Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

Д. В. Максимов

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ГАЛЬЯРДО

1. Введение

В работе [1] одним из ключевых технических моментов была следующая теорема вложения. Пусть $u_1, \dots, u_\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Обозначим $\varphi_0 = -\partial_2 u_1$, $\varphi_j = -\partial_2 u_{j+1} + \partial_1 u_j$ $(1 \le j \le \ell - 1)$, $\varphi_\ell = \partial_1 u_\ell$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\ell} ||u_j||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C \cdot \sum_{j=0}^{\ell} ||\varphi_j||_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \qquad (*)$$

При $\ell = 1$ эта оценка превращается в двумерный случай классического неравенства Гальярдо:

$$||v||_{L^{\frac{k}{k-1}}(\mathbb{R}^k)} \le C||\nabla v||_{L^1(\mathbb{R}^k)},\ k \ge 2,\ v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k),$$

однако при бо́льших значениях ℓ она к нему не сводится.

Естественно попытаться обобщить неравенство $(*)$ в следующем направлении: пусть задан набор функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, и пусть имеется набор линейных комбинаций (с фиксированными коэффициентами) частных производных первого порядка от этих функций. При каких условиях L^2-нормы данных функций можно оценить через L^1-нормы упомянутых линейных комбинаций с константой, зависящей только от коэффициентов? В частности, какого количества линейных комбинаций будет достаточно? Оказывается, что при некоторых (довольно легко проверяемых) условиях на коэффициенты такая оценка возможна, если количество упомянутых дифференциальных выражений на один больше количества входящих в них функций. Точные формулировки даны в §3. Мы увидим, что условия, наложенные на количество равенств и на их коэффициенты, точны. Аналогичная теорема верна и в периодическом случае (для тора), если, как и в [1], ввести дополнительное условие “правильности” оцениваемых функций. Наконец, в последнем параграфе рассмотрены возможности обобщения в том же ключе неравенства Гальярдо при произвольном k. Получающееся достаточное условие окажется не таким легко проверяемым, как для плоскости, однако "алгоритмическим". На самом деле это будет просто условие отличия от тождественного нуля некоторого полинома от большого числа переменных.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним определения и сформулируем факты конечномерного линейного анализа, которые понадобятся при дальнейшем изложении. Пусть A – линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Мы будем отождествлять его с матрицей, которая задает оператор в каноническом координатном базисе. Напомним, что оператор называется невырожденным, если $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном невырожденные операторы, не упоминая об этом особо.

Многочлен $\mathcal{P}(x)$ называется *аннулирующим полиномом* оператора A, если $\mathcal{P}(A)$ – это нулевой оператор. Здесь мы рассматриваем A как матрицу, а возведение в степень понимается как обычное умножение матриц. Далее мы будем писать $\mathcal{P}(A) = 0$, понимая под этим, что в правой части получается нулевая матрица. Удобно зафиксировать обозначения для коэффициентов полинома $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \tag{1}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Известно (см., например, [2]), что у любого оператора существует аннулирующий полином, степень которого не превосходит n, то есть мы можем считать, что $m \leq n$. В дальнейшем мы будем считать, что в качестве аннулирующего полинома мы всегда выбираем аннулирующий полином минимальной степени.

Напомним еще, что линейный оператор

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$$

называется *резольвентой* оператора A. Этот оператор определен при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, кроме тех, при которых необратим (то есть является вырожденным) оператор $A - \lambda E$. Эти числа являются корнями полинома

$$\mathcal{D}(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Известно, что полином $\mathcal{D}(\lambda)$ является аннулирующим полиномом для оператора A, но не обязательно минимальным. Его корни являются собственными числами оператора A. Нетрудно понять, что все собственные числа также обязательно являются корнями минимального аннулирующего полинома. Оказывается, что резольвенту оператора A можно выразить как полином от A. Для этого нам потребуются дополнительные обозначения. А именно, обозначим

$$\mathcal{P}_k(x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \alpha_{j+k+1} x^j$$

при всех k от 0 до $m-1$. Коэффициенты α_i взяты из равенства (1). Тогда имеет место следующее равенство:

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\mathcal{P}(\lambda)} \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{P}_j(\lambda) A^j \tag{2}$$

при всех λ, кроме тех, в которых полином $\mathcal{P}(\lambda)$ обращается в ноль, то есть просто кроме собственных чисел оператора A. Это тождество доказывается простым домножением обеих частей на $A - \lambda E$ и раскрытием скобок; см., впрочем, [2].

Наконец, введем еще следующее определение: будем говорить, что вектор $x \in \mathbb{R}^n$ *имеет порядок* k относительно оператора A, если векторы $x, Ax, A^2, \ldots, A^{k-1}x$ линейно независимы, но при добавлении вектора $A^k x$ этот набор становится линейно зависимым. Если для вектора x его порядок относительно оператора A равен n, то мы будем говорить, что этот вектор имеет *полный порядок* относительно оператора A. В случае, когда у оператора A есть вектор, имеющий относительно него полный порядок, ясно, что аннулирующий полином оператора A имеет степень n. Все вышеизложенные факты хорошо известны, и пути доказательства намечены, например, в [2].

Наконец, в заключительной части введения мы напомним неравенство (использованное в [1]). Пусть $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ – линейно независимые векторы. Под производной в направлении вектора $e_1 = (a_1, b_1)$ функции u мы понимаем $\partial_{e_1} u = a_1 \partial_1 u + b_1 \partial_2 u$. Как обычно, через ∂_i мы обозначаем производную на плоскости по i-й переменной. Все участвующие в формулировке функции мы полагаем лежащими в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то есть в классе бесконечно дифференцируемых финитных функций. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |uv| \leq C(e_1, e_2) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_{e_1} u| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_{e_2} v|. \tag{3}$$

Доказательство приведено в [1]. В сущности, это – небольшое усиление оценки, на которой основано стандартное доказательство неравенство Гальярдо для $k = 2$. Положив $u = v$, мы получаем оценку L^2-нормы функции u через L^1-нормы производных этой функции по двум различным направлениям.

3. Теорема вложения

Пусть функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ лежат в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что выполнен следующий набор равенств:

$$\partial_1(a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n) + \partial_2(b_{1i}u_1 + b_{2i}u_2 + \cdots + b_{ni}u_n) = \varphi_i \tag{4}$$

при i от 1 до k. Мы хотим оценить L^2-нормы функций u_i через L^1-нормы функций φ_i. Заметим, что если $k = 2n$ и равенства в наборе (4) линейно независимы, то мы можем выразить все частные производные функций u_i через функции φ_j (просто решить систему) и оценить L^2-нормы функций u_i с помощью неравенства (3), примененного к двум одинаковым функциям. Однако, мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях количество равенств в наборе (4) можно значительно уменьшить. Для начала введем обозначения, которые в дальнейшем упростят нам запись.

Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор-функцию $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Аналогично, обозначим через φ вектор-функцию $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$. Через $\partial_i \mathbf{u}$ обозначим вектор $(\partial_i u_1, \partial_i u_2, \ldots, \partial_i u_n)$ при $i = 1; 2$. Матрицу коэффициентов (a_{ij}) обозначим символом A, а матрицу (b_{ij}) обозначим символом B. Обе эти матрицы имеют размер $n \times k$. Тогда набор уравнений можно записать в векторном виде:

$$\partial_1 \mathbf{u} A + \partial_2 \mathbf{u} B = \varphi. \tag{5}$$

Теперь мы будем называть эту систему уравнений невырожденной (хотя это не соответствует обычному пониманию невырожденной системы), если хотя бы одна из матриц A или B имеет ранг n. Далее, не умаляя общности, мы будем считать, что это матрица B. В этом случае мы можем преобразовать систему (5) следующим способом: выбрать n *столбцов* (см. (4), (5): вектор $\mathbf{u}$ воспринимается как строка), которые линейно независимы в матрице B, и привести их линейными преобразованиями к единичной матрице. При этом в правой части будут образовываться линейные комбинации функций φ_i, мы их снова переобозначим теми же символами φ_i. С этого места мы будем считать, что уравнений ровно $n+1$, и последнее уравнение выделим особо. В нем можно считать, что слагаемое, содержащее производные по второй переменной, отсутствует, так как от него можно избавиться с помощью уже образовавшейся единичной матрицы. Тогда система примет вид:

$$\begin{gathered}\partial_1\mathbf{u}A_1 + \partial_2\mathbf{u}E = \boldsymbol{\varphi_1},\\ \langle\overline{a}, \partial_1\mathbf{u}\rangle = \varphi_{n+1}.\end{gathered} \tag{6}$$

В этой системе мы обозначили через $\boldsymbol{\varphi_1}$ вектор из первых n функций φ_i, а через $\overline{a}$ – коэффициенты последнего уравнения (которое мы выделили). В первом равенстве теперь, кстати, матрица A_1 имеет размеры $n\times n$, так что мы можем рассматривать ее как оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Этот оператор может быть вырожденным – на дальнейшее это не влияет. Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого параграфа и всей статьи.

Теорема 3.1. *Пусть система* (5) *невырожденная (в ранее определенном смысле), а в системе* (6) *(полученной из* (5) *линейными преобразованиями) вектор* $\overline{a}$ *имеет относительно оператора* A_1 *полный порядок. Тогда функции* u_i *лежат в* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\cdot\sum_{i=1}^{n+1}||\varphi_i||_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{7}$$

Константа C *зависит только от матрицы* A_1.

Доказательство. Мы будем действовать согласно методу, предложенному в [1]. Сначала будем рассматривать первые n уравнений отдельно. Умножим i-е уравнение этого набора на $p_i\in\mathbb{R}$. Сразу же обозначим через $\overline{p}$ вектор, составленный из p_i. Теперь сложим первые n равенств, и получим следующее выражение:

$$\langle A_1\overline{p}, \partial_1\mathbf{u}\rangle + \langle\overline{p}, \partial_2\mathbf{u}\rangle = \varphi_1^{(\overline{p})}. \tag{8}$$

Последнее уравнение (которое мы выделили отдельно) мы домножим на $-\alpha \in \mathbb{R}$ и тоже прибавим к (8). Получится такое выражение:

$$\langle A_1\overline{p} - \alpha\overline{a}, \partial_1\mathbf{u}\rangle + \langle\overline{p}, \partial_2\mathbf{u}\rangle = \varphi^{(\overline{p})} \tag{9}$$

Здесь $\varphi^{(\overline{p})}$ – это некоторая линейная комбинация функций φ_i.

Пусть теперь оказалось, что

$$A_1\overline{p} - \alpha\overline{a} = \lambda\overline{p} \tag{10}$$

при некотором вещественном λ. Тогда выражение (9) можно переписать в виде

$$(\lambda\partial_1 + \partial_2)\langle\overline{p}, \mathbf{u}\rangle = \varphi^{(\overline{p})}.$$

Обозначим $u^{(\overline{p})} = \langle\overline{p}, \mathbf{u}\rangle$ и тогда, наконец, мы получим

$$\partial_{e_\lambda} u^{(\overline{p})} = \varphi^{(\overline{p})}. \tag{11}$$

Здесь мы положили $e_\lambda = (\lambda, 1)$.

Наша задача теперь – найти достаточное количество векторов $\overline{p}$, чтобы выполнялось равенство (11). Для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство (10). Перепишем его в виде:

$$A_1\overline{p} - \lambda E\overline{p} = \alpha\overline{a}.$$

Это равенство означает, что

$$\overline{p} = R_\lambda(A_1)(\alpha\overline{a}).$$

Последнее мы можем переписать с помощью равенства (2), откуда получается, что

$$\overline{p} = -\frac{1}{\mathcal{P}(\lambda)}\sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{P}_j(\lambda)A_1^j(\alpha\overline{a}). \tag{12}$$

Здесь мы уже обозначили через $\mathcal{P}(x)$ аннулирующий полином оператора A_1, который имеет, как уже отмечалось, степень n (так как относительно A_1 имеется вектор, имеющий полный порядок, – это вектор $\overline{a}$ по условию теоремы). Поэтому векторы $A_1^j(\overline{a})$ линейно независимы. Кроме того, мы теперь объявим $\alpha = -\mathcal{P}(\lambda)$, так что этот коэффициент просто сократится со стоящим перед суммой.

Теперь выберем набор из n чисел: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, и посмотрим, что означает, что отвечающие им согласно равенству (12) векторы $\{\overline{p}_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ линейно независимы, то есть образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Это нужно, чтобы по соответствующим им функциям $u^{(\overline{p}_{\lambda_i})}$ можно было восстановить сами функции u_i путем решения системы линейных уравнений. Такая система окажется разрешимой, если определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(\lambda_1) & \mathcal{P}_1(\lambda_1) & \dots & \mathcal{P}_{n-1}(\lambda_1) \\ \mathcal{P}_0(\lambda_2) & \mathcal{P}_1(\lambda_2) & \dots & \mathcal{P}_{n-1}(\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{P}_0(\lambda_n) & \mathcal{P}_1(\lambda_n) & \dots & \mathcal{P}_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} \tag{13}$$

отличен от нуля. Заметим, что этот определитель – просто многочлен от n переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Кроме того, несложно видеть, что слагаемое, содержащее моном $\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{n-2}\dots\lambda_n^1$, не сократится, так как встретится только один раз – в произведении элементов главной диагонали. Таким образом, этот многочлен отличен от тождественного нуля, а значит есть бесконечно много наборов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, при которых он не обращается в ноль.

Теперь мы готовы закончить доказательство теоремы. Для этого возьмем два таких набора $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$, все элементы которых попарно различны и определитель матрицы (13) для каждого набора не равен 0. Отвечающие этим двум наборам согласно равенству (12) векторы мы обозначим, соответственно, через $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n$ и $\overline{p}'_1, \overline{p}'_2, \dots, \overline{p}'_n$. Этим векторам в свою очередь отвечает $2n$ равенств вида (11) с соответственными функциями $u^{(\overline{p}_i)}$, $u^{(\overline{p'}_i)}$ и $\varphi^{(\overline{p}_i)}$, $\varphi^{(\overline{p'}_i)}$. Это означает, что мы имеем возможность оценить скалярное произведение $\langle u^{(\overline{p}_i)}, u^{(\overline{p}'_j)}\rangle$ с помощью неравенства (3), так как любые два вектора вида $(\lambda_i, 1)$ и $(\lambda'_j, 1)$ линейно независимы. Таким образом, мы имеем следующую оценку:

$$|\langle u^{(\overline{p}_i)}, u^{(\overline{p}'_j)}\rangle| \le C_1 ||\partial_{e_{\lambda_i}} \varphi^{(\overline{p}_i)}||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \cdot ||\partial_{e_{\lambda'_j}} \varphi^{(\overline{p}'_j)}||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$\le C_2 (\sum_{i=1}^{n+1} ||\varphi_i||_{L^1(\mathbb{R}^2)})^2.$$

Наконец, заметим, что мы можем выразить функции u_i как через набор $u^{(\overline{p}_i)}$, так и через набор $u^{(\overline{p'}_i)}$, потому что наборы векторов $\overline{p}_i$ и $\overline{p}'_i$ были выбраны линейно независимыми. Нужно просто решить соответствующую систему уравнений. Пусть получилось

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} u^{(\overline{p}_i)}$$

и

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} d_{ki} u^{(\overline{p'}_i)}.$$

Тогда мы имеем:

$$||u_k||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle u_k, u_k \rangle = \left| \sum_{i,j=1}^{n} c_{ki} d_{kj} \langle u^{(\overline{p}_i)}, u^{(\overline{p}'_j)} \rangle \right| \le C' (\sum_{i=1}^{n+1} ||\varphi_i||_{L^1(\mathbb{R}^2)})^2.$$

Наконец, суммируя все эти неравенства по k, мы и получаем утверждение теоремы.

Замечания.

1. Теперь посмотрим, что изменится, если равенств в (5) больше, чем $n+1$. Мы снова приведем систему к виду (6), только кроме основной части добавится несколько равенств вида

$$\langle \overline{a}_l, \partial_1 \mathbf{u} \rangle = \varphi_{n+l}$$

при l от 1 до m, $m < n$. В этом случае, например, достаточно, чтобы хотя бы один из векторов $\overline{a}_l$ имел относительно оператора A_1 полный порядок – тогда остальные равенства можно просто отбросить. Впрочем, это условие можно немного ослабить. Например, если дополнительных уравнений ровно n, то от векторов $\overline{a}_l$ достаточно просто требовать линейной независимости.

Обозначим

$$L = \operatorname{span}\{\overline{a}_l\}_{l=1}^{m}.$$

Если мы проследим доказательство теоремы 3.1, то заметим, что ключевой частью оказалось возможность выбрать n линейно независимых векторов в пространствах $E_\lambda = R_\lambda(A_1)(L)$. В случае, если L одномерно, это условие можно естественно сформулировать с терминах некоторого определителя. Аналогичной формулировки для многомерного случая не просматривается, поэтому мы остановимся на такой: если $\operatorname{span}_{\lambda \in \mathbb{R}}\{E_\lambda\} = \mathbb{R}^n$, то оценки теоремы 3.1 остаются верны.

2. Теорема 3.1 доказана только для финитных бесконечно дифференцируемых функций, но простым предельным переходом мы можем обобщить ее на случай, когда u_i – распределения с компактным носителем, а φ_i – меры, понимая под ∂_j обобщенную производную. Достаточно просто свернуть участвующие обобщённые функции с бесконечно-дифференцируемой аппроксимативной единицей на плоскости.

4. Точность условий в теореме вложения

В этом параграфе мы покажем, что некоторые условия в теореме 3.1 нельзя отбросить. А именно, что нельзя избавиться от условия невырожденности системы (5) (в ранее определенном смысле) и что, вообще говоря, нельзя уменьшить количество равенств. Начнем со второго утверждения.

Пусть в системе (5) всего n равенств. Тогда мы приведем ее (как и раньше) к виду (6). От условия невырожденности мы пока не отказываемся; $(n+1)$-го равенства не будет, а значит система примет вид:

$$\partial_1 \mathbf{u} A_1 + \partial_2 \mathbf{u} E = \boldsymbol{\varphi}. \tag{14}$$

Теперь будем считать, что A_1 – скалярный оператор с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и отвечающими им собственными векторами $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n$, образующими базис пространства $\mathbb{R}^n$. Умножим систему (14) скалярно на вектор $\overline{p}_i$ и получим:

$$< A_1\overline{p}_i, \partial_1 \mathbf{u} > + < \overline{p}_i, \partial_2 \mathbf{u} > = < \varphi, \overline{p}_i > .$$

Поскольку $A_1\overline{p}_i = \lambda_i \overline{p}_i$, эти равенства примут вид:

$$\partial_{e_{\lambda_i}} u^{(\overline{p}_i)} = \varphi^{(\overline{p}_i)}. \tag{15}$$

Все обозначения здесь перенесены из предыдущего параграфа, а $e_{\lambda_i} = (\lambda_i, 1)$. Система равенств (15) полностью равносильна системе (14), так как функции u_i можно выразить через набор $u^{(\overline{p}_i)}$, а функции φ_i через набор $\varphi^{(\overline{p}_i)}$, и набор коэффициентов выражения не зависит ни от чего, кроме исходной системы. Теперь мы просто положим $u^{(\overline{p}_2)} = u^{(\overline{p}_3)} = \ldots = u^{(\overline{p}_n)} = 0$ и из этого будет следовать, что $\varphi^{(\overline{p}_2)} = \varphi^{(\overline{p}_3)} = \ldots = \varphi^{(\overline{p}_n)} = 0$. Заменой координат мы можем свести дело к случаю, когда первое равенство набора (15) имеет вид

$$\partial_1 u^{(\overline{p}_1)} = \varphi^{(\overline{p}_1)}.$$

Теперь выберем в качестве $u_j^{(\overline{p}_1)}$ последовательность финитных функций, L^2-нормы которых стремятся к бесконечности, а L^1-нормы их производных по первой переменной остаются ограниченными. В качестве таких функций можно взять, например, функции, равные $\frac{1}{j}$ на прямоугольнике размера $j^2 \times j$, а потом бесконечно гладко убывающие к нулю на "каемке" этого прямоугольника ширины 1. Дадим более точное описание (оно нам понадобится и для дальнейшего изложения). Для этого сначала введем в рассмотрение бесконечно гладкую функцию $h(x) : [0,1] \to [0,1]$, обладающую следующими свойствами: она монотонно возрастает от 0 к единице, $h(0) = 0, h(1) = 1$, но при этом $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(1) = 0$ при всех $i \geq 1$. Кроме того, потребуем, чтобы при всех $x \in [0,1]$ выполнялось неравенство $h'(x) \leq 2$. Далее, обозначим через $g_k(x)$ функцию, определенную следующим образом: она будет равна 1 на отрезке длины k (вообще говоря, выбранном в произвольном месте прямой $\mathbb{R}$). Слева и справа от этого отрезка она на отрезках длины один будет равна, соответственно, функциям $h(x)$ и $(1 - h(x))$, сдвинутым нужным образом. Вне уже рассмотренного отрезка длины $k + 2$ мы доопределим функцию $g_k(x)$ нулем. Напишем явную формулу. Пусть c – левый конец отрезка длины k, на котором функция $g_k(x)$ будет единицей. Тогда

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{если} \quad x \in [c, c+k]; \\ h(x - c + 1), \quad \text{если} \quad x \in [c-1, c]; \\ 1 - h(x - c - k), \quad \text{если} \quad x \in [c+k, c+k+1]; \\ 0, \quad \text{если} \quad x \notin [c-1, c+k+1]. \end{cases}$$

Полученная функция будет бесконечно гладкой, ее производная будет не превосходить 2 и будет отличной от нуля только на двух отрезках длины 1. Эти обозначения пригодятся нам в дальнейшем, а пока заметим, что в качестве функции $u^{(\overline{p}_1)}$ мы можем выбрать как раз $\frac{1}{j} g_j(x_1) \cdot g_{j^2}(x_2)$. Ее L^2-норма имеет порядок $j^{3/2}$, а L^1-норма ее производной по первой переменной не превосходит константы. Восстановив u_i и φ_i по полученным функциям, мы увидим, что L^1-нормы функций φ_i ограничены, а L^2-нормы функций u_i неограничены. Тем самым мы показали, что, вообще говоря, условие на количество уравнений в системе (5) нельзя отбросить.

Теперь мы покажем, что условие невырожденности системы (5) в принятом здесь смысле является необходимым. А именно, если ранг матриц A и B меньше n, то можно предъявить (как уже только что было сделано) последовательность функций $u_i^j (i = 1, \dots, n; j \in \mathbb{N})$, у которых L^2-нормы неограничены, но L^1-нормы функций φ_i^j ограничены. В частности, это будет означать, что если уравнений в системе (6) меньше n, то заключение теоремы 3.1 не может выполняться. Мы воспользуемся уже приведенными конструкциями. То, что ранг каждой из матриц A и B меньше n, означает линейную зависимость столбцов. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – набор коэффициентов (не все из которых нули), с помощью которого нулевой вектор выражается через столбцы матрицы A, а $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – аналогичные коэффициенты для матрицы B. Теперь построим подходящие функции u_i следующим образом. Сначала мы дополним определение функции $g_k(x)$, данное выше, условием, что отрезок длины k, на котором эта функция принимает значение 1, симметричен относительно начала координат. Теперь сразу обозначим $K_j(x_1, x_2) = \frac{1}{j} g_{j^2}(x_1) g_{j^2}(x_2)$ – это будет срезающая функция, с помощью которой мы добьемся финитности. Наконец, мы определим:

$$u_i^j = K_j(x_1, x_2)(\alpha_i g_j(x_1) + \beta_i g_j(x_2)).$$

Заметим, что у этой функции L^2-норма стремится к бесконечности с ростом j, если хотя бы один из коэффициентов α_i или β_i отличен от 0. Действительно, она принимает значения $\frac{\alpha_i}{n}$ на прямоугольнике площади $j \cdot \frac{j^2 - j}{2}$, что уже гарантирует неограниченность L^2-нормы. Теперь подставим эти функции в систему (5). Сначала посчитаем производные:

$$\partial_1 u_i^j = \alpha_i g_j'(x_1) K_j(x_1, x_2) + (\alpha_i g_j(x_1) + \beta_i g_j(x_2)) \cdot K_j'(x_1, x_2)$$

и аналогично для производной по второй переменной. Здесь под $K_j'(x_1, x_2)$ мы понимаем производную по первой переменной, хотя и не отмечаем этого в обозначениях. Заметим, что L^1-норма второго слагаемого ограничена, так как само это слагаемое не равно нулю на $2j$ единичных квадратах, на каждом из которых не превосходит $\frac{1}{j}$. Что касается первых слагаемых, то при подстановке в систему (5) они обнуляются, так как коэффициенты α_i выбраны подходящим образом. Аналогичная ситуация будет с производной по второй переменной, и тем самым мы получим пример, доказывающий, что от условия невырожденности системы нельзя отказаться.

5. Аналог теоремы вложения для тора

Как обычно, под оператором дифференцирования ∂_i на торе мы понимаем:

$$\partial_i f(x_1, x_2) = \frac{\partial f(e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2})}{d\vartheta_i}.$$

Условия теоремы 3.1 без исправлений перенести на тор нельзя – это было отмечено в [1]. Действительно, если в системе (5) выбрать в качестве функций u_i тождественные константы, то в правой части в качестве функций φ_i получатся просто нулевые функции, поэтому L^2-нормы функций u_i оценить не удастся. На плоскости подобной ситуации не возникло из-за финитности. Положение можно исправить, подчинив функции u_i дополнительным условиям. Мы снова будем следовать определениям, данным в [1].

Меру μ на торе назовем *правильной*, если $\widehat{\mu}(0, n) = \widehat{\mu}(n, 0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Аналогичный смысл имеет понятие правильной обобщенной функции, правильного тригонометрического полинома. Мы будем считать в дальнейшем, что u_i – это тригонометрические полиномы, а потом распространим полученные результаты на произвольные обобщенные функции на торе простым предельным переходом, например, свернув все с ядром Фейера по каждой переменной. Оказывается, что в теореме 3.1 кроме уже приведенных условий достаточно потребовать, чтобы полиномы u_i были правильными. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть система* (5) *невырожденная (в ранее определенном смысле), а в системе* (6) *(полученной из* (5) *линейными преобразованиями) вектор $\overline{a}$ имеет полный порядок относительно оператора A_1. Если при этом u_i — правильные тригонометрические полиномы, то*

$$\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n+1} ||\varphi_i||_{L^1(\mathbb{T}^2)}.$$

Константа C зависит только матрицы A_1.

Доказательство. Все алгебраические преобразования остаются такими же, какими они были в теореме 3.1. Мы выберем сначала $\lambda = -m$, где m – целое ненулевое число и, как и раньше, будем считать, что выбран вектор

$$\overline{p}_\lambda = R_\lambda(A_1)(\alpha\overline{a})$$

(мы исключаем те m, для которых λ есть собственное число оператора A, – таковых будет разве лишь конечное множество). Тогда, преобразовав систему (6), мы получаем (как и при доказательстве теоремы 3.1) равенство

$$\partial_{e_\lambda} u^{(\overline{p}_\lambda)} = \varphi^{(\overline{p}_\lambda)},$$

в котором теперь мы полагаем $e_\lambda = (-m, 1)$. Дальнейшему точному следованию доказательству теоремы 3.1 мешает то, что по функции $\varphi^{(\overline{p}_\lambda)}$ теперь не удается восстановить функцию $u^{(\overline{p}_\lambda)}$, и поэтому нет аналога неравенства (3). Чтобы все-таки суметь оценить скалярное произведение как в аналогичной теореме для плоскости, нам, следуя [1], придется разбить функцию $u^{(\overline{p}_\lambda)}$ на два слагаемых:

$$u^{(\overline{p}_\lambda)}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{(k,l):l\neq mk} c_{nk} e^{ik\vartheta_1} e^{il\vartheta_2} + \sum_{(k,l):l=mk} c_{nk} e^{ik\vartheta_1} e^{il\vartheta_2}$$

$$= \alpha^{(\overline{p}_\lambda)} + \beta^{(\overline{p}_\lambda)}.$$

При таких условиях $\partial_{e_\lambda}\beta^{(\overline{p}_\lambda)} = 0$. Нам потребуются (как и в [1]) оценки коэффициентов Фурье функции $\beta^{(\overline{p}_\lambda)}$. Для этого мы их выразим через коэффициенты Фурье функций φ_i.

Фиксируем $k, l \in \mathbb{Z}$ и перепишем условие

$$\partial_1 \mathbf{u} A_1 + \partial_2 \mathbf{u} E = \boldsymbol{\varphi}_1$$

в терминах коэффициентов Фурье. Для этого разложим φ_i и u_i в ряд Фурье:

$$\varphi_i = \sum_k d^i_{kl} e^{ik\vartheta_1} e^{il\vartheta_2},$$

а

$$u_i = \sum_k c^i_{kl} e^{ik\vartheta_1} e^{il\vartheta_2}.$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{n} ika_{sj}c^s_{kl} + ilc^j_{kl} = d^j_{kl}$$

при всех j от 1 до n. Это – система уравнений на коэффициенты c^s_{kl} с матрицей $G = ikA'_1 + ilE$. Мы решим ее с помощью метода Крамера. Матрицы, получающиеся из G заменой соответствующего столбца на столбец коэффициентов d^j_{kl}, мы обозначим через G_s. Заметим, что

$$\det\, G_s = \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+s} d^j_{kl} \det\, G_{j\,s}$$

– это просто разложения определителя по алгебраическим дополнениям. Тогда мы получаем выражение

$$c^s_{kl} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+s} d^j_{kl} \det\, G_{j\,s}}{\det\, G}.$$

В этом равенстве мы оценим по модулю коэффициент перед d^j_{kl}.

Вспомним, что $l = mk$, и $m \in \mathbb{Z}$ сейчас фиксировано, но впоследствии мы сможем выбрать его более или менее произвольным. Тогда мы имеем

$$|\det\, G| = |\det\,(ikA_1 + ilE)| = |k|^n \cdot |\det\,(A_1 + mE)| = |k|^n |\mathcal{P}(-m)|,$$

где $\mathcal{P}(x)$, напомним, это минимальный полином, аннулирующий оператор A_1, в данном случае он совпадает с характеристическим (так как по условию теоремы имеет степень n). Теперь рассмотрим числитель:

$$|\det\, G_{j\,s}| = |k|^{n-1} \cdots |\mathcal{P}_{j\,s}(m)|,$$

где $\mathcal{P}_{j\,s}(x)$ – это некоторый полином степени не выше $n-1$, коэффициенты которого зависят только от матрицы A_1. Таким образом, модуль коэффициента в выражении c^s_{kl} перед d^j_{kl} имеет вид

$$\frac{|\mathcal{P}_{j\,s}(m)|}{|k||\mathcal{P}(m)|}.$$

Поскольку степень полинома в числителе как минимум на единицу меньше степени полинома в знаменателе, мы можем считать (при достаточно больших m), что этот коэффициент не превосходит $\frac{C}{|k|\cdot(|m|+1)} = \frac{C}{|k|+|l|}$. Суммируя эти оценки, мы получаем:

$$|c^s_{kl}| \le \frac{C}{|k|+|l|}\sum_{j=1}^{n}(|d^j_{kl}|) \le \frac{C}{|k|+|l|}\sum_{j=1}^{n+1}||\varphi_i||_{L^1(\mathbb{T}^2)}.$$

Эта оценка полностью соответствует той, которая была получена в [1].

Оставшаяся часть доказательства практически дословно повторяет рассуждения из [1] п. 2.3. Тем самым теорема доказана. □

6. Обобщение на многомерный случай

В этом параграфе мы обобщим теорему 3.1 на случай $\mathbb{R}^n$ – иными словами, докажем аналог неравенства Гальярдо. К сожалению, условия получатся не столь простыми, как в случае плоскости. В первую очередь нам понадобится обобщить неравенство (3) на размерность n. Начнем с леммы.

Лемма 6.1. *Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – положительные функции на $\mathbb{R}^n$. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt[n]{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)} \le \sqrt[n]{\int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x)\int\limits_{\mathbb{R}} f_2(x)\dots\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)}.$$

Доказательство этого утверждения можно получить по индукции с помощью неравенства Гёльдера. Базой служит неравенство Коши–Буняковского.

Теперь мы можем сформулировать многомерный аналог неравенства (3).

Теорема 6.1. *Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – это линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^n$, а $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при i от 1 до n – бесконечно гладкие финитные функции. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sqrt[n-1]{|f_1|\cdot|f_2|\cdot\ldots\cdot|f_n|}d\mu \le$$

$$C(e_1, e_2, \dots, e_n)\cdot \sqrt[n-1]{||\partial_{e_1}f_1||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||\partial_{e_2}f_2||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\dots||\partial_{e_n}f_n||_{L^1(\mathbb{R}^n)}}.$$

Доказательство. Индукция по n. Базой служит неравенство (3). Докажем переход от $n-1$ к n. Вначале, как и в (3) сделаем замену переменных так, чтобы оказалось, что $\partial_{e_i} = \partial_i$. Далее, выделим отдельно интегрирование по x_1:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sqrt[n-1]{|f_1|\cdot|f_2|\cdot\ldots\cdot|f_n|}\,dx_1 dx_2\ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt[n-1]{|f_1|\cdot|f_2|\cdot\ldots\cdot|f_n|}\,dx_2\ldots dx_n\Big) dx_1$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1| dx_2 \ldots dx_n \Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt[n-2]{|f_2||f_3|\ldots|f_n|}\,dx_2\ldots dx_n\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} \Bigg) dx_1$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1| dx_2 \ldots dx_n \Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\cdot \Big(||\partial_2 f_2||_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \ldots ||\partial_n f_n||_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \Big)^{\frac{1}{n-1}} \Bigg) dx_1,$$

где мы сначала воспользовались неравенством Гёльдера для показателей $n-1$ и $\frac{n-1}{n-2}$, а потом применили предположение индукции к функциям $f_2, f_3, \ldots, f_n$, рассматриваемым как функции от переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Заметим также, что получившиеся в конце выражения $||\partial_i f_i||_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}$ – это функции от x_1.

Теперь заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1| dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\Big| \int\limits_{-\infty}^{x} \partial_1 f_1(t, x_2, \ldots, x_n) dt \Big| \Big) dx_2 \ldots dx_n$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1 f_1(t, x_2, x_3, \ldots, x_n)| dt \Big) dx_2 \ldots dx_n = ||\partial f_1||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Применив последовательно последнее равенство и лемму 6.1 (в качестве функций от x_1, как мы уже отмечали, выступают

$||\partial_i f_i||_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})})$ к правой части полученного неравенства, мы получаем требуемое. Тем самым теорема доказана. $\square$

Теперь мы перейдем к формулировке многомерного аналога теоремы 3.1. Пусть есть функции $u_1, u_2, \dots, u_n$, лежащие в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ (то есть бесконечно гладкие финитные функции от k переменных). Мы будем рассматривать только ситуацию, когда уравнений ровно $n(k-1)+1$. Как и в §3, мы обозначим через $\mathbf{u}$ вектор-функцию $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, а через $\partial_i \mathbf{u}$ – вектор-функцию $\{\partial_i u_1, \partial_i u_2, \dots, \partial_i u_n\}$. Мы выделим отдельно $k-1$ группу по n уравнений и последнее. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \partial_1 \mathbf{u} A_{11} + \partial_2 \mathbf{u} A_{12} + \dots + \partial_k \mathbf{u} A_{1k} = \varphi_1 \\ \partial_1 \mathbf{u} A_{21} + \partial_2 \mathbf{u} A_{22} + \dots + \partial_k \mathbf{u} A_{2k} = \varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial_1 \mathbf{u} A_{k-1,1} + \partial_2 \mathbf{u} A_{k-1,2} + \dots + \partial_k \mathbf{u} A_{k-1,k} = \varphi_{k-1} \\ \langle a_1, \partial_1 \mathbf{u} \rangle + \langle a_2, \partial_2 \mathbf{u} \rangle + \dots + \langle a_k, \partial_k \mathbf{u} \rangle = \varphi_k. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь A_{ij} – матрицы размера $n \times n$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ – это векторы, каждая из n компонент которых – функция из $L^1(\mathbb{R}^k)$, а φ_k – просто функция из $L^1(\mathbb{R}^k)$. Теперь мы составим матрицу размера $n(k-1) \times n(k-1)$:

$$\begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} \\ A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k-1,2} & A_{k-1,3} & \dots & A_{k-1,k} \end{pmatrix}$$

Будем считать, что эту матрицу удается привести к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

сохранив ее блочную структуру (здесь через E обозначена единичная матрица размером $n \times n$). Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \partial_1 \mathbf{u} A_1 + \partial_k \mathbf{u} E = \varphi_1 \\ \partial_1 \mathbf{u} A_2 + \partial_{k-1} \mathbf{u} E = \varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial_1 \mathbf{u} A_{k-1} + \partial_2 \mathbf{u} E = \varphi_{k-1} \\ \langle a, \partial_1 \mathbf{u} \rangle = \varphi_k. \end{cases} \tag{17}$$

Правые части изменились, но мы не меняем их обозначения, так как суть их остается прежней. Теперь фиксируем вектор $p \in \mathbb{R}^n$ (условия на него выберем позднее) и умножим первые $k-1$ равенств системы (17) на векторы $\lambda_i p$ скалярно и сложим. Последнее равенство мы вычтем из полученной суммы. Придем к следующему выражению:

$$\langle \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_i p - a, \partial_1 \mathbf{u} \rangle + \sum_{j=2}^{k} \langle \lambda_{k+1-j} p, \partial_j \mathbf{u} \rangle = \varphi_\lambda. \tag{18}$$

Через φ_λ мы обозначили некоторую функцию из $L^1(\mathbb{R}^k)$, которая линейно выражается через исходные. Теперь, как и в двумерном случае, мы хотим, чтобы оказалось, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_i p - a = \lambda_k p. \tag{19}$$

Тогда равенство (18) примет вид

$$\partial_\lambda \langle p, \mathbf{u} \rangle = \varphi_\lambda, \tag{20}$$

где под ∂_λ мы понимаем производную в направлении

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}.$$

Условие (19) просто означает, что

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = R_{\lambda_k}(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_i)(a). \tag{21}$$

Написанное выражение – это отображение из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$. От его свойств и зависит возможность получить оценки, аналогичные оценкам теоремы 3.1. Заметим, что в силу (2), а также потому, что в качестве аннулирующего полинома можно взять $\mathcal{P}(x) = \det(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_i - xE)$, отображение (21) полиномиально по каждой координате. Теперь мы готовы, наконец, сформулировать основной результат.

Теорема 6.2. *Пусть выполнена система* (17) *и пусть в образе отображения* (21) *есть n линейно независимых векторов. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^{\frac{k}{k-1}}_{L^{\frac{k}{k-1}}(\mathbb{R}^k)} \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n(k-1)+1} ||\tilde{\varphi}_i||_{L^1(\mathbb{R}^k)}.$$

Константа C зависит только от коэффициентов системы (16), *а через $\tilde{\varphi}_i$ мы обозначаем компоненты правых частей системы* (17).

Доказательство. Мы выберем nk векторов

$$(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_k^{(i)}),\ (1 \le i \le nk)$$

со следующими двумя свойствами:

(i) любые k из этих векторов линейно независимы;

(ii) их образы при отображении (21) разбиваются на k групп по n линейно независимых векторов в каждой.

Мы можем это сделать согласно условиям теоремы. Действительно, отображение (21) непрерывно и в его образе есть n линейно независимых векторов: пусть это $p(l^{(1)}), \dots, p(l^{(n)})$. Условие линейной независимости образов выполняется в некоторой окрестности векторов $l^{(j)}$. Обозначим эти окрестности $U(l^{(j)})$. Первое условие просто требует, чтобы никакой вектор не попал на гиперплоскость, определяемую $k-1$ другими. Удовлетворить этому условию можно, выбирая искомые векторы последовательно из соответствующих окрестностей $U(l^{(j)})$; так как гиперплоскости имеют меру ноль, они ни в какой момент не накроют все окрестности. После того, как только такой набор зафиксирован, закончить доказательство несложно. Каждому из k наборов соответствует набор функций $\langle p, \mathbf{u}\rangle$, через которые можно выразить функции u_i (как раз в силу линейной независимости получаемых векторов p). Получив k таких выражений для каждой функции u_i, мы перемножим их. Извлекая корень степени $k-1$ из обеих частей полученного равенства, а также пользуясь тем, что корень степени $k-1$ из суммы не превосходит суммы корней из каждого слагаемого, мы получаем слагаемые, каждое из которых оценивается по неравенству из теоремы 6.1. Наконец, суммируя все эти оценки, мы получаем утверждение теоремы.

Отметим в заключение, что, как и на плоскости, предельным переходом мы получаем утверждение теоремы для обобщенных функций, понимая по оператором ∂_i обобщенное дифференцирование.

Литература

1. С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространств гладких функций, порожденных конечным семейством дифференциальных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **327** (2005), 78–97.

2. И. М. Глазман, Ю. И. Любич, *Конечномерный линейный анализ*. Наука, М. (1969).

Maksimov D. V. One generalization of the Gagliardo inequality.

Suppose $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ and suppose we are given a certain set of linear combinations of the form $\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)} \partial_j u_i$. Sufficient conditions in terms of the coefficients $a_{ij}^{(l)}$ are indicated for the norms $||u_i||_{L^{\frac{k}{k-1}}}$ to be controlled in terms of the L^1-norms these linear combinations. These conditions are most transparent if $k = 2$. The classical Gagliardo inequality corresponds to a sole function $u_1 = u$ and the collection of its pure partial derivatives $\partial_1 u, \ldots, \partial_k u$.

РГПУ им. А. И. Герцена

Поступило 21 мая 2007 г.

E-mail: dimax239@ bk.ru