(t) = \begin{cases} \varphi(t)/\overline{a}_j & \text{при } \ \overline{a}_j \neq 0 \text{ и } \ t \in \overline{\mathfrak{S}}_j, \\ 0 & \text{при } \ a_j = 0 \text{ или при } \ t \notin \overline{\mathfrak{S}}_j. \end{cases} \tag{6.4}$$

6.3. Нетрудно видеть, что калибровочные соотношения для функций ω_i и $\overline{\omega}_j$ имеют вид

$$\omega_i(t) = \frac{1}{a_i} \sum_{\{j \mid \overline{\mathfrak{S}}_j \subseteq \mathfrak{S}_i\}} \overline{a}_j \overline{\omega}_j(t) \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

так что матрица $\mathfrak{P}$ такова:

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{ij}), \quad \mathfrak{p}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{a}_j / a_i & \text{при } \ \overline{\mathfrak{S}}_j \subseteq \mathfrak{S}_i, \\ 0 & \text{при } \ \overline{\mathfrak{S}}_j \nsubseteq \mathfrak{S}_i. \end{cases} \tag{6.5}$$

6.4. Применим теперь $\mathfrak{P}^T$ к одностолбцовай матрице A:

$$\mathfrak{P}^T A = \mathfrak{P}^T \begin{pmatrix} \dots \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ \dots \end{pmatrix};$$

в результате получаем

$$[\mathfrak{P}^T A]_j = \sum_i \mathfrak{p}_{ij} a_i = \sum_{\overline{\mathfrak{S}}_j \subseteq \mathfrak{S}_i} \mathfrak{p}_{ij} a_i. \tag{6.6}$$

Сумма в правой части соотношения (6.6) содержит лишь одно слагаемое, поскольку при фиксированном j существует и при том только одно множество $\mathfrak{S}_i$, содержащее множество $\overline{\mathfrak{S}}_j$. Пусть это множество имеет индекс $i_0 = i_0(j)$, так что $[\mathfrak{P}^T A]_j = \mathfrak{p}_{i_0 j} a_{i_0}$; ввиду формулы (6.5), отсюда находим $[\mathfrak{P}^T A]_j = \overline{a}_j \ \forall j \in \mathbb{Z}$, а это эквивалентно равенству $\mathfrak{P}^T A = \overline{A}$.

6.5. Предположим, что

$$\varphi(t) \neq 0 \ \text{ почти везде на } \ \mathcal{M}. \tag{6.7}$$

В этом случае, очевидно, система $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ является линейно независимой, и поэтому существует биортогональная к ней система линейных функционалов $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Для рассматриваемой системы $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ из (6.3) получаем $\langle g^{(i)}, \varphi \rangle = a_i$.

Определение 3. *Говорят, что носитель функционала f содержится в множестве $M \subset \mathcal{M}$, если результат его применения к любой функции u из рассматриваемого линейного пространства $\mathbb{X}(\mathcal{M})$ полностью определяется значениями этой функции на множестве M; при этом будем писать* $\operatorname{supp} f \subset M$.

Предположим, что выполнено условие

(E) функционалы упомянутой системы $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ распространены на пространство $\mathbb{X}(\mathcal{M})$ так, что существует целочисленная функция $\chi(i)$, заданная на множестве $i \in \mathbb{Z}$, для которой справедливо соотношение

$$\operatorname{supp} g^{(i)} \subset \overline{\mathfrak{C}}_{\chi(i)} \subset \mathfrak{C}_i. \tag{6.8}$$

Используя (6.8), из (6.4) получим

$$\langle g^{(i)}, \overline{\omega}_j \rangle = \begin{cases} \langle g^{(i)}, \varphi \rangle / \overline{a}_j = a_i / \overline{a}_j & \text{при } \ j = \chi(i), \\ 0 & \text{при } \ j \neq \chi(i). \end{cases}$$

Определяя матрицу $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}_{ij})$ равенством $\mathfrak{Q} = g\overline{\omega}^T$, имеем

$$\mathfrak{q}_{ij} = \langle g^{(i)}, \overline{\omega}_j \rangle = \begin{cases} a_i / \overline{a}_j & \text{при } \ j = \chi(i), \\ 0 & \text{при } \ j \neq \chi(i). \end{cases}$$

Рассмотрим произведение матриц $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$. Обозначая $[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{ij}$ элемент i-й строки и j-го столбца этого произведения, находим

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{ij} = \sum_s \mathfrak{q}_{is}\mathfrak{p}_{js} = \sum_{s=\chi(i)} \mathfrak{q}_{is}\mathfrak{p}_{js} = \mathfrak{q}_{i\chi(i)}\mathfrak{p}_{j\chi(i)}.$$

В соответствии с формулой (6.5) для $\mathfrak{p}_{j\chi(i)}$ имеем

$$\mathfrak{p}_{j\chi(i)} = \begin{cases} \overline{a}_{\chi(i)} / a_j & \text{при } \ \overline{\mathfrak{S}}_{\chi(i)} \subseteq \mathfrak{S}_j, \\ 0 & \text{при } \ \overline{\mathfrak{S}}_{\chi(i)} \nsubseteq \mathfrak{S}_j. \end{cases}$$

Заметим, что ввиду предположения (E) справедлива эквивалентность

$$\overline{\mathfrak{S}}_{\chi(i)} \subseteq \mathfrak{S}_j \quad \Longleftrightarrow \quad i = j,$$

так что окончательно получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{ij} = \begin{cases} (a_i/\overline{a}_{\chi(i)})(\overline{a}_{\chi(i)}/a_i) & \text{при } \ \mathfrak{S}_{\chi(i)} \subseteq \mathfrak{S}_j \\ 0 & \text{при } \ \mathfrak{S}_{\chi(i)} \nsubseteq \mathfrak{S}_j \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{при } \ i = j, \\ 0 & \text{при } \ i \neq j. \end{cases}$$

Итак, матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T : \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$. Если выполнено условие (D) и предположение (6.7), то система $\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ также линейно независимая, и потому существует биортогональная ей система линейных функционалов $\{\overline{g}^{(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$; для нее верны соотношения $\langle \overline{g}^{(j)}, \varphi \rangle = \overline{a}_j$.

Нетрудно видеть, что

$$\ker \mathfrak{Q} = \mathcal{L}\left\{\mathbf{e}^{(j)} \mid j \notin \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \chi(i)\right\},$$

где $\mathbf{e}^{(j)}$ – вектор-столбец с компонентами $\delta_{i,j} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Итак, вэйвлетное пространство может быть представлено равенством

$$W = \{w \mid w = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{c}_i \overline{\omega}_i \quad \forall \overline{\mathbf{c}} \in \ker \mathfrak{Q}\}.$$

Литература

1. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб., 1994.
2. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М., 2005.
3. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* М., 2005.
4. J. Maes, A. Bultheel, *Stability analysis of biorthogonal multiwavelets whose duals are not in L2 and its application to local semiorthogonal lifting.* — Applied Numerical Mathematics (2007), doi:10.1016/j.apnum.2007.06.002.
5. Ю. К. Демьянович, *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения.* — Доклады РАН **401**, No. 4 (2005), 1–4.
6. Ю. К. Демьянович, *Вложенность и всплесковые представления пространств минимальных сплайнов.* — Пробл. матем. анализа **35** (2007), 13–41.

Demjanovich Yu. K., Zimin A. V. Wavelet decompositions on a manifold.

A general method for constructing chains of embedded spline spaces on a smooth (not necessarily compact) manifold is suggested. A wavelet decomposition is obtained for the case of an arbitrary vector space. The results are illustrated by constructing a wavelet decompositon of a chain of embedded spaces of B_φ-splines of zero order on a smooth manifold.

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: Yuri.Demjanovich@paloma.spbu.ru

Поступило 1 декабря 2007 г.