Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 346, 2007 г.

М. Гасеми Камалванд, Х. Д. Икрамов

СОПРЯЖЕННО-НОРМАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ С СОПРЯЖЕННО-НОРМАЛЬНЫМИ ПОДМАТРИЦАМИ

1. Представим матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ $(n \geqslant 3)$ в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D^* & E \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $B \in M_m(\mathbf{C})$ $(1 < m < n)$ и C, D – матрицы размера $m \times (n-m)$. Для нормальной матрицы A, не являющейся эрмитовой или косоэрмитовой, нормальность подматрицы B представляет собой весьма нестандартную ситуацию, немало говорящую о частичной структуре A или ее структуре в целом. Например, в контексте приведения A к форме Хессенберга H посредством алгоритма Арнольди, Т. Хукле обнаружил следующее обстоятельство (см. [1]): если H неразложима и ее ведущая главная подматрица H_m $(1 < m < n)$ нормальна, то в действительности H – трехдиагональная матрица. В [2] этот факт был оформлен и доказан как чисто теоретико-матричная теорема, без какого-либо упоминания о методе Арнольди.

Будем теперь вместо унитарных подобий рассматривать унитарные конгруэнции, т.е. преобразования вида

$$A \to Q^T A Q, \quad Q^* Q = I.$$

Вводя незначительные изменения в стандартный процесс приведения к форме Хессенберга посредством отражений или вращений, несложно показать, что всякую комплексную матрицу можно привести к форме Хессенберга и с помощью последовательности элементарных унитарных конгруэнций. Применим такую последовательность к сопряженно-нормальной матрице A, т.е. к матрице, удовлетворяющей соотношению

$$AA^* = \overline{A^* A}. \tag{2}$$

Этот класс матриц играет в теории унитарных конгруэнций такую же роль, какую обычные нормальные матрицы выполняют по отношению к унитарным подобиям. В частности, свойство сопряженной нормальности (2) сохраняется унитарными конгруэнциями.

Предположим, что хессенбергова матрица, полученная в результате приведения сопряженно-нормальной матрицы A, неразложима и имеет сопряженно-нормальную ведущую главную подматрицу порядка m $(1 < m < n)$. Наша цель – доказать утверждение, аналогичное теореме Хукле. Будем считать, что уже сама матрица A хессенбергова.

Теорема 1. *Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ $(n \geqslant 3)$ – сопряженно-нормальная матрица, имеющая неразложимую форму Хессенберга (для определенности, верхнюю). Если ее ведущая главная подматрица порядка m $(1 < m < n)$ также является сопряженно-нормальной, то в действительности A – трехдиагональная матрица.*

Доказательство теоремы дано ниже, в разделе 2.

2. Представим A в блочном виде (1). Тогда, с учетом условия

$$BB^* = \overline{B^*B}, \tag{3}$$

определение (2) эквивалентно трем матричным соотношениям

$$CC^* = \overline{DD^*}, \tag{4}$$

$$BD + CE^* = \overline{B^*C} + \overline{DE}, \tag{5}$$

$$D^*D + EE^* = \overline{C^*C} + \overline{E^*E}. \tag{6}$$

Поскольку A – неразложимая хессенбергова матрица, то блок D имеет единственный ненулевой элемент в позиции $(m, 1)$. Покажем, что то же устройство имеет блок C.

Заметим, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 2-норма строки i равна 2-норме столбца i. (Это следует из равенства диагональных элементов $\{AA^*\}_{ii}$ и $\{\overline{A^*A}\}_{ii}$.) То же самое, конечно, верно и для подматрицы B. Поэтому, считая что $1 \leqslant i \leqslant m-1$, находим

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^2 = \sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2 = \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

откуда

$$a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \ j = m+1, \dots, n.$$

Итак, “правые” части первых $m-1$ строк матрицы A суть нулевые подвекторы. Напротив, в строках $m+2,\dots,n$ нулевыми подвекторами являются “левые части” (соответствующие позициям $1 \leqslant j \leqslant m$). Это означает, в частности, что

$$\{AA^*\}_{m-1,j} = 0, \quad j = m+2,\dots,n.$$

Но тогда

$$\{\overline{A^*A}\}_{m-1,j} = a_{m,m-1}\bar{a}_{mj} = 0, \quad j = m+2,\dots,n.$$

Поскольку $a_{m,m-1} \neq 0$ в силу неразложимости A, имеем

$$a_{mj} = 0, \quad j = m+2,\dots,n.$$

Мы показали, что $a_{m,m+1}$ – единственный ненулевой элемент блока C. Теперь из равенства 2-норм строки m и столбца m в матрице A заключаем, что

$$|a_{m,m-1}|^2 + |a_{m,m+1}|^2 = \sum_{j=1}^{m-1} |a_{jm}|^2 + |a_{m+1,m}|^2. \tag{7}$$

Аналогичное равенство для подматрицы B дает

$$|a_{m,m-1}|^2 = \sum_{j=1}^{m-1} |a_{jm}|^2. \tag{8}$$

Сличая (7) и (8), получаем

$$|a_{m,m+1}| = |a_{m+1,m}|. \tag{9}$$

Отсюда

$$D^*D = \overline{C^*C} \tag{10}$$

(обе матрицы имеют единственный ненулевой элемент в позиции (1,1), равный $|a_{m+1,m}|^2 = |a_{m,m+1}|^2$). Подставляя (10) в (6), видим, что подматрица E также сопряженно-нормальная.

Считая, что $m < n-1$, покажем, что сопряженно-нормальной является и ведущая главная подматрица B_{m+1}. В самом деле, равенство

$$\{B_{m+1}B_{m+1}^*\}_{m+1,m+1} = \{\overline{B_{m+1}^*B_{m+1}}\}_{m+1,m+1}$$

вытекает из (9), а для остальных пар (i,j) имеем

$$\{B_{m+1}B^*_{m+1}\}_{ij} = \{AA^*\}_{ij} = \{\overline{A^*A}\}_{ij} = \{\overline{B^*_{m+1}B_{m+1}}\}_{ij}.$$

Итак, из сопряженной нормальности подматрицы B мы вывели аналогичное свойство подматрицы B_{m+1} и трехдиагональное строение последнего столбца этой подматрицы. Применяя аналогичное рассуждение к B_{m+1}, затем к B_{m+2}, и т.д., мы покажем, что все столбцы A, начиная с $(m+1)$-го, имеют трехдиагональный вид.

Остается проверить трехдиагональность самой подматрицы B. В столбце $m+1$ матрицы B_{m+1} отличны от нуля только два последних элемента, поэтому

$$\{B^*_{m+1}B_{m+1}\}_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, m-2.$$

Отсюда следует, что

$$b_{m+1,m}\bar{b}_{jm} = \{B_{m+1}B^*_{m+1}\}_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, m-2,$$

т.е.

$$b_{jm} = 0, \quad j = 1, \dots, m-2.$$

Таким образом, сопряженная нормальность подматрицы B_{m+1} влечет за собой трехдиагональность последнего столбца в B. Покажем, что ведущая главная подматрица B_{m-1} также является сопряженно-нормальной. Это позволит применить рассуждения, аналогичные приведенным выше, к парам (B, B_{m-1}), затем (B_{m-1}, B_{m-2}), и т.д., чем, в конечном счете, будет установлена трехдиагональность B.

Из соотношений

$$\{BB^*\}_{mm} = \{\overline{B^*B}\}_{mm}$$

и

$$\{BB^*\}_{m-1,m-1} = \{\overline{B^*B}\}_{m-1,m-1}$$

заключаем, что

$$|a_{m,m-1}| = |a_{m-1,m}|$$

и

$$|a_{m-1,m-2}|^2 = \sum_{j=1}^{m-2} |a_{j,m-1}|^2,$$

т.е.

$$\{B_{m-1}B^*_{m-1}\}_{m-1,m-1} = \{\overline{B^*_{m-1}B_{m-1}}\}_{m-1,m-1}.$$

Учитывая хессенбергову форму B и трехдиагональность ее последнего столбца, видим, что для остальных пар (i,j) имеют место равенства

$$\{B_{m-1}B^*_{m-1}\}_{ij} = \{BB^*\}_{ij} = \{\overline{B^*B}\}_{ij} = \{\overline{B^*_{m-1}B_{m-1}}\}_{ij}.$$

Итак, сопряженная нормальность подматрицы B_{m-1} установлена, чем и доказана теорема в целом.

Литература

1. T. Huckle, *The Arnoldi method for normal matrices.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **15**, No. 2 (1994), 479–489.
2. Х. Д. Икрамов, Л. Эльзнер, *О нормальных матрицах с нормальными главными подматрицами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 63–94.

Ghasemi Kamalvand M., Ikramov Kh. D. Conjugate-normal matrices with conjugate-normal submatrices.

In studying the reduction of a complex $n\times n$ matrix A to its Hessenberg form by the Arnoldi algorithm, T. Huckle discovered that an irreducible Hessenberg normal matrix with a normal leading principal $m \times m$ submatrix, where $1 < m < n$, actually is tridiagonal. We prove a similar assertion for the conjugate-normal matrices, which play the same role in the theory of unitary congruences as the conventional normal matrices in the theory of unitary similarities. This fact is stated as a purely matrix-theoretic theorem, without any reference to Arnoldi-like algorithms.

Университет Лорестана,
Хоррамабад, Иран
E-mail: m_ghasemi98@yahoo.com

Поступило 18 февраля 2007 г.

Московский государственный
университет
E-mail: ikramov@cs.msu.su