Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

С. В. Кисляков, Д. В. Парилов

О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ, СВЯЗАННЫХ С НЕРАВЕНСТВОМ ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

В работе [1] мы распространили так называемое неравенство Литлвуда-Пэли для произвольных интервалов (обнаруженное впервые в [2] и затем усиленное в [3]) на любые показатели $p \in (0, 2]$. Важную техническую роль в доказательстве играли операторы следующего вида, переводящие l^2-значные функции на окружности в скалярные:

$$\{h_j\} \mapsto \Sigma_j z^{n_j} (\Psi_j * h_j). \tag{1}$$

Похожий оператор использовался и в [2]. Было установлено, что при специальных ограничениях на тригонометрические полиномы Ψ_j и числа n_j оператор (1) действует из $H^p(l^2)$ в L^p при $0 < p \leqslant 2$. Причина состоит в том, что его (l^2-значное) ядро

$$K(\zeta, \eta) = K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) = \left\{\Psi_j \left(e^{i(\sigma-\tau)}\right) e^{in_j\sigma}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \tag{2}$$

($\zeta = e^{i\sigma} \in \mathbb{T}$, $\eta = e^{i\tau} \in \mathbb{T}$) является ядром типа Кальдерона–Зигмунда по переменной τ; см. [1, теорема 2].

Условия, наложенные в [1] на функции Ψ_j, были двух типов: ограничения на "размер" и "структурные" ограничения. Одно из структурных ограничений отвечает сути дела и выглядит так:

$$\operatorname{supp} \widehat{\Psi}_j \subset \Delta_j = [0, m_j - n_j], \quad \text{при этом отрезки} \quad [n_j, m_j] \subset \mathbb{Z} \\ \text{попарно не пересекаются.} \tag{3}$$

Другое структурное ограничение – очень жесткое и не выглядит естественным, если отвлечься от технических деталей в [1] и рассматривать операторы вида (1) сами по себе. Вот оно:

$$\text{длины всех отрезков} \quad \Delta_j \quad \text{— степени двойки и} \\ |\Delta_j| = |\Delta_{j'}| \Rightarrow \Psi_j = \Psi_{j'}. \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00924.

Мы хотим показать, что от такой жёсткости можно отказаться. Предположим, что выполненено условие (3), и подчиним функции Ψ_j следующим ограничениям:

$$\sup_{j,l} |\widehat{\Psi}_j(l)| < \infty; \tag{5}$$

$$\sup_{j,l} |\Psi_j(l+1) - 2\Psi_j(l) + \Psi_j(l-1)| < C|\Delta_j|^{-1}, \tag{6}$$

при этом найдется такая постоянная M, что вторая разность $\Psi_j(l+1) - 2\Psi_j(l) + \Psi_j(l-1)$ отлична от нуля не более, чем для M значений параметра l.

Чтобы сформулировать результат, введем еще некоторые обозначения, использованные в (1). Со всякой дугой I на окружности свяжем какой-нибудь отрезок J той же длины, переходящий в I при стандартном отображении прямой на окружность, и положим $J_s = 2^{s+1}J \setminus 2^sJ$ при $2^s|J| = 2^s|I| > 2\pi$.

Предложение. *Пусть выполнены условия* (3), (5) *и* (6), *а ядро* K *задано формулой* (2). *Тогда для всякого* $\xi \in l^2$, *всякой дуги* I *на окружности и любого* τ *из соответствующего отрезка* J *на прямой справедливо неравенство*

$$\left(\int_{J_s} |\langle K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - K(e^{i\sigma}, e^{i\tau_0}), \xi\rangle|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leqslant C\|\xi\|_{l^2}\, |J|^{-1/2} 2^{-Bs}, \tag{7}$$

$$s = 1, 2, \dots .$$

Здесь τ_0 – *центр отрезка* J, *а* $B > 1/2$ – *постоянная, не зависящая от* I *и* ξ.

Обсуждение. Неравенство (7) выражает то, что называлось условием (S_0) в [1]. Мы не останавливаемся здесь на условии (S_N) с $N > 0$ ради простоты. Согласно предложению 1 в [1], при сделанных предположениях оператор (1) действует из $H^p(l^2)$ в L^p при $p > (B+1/2)^{-1}$. Наше доказательство даст $B = 5/6$, что ведёт к условию $p > 3/4$. Легко проверить, что при тех же предположениях оператор (1) является оператором Кальдерона–Зигмунда. Действительно, он ограничен как оператор из $L^2(l^2)$ в L^2 в силу (3) и (5) – достаточно воспользоваться ортогональностью слагаемых в формуле (1). Далее, легко проверить *условие Хёрмандера* в следующей форме:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{T}\setminus 2I} |\langle K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - K(e^{i\sigma}, e^{i\tau_0}), \xi\rangle|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leqslant C\|\xi\|_{l^2},\ \tau \in J. \qquad (8)$$

Действительно, в силу (7) и неравенства Коши, левая часть в (8) мажорируется величиной

$$\sum_{s\geqslant 1} |J_s|^{1/2}\, |J|^{-1/2}\, 2^{Bs} \|\xi\|_{l^2} \asymp \sum_{s\geqslant 1} 2^{-(B-1/2)s} \|\xi\|_{l^2} \leqslant C\|\xi\|_{l^2}.$$

В то время как условие (5) говорит лишь о “размере” функций Ψ_j, условие (6) накладывает также и ограничения на их “устройство”. Графики преобразований Фурье $\widehat{\Psi}_j$ – конечнозвенные ломаные, при этом число звеньев не превышает M, а их наклоны не превышают $C|\Delta_j|^{-1}$. Типичный график такого рода изображён на следующем рисунке.

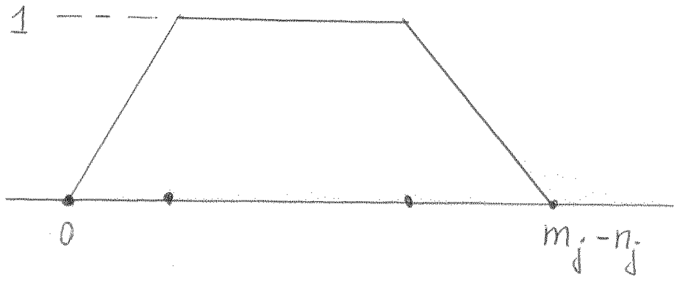

Рис. 1.

Все три интервала между точками излома сравнимы с Δ_j по длине (равномерно по j), однако в этих пределах их относительные длины могут варьироваться с изменением j. В применениях это даёт значительно бо́льшую свободу, чем условие (4).

Доказательство предложения. Положим

$$A_k = \{k : 2^k \leqslant |\Delta_k| < 2^{k+1}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

В силу формулы (2), неравенство (7) можно переписать в следующем виде (начиная с этого места считаем, что $\|\xi\|_{l^2}=1$):

$$d_s \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{J_s}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in A_k} e^{in_j\sigma}\Big(\Psi_j(e^{i(\sigma-\tau)})-\Psi_j(e^{i(\sigma-\tau_0)})\Big)\xi_j\Big|^2 d\sigma\right)^{1/2} \leqslant C|J|^{-1/2}2^{-Bs}.$$

Чтобы доказать эту оценку, применим сначала неравенство треугольника в L^2 : $d_s \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 0} d_{sk}$, где

$$d_{sk}=\left(\int\limits_{J_s}\Big|\sum_{j\in A_k} e^{in_j\sigma}\Big(\Psi_j(e^{i(\sigma-\tau)})-\Psi_j(e^{i(\sigma-\tau_0)})\Big)\xi_j\Big|^2 d\sigma\right)^{1/2}$$

Прежде чем идти дальше, напомним стандартные оценки для тригонометрических рядов с малыми лакунами, см. [4, гл. V, теорема 9.9]. Пусть $f(t)=\sum c_s e^{i\tau_s t}$, где целые числа τ_s отстоят друг от друга не менее, чем на D (будем говорить о D как о *размере* лакун). Тогда для всякого интервала Q на прямой справедлива оценка

$$\int\limits_Q |f(t)|^2dt \leqslant \begin{cases} C|Q|\,\Sigma_s\,|c_s|^2, & \text{если} \quad |Q|\geqslant 2\pi/D;\\ CD^{-1}\,\Sigma_s\,|c_s|^2, & \text{если} \quad |Q|<2\pi/D.\end{cases} \tag{9}$$

Числа d_{sk} мы оценим двумя способами. Во-первых, можно написать (поскольку $j\in A_k$)

$$d_{sk}\leqslant \sum_{0\leqslant l\leqslant 2^{k+1}}\left(\int\limits_{J_s}\Big|\sum_{j\in A_k} e^{in_j\sigma}\widehat{\Psi}_j(l)\Big(e^{il(\sigma-\tau)}-e^{il(\sigma-\tau_0)}\Big)\xi_j\Big|^2 d\sigma\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\sum_{0\leqslant l\leqslant 2^{k+1}}\left|e^{-l\tau}-e^{-l\tau_0}\right|\left(\int\limits_{J_s}\Big|\sum_{j\in A_k}\widehat{\Psi}_j(l)\xi_j e^{i(n_j+l)\sigma}\Big|^2 d\sigma\right)^{1/2}.$$

Так как $|e^{-l\tau}-e^{-l\tau_0}|\leqslant C2^k|J|$, из нераверства (9) получаем (с учетом оценки (5) и того, что любые два разных индекса из множества A_k отличаются не менее, чем на 2^k (см. (3)):

$$d_{sk}\quad\leqslant\quad\begin{cases} C2^{2k}|J|\,|J_s|^{1/2}\Big(\sum\limits_{j\in A_k}|\xi_j|^2\Big)^{1/2}, & |J_s|=2^s|J|\geqslant 2^{-k+1}2\pi;\\ C2^{2k}|J|\,2^{-k/2}\Big(\sum\limits_{j\in A_k}|\xi_j|^2\Big)^{1/2}, & 2^s|J|<2^{-k+1}2\pi.\end{cases}\tag{10}$$

Во-вторых, мы можем написать

$$d_{sk} \leqslant \delta_{sk}(\tau) + \delta_{sk}(\tau_0),$$

где

$$\delta_{sk}(\alpha) = \Big(\int\limits_{J_s} \Big| \sum_{j \in A_k} e^{in_j\sigma} \Psi_j\big(e^{i(\sigma-\alpha)}\big)\xi_j \Big|^2 d\sigma\Big)^{1/2}, \quad \alpha \in J.$$

Далее, если $\sigma \in J_s$ $(s \geqslant 1)$ и $\alpha \in J$, то $2^s|J| \leqslant c|e^{i(\sigma-\alpha)}-1|$. Поэтому

$$2^{2s}|J|^2\delta_{sk} \leqslant C\Big(\int\limits_{J_s} \Big| \sum_{j \in A_k} e^{in_j\sigma} \Big[\big(e^{i(\sigma-\alpha)}-1\big)^2 \Psi_j\big(e^{i(\sigma-\alpha)}\big)\Big]\xi_j \Big|^2 d\sigma\Big)^{1/2}.$$

В квадратных скобках стоит тригонометрический полином, коэффициенты которого (обозначим их через $c_j(l)$) по мнимым экспонентам $e^{il(\sigma-\alpha)}$ суть вторые разности коэффициентов Фурье функции Ψ_j. Таким образом

$$\delta_{sk} \leqslant C2^{-2s}|J|^{-2}\Big(\int\limits_{J_s} \Big| \sum_{j \in A_k} \sum_{l} c_j(l) e^{i(n_j+l)\sigma}\xi_j \Big|^2 d\sigma\Big)^{1/2}. \tag{11}$$

Учитывая условие (6), нетрудно убедиться в том, что двойную сумму (по j и l) в (11) можно разбить на $4M$ рядов с малыми лакунами размера 2^k. Из (9) тогда получаем, с учетом того, что $|c_j(l)| \leqslant C2^{-k}$ при $j \in A_k$ (см. (6):

$$\delta_{sk}(\alpha) \leqslant C(M)2^{-2s}\,|J|^{-2}\,2^{-k}\,|J_s|^{1/2}\Big(\sum_{j \in A_k} |\xi_j|^2\Big)^{1/2}, \qquad \alpha \in J, \quad |J_s| \geqslant 2^{-k+1}2\pi$$

(мы использовали лишь верхнюю строку в (9) – нижняя нам в этом случае не понадобится). Итак,

$$d_{sk} \leqslant C2^{-\frac{3}{2}s}|J|^{-3/2}2^{-k}\Big(\sum_{j \in A_k} |\xi_j|^2\Big)^{1/2}, \quad |J_s| \geqslant 2^{-k+1}2\pi. \tag{12}$$

Теперь вспомним, что

$$d_s \leqslant \sum_{k \geqslant 0} d_{sk} = \sum_{2^k < \frac{4\pi}{2^s|J|}} d_{sk} + \sum_{2^k \geqslant \frac{4\pi}{2^s|J|}} d_{sk} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

(границы суммирования находятся из неравенства $|J_s| \geqslant 2^{-k+1}2\pi$ (см. (10) и (12)). При оценке первой суммы воспользуемся нижней строкой в (10) и неравенством Коши:

$$\Sigma_1 \leqslant C|J| \sum_{2^k < \frac{4\pi}{2^s|J|}} 2^{\frac{3}{2}k} \Big(\sum_{j\in A_k} |\xi_j|^2 \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C|J| \Big(\sum_j |\xi_j|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{2^k < \frac{4\pi}{2^s|J|}} 2^{3k} \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C'|J| 2^{-\frac{3}{2}s} |J|^{-3/2} = C'|J|^{-1/2} 2^{-\frac{3}{2}s}. \quad (13)$$

Чтобы оценить Σ_2, сравним оценки (10) (верхняя строка) и (12): если $2^k \geqslant \frac{4\pi}{2^s|J|}$, то

$$d_{sk} \leqslant C \min\Big\{ 2^{2k}\, 2^{s/2} |J|^{3/2}, 2^{-k}\, 2^{-\frac{3}{2}s} |J|^{-3/2} \Big\} \Big(\sum_{j\in A_k} |\xi_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Минимум достигается на первом члене, когда $2^{3k} \leqslant 2^{-2s}|J|^{-3}$, т.е. $2^k \leqslant 2^{-\frac{2}{3}s}|J|^{-1}$. Таким образом,

$$\Sigma_2 \leqslant C \Big(\sum_j |\xi_j|^2 \Big)^{1/2} \Big(2^{s/2}|J|^{3/2} \Big(\sum_{2^k \leqslant (2^{\frac{2}{3}s}|J|)^{-1}} 2^{4k} \Big)^{1/2} +$$

$$+ 2^{-\frac{3}{2}s}|J|^{-3/2} \Big(\sum_{2^k > (2^{\frac{2}{3}s}|J|)^{-1}} 2^{-2k} \Big)^{1/2} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant C' \Big(2^{s/2}|J|^{3/2}\, 2^{-\frac{4}{3}s}|J|^{-2} + 2^{-\frac{3}{2}s}|J|^{-3/2}\, 2^{\frac{2}{3}s}|J| \Big) \leqslant C''|J|^{-1/2}\, 2^{-(5/6)s}.$$

С учётом оценки (13), окончательно получаем, что предложение справедливо с $B = 5/6$.

Литература

1. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **327** (2005), 98–113.
2. J, L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1** (1985), 1–13.
3. J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system.* — Bull. Soc. Math. Belg. **37**, No. 1 (1985), 20–26.
4. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 1, Мир, Москва (1965).

Kislyakov S. V., Parilov D. V. On singular integrals related to the Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.

The proof of the inequality mentioned in the title requires the knowledge of the fact that operators of a certain class are Calderór–Zygmund singular integral operators. We slightly extend this class.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 июля 2007 г.