Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

М. Ф. Гамаль

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТЁПЛИЦА, ПОДОБНЫХ ОДНОСТОРОННЕМУ СДВИГУ

1. Введение

В работе рассматриваются операторы Тёплица в пространстве Харди H^2 в единичном круге, подобные изометрии. Существует много результатов о подобии операторов Тёплица более простым операторам, но они в основном следующих двух типов: для операторов Тёплица, подобных самосопряженным (см. [1]) или унитарным (см. [2, 3]), или для операторов Тёплица с гладкими символами (см., например, [4–9]). С другой стороны, в [2] доказано, что для функций Φ, представимых в форме

$$\Phi = \omega f/\overline{f}, \tag{1.1}$$

где ω – внутренняя, $f, 1/f \in H^\infty$, оператор Тёплица с символом Φ подобен изометрии. Любая изометрия имеет вид $U \oplus S$, где U – унитарный оператор, а S – односторонний сдвиг, и если оператор Тёплица с символом Φ, имеющим форму (1.1), подобен оператору $U \oplus S$, то оператор U абсолютно непрерывен, а кратность спектра одностороннего сдвига S равна степени внутренней функции ω. Но в общем случае ничего больше об U не известно.

В [10] мы рассматриваем операторы Тёплица с символом

$$\Phi = \varphi/\psi, \tag{1.2}$$

где ψ – конечное произведение Бляшке, $\deg\psi = N < \infty$, а φ – внутренняя функция, $\deg\varphi \geq N$ (степень deg внутренней функции φ – это число множителей Бляшке в случае, когда φ – конечное произведение Бляшке, и ∞ во всех остальных случаях). Такая функция Φ может быть представлена в форме (1.1) (см. [10]), поэтому оператор Тёплица с символом Φ подобен изометрии. В [10] найден спектральный тип этой изометрии (см. теорему 1.1

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00925.

ниже). Основной результат настоящей статьи – теорема 1.2 ниже – является уточнением частного случая теоремы 1.1. Именно, в теореме 1.2 дается более удобная формулировка условий, необходимых и достаточных для того, чтобы оператор Тёплица с символом вида (1.2) был подобен одностороннему сдвигу.

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг, m – нормализованная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Далее, $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$ – пространство Лебега, $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ – пространство Харди, P_+ – ортогональный проектор из L^2 на H^2. Оператор Тёплица с символом Φ обозначается через T_Φ, где $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T}, m)$. Оператор Тёплица T_Φ действует в пространстве H^2 по формуле $T_\Phi h = P_+\Phi h$, $h \in H^2$.

В [10] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке,* $\deg\psi = N < \infty$, *φ – внутренняя функция, $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Пусть $T_\Phi\colon H^2 \to H^2$ – оператор Тёплица с символом Φ. Положим $\mathcal{I}_n = \{\lambda \in \mathbb{T} : \Phi - \lambda$ имеет по крайней мере n нулей в $\mathbb{D}\}$ и $\sigma_n = \mathbb{T} \setminus \mathcal{I}_n$, $n = 1, \dots, N$. Тогда оператор T_Φ подобен изометрии $U \oplus S$, где S – односторонний сдвиг кратности $\deg\varphi - N$, а U – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $\oplus_{n=1}^N L^2(\sigma_n, m)$.*

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке,* $\deg\psi = N < \infty$, *φ – внутренняя функция, $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Тогда Φ имеет мероморфное продолжение в $\mathbb{D}$, задаваемое формулой $\Phi(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Положим $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$. Далее, пусть $T_\Phi\colon H^2 \to H^2$ – оператор Тёплица с символом Φ. Тогда T_Φ подобен одностороннему сдвигу если и только если $m(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) = 0$.*

Теорема 1.2 непосредственно вытекает из теоремы 1.1 и следующего утверждения.

Предложение 1.3. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке,* $\deg\psi = N < \infty$, *φ – внутренняя функция, $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Далее, пусть множество σ_N определено в теореме 1.1, а множество Ω_Φ – в теореме 1.2. Следующие утверждения равносильны:*

1) $m(\sigma_N)=0$;
2) $m(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})=0$.

В самом деле, по теореме 1.1 оператор T_Φ подобен одностороннему сдвигу если и только если $m(\sigma_N)=0$, и теперь заключение теоремы 1.2 следует из предложения 1.3.

Статья организована следующим образом. Параграфы 2–4 посвящены доказательству предложения 1.3. Именно, в §2 мы показываем, что Φ имеет угловые граничные значения во всех точках из $\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$. Затем мы определяем функцию Φ на множестве $\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$ ее угловыми граничными значениями и доказываем, что Φ непрерывна на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$. Наконец, в §2 мы доказываем, что $\sigma_N=\Phi(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})$. В §3 мы доказываем, что если $m(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})=0$, то $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}))=0$. В §4 мы показываем, что φ имеет угловые производные во всех точках из $\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$, и доказываем, что если $m(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})>0$, то $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}))>0$. В §5 содержатся примеры.

2. Непрерывность функции Φ на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$

В этом параграфе мы показываем, что функция Φ непрерывна на множестве $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$ и что $\sigma_N=\Phi(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{C}\subset\mathbb{D}$ – связное множество. Тогда множество $\{\zeta\in\operatorname{clos}\mathcal{C}\cap\mathbb{T}:\zeta$ не является угловым пределом точек из $\mathcal{C}\}$ не более чем счетно.*

Доказательство. Мы используем идею из доказательства леммы 3.2 из [11]. Обозначим множество из леммы 2.1 через τ. Зафиксируем число s, $0<s<\pi/2$, и обозначим через $\mathcal{S}(\zeta,s)$ сектор с вершиной ζ, раствора $2s$, симметричный относительно луча, проходящего через 0 и ζ. По предположению, существуют рациональные числа $a_\zeta,b_\zeta\in(0,1)$, такие что множество $\mathcal{S}(\zeta)=\{t\zeta: a_\zeta<t<1\}\cup\{z\in\mathbb{D}:|z-a_\zeta\zeta|\le b_\zeta\}$ содержится в $\mathcal{S}(\zeta,s)\setminus\mathcal{C}$. Предположим, что τ несчетно. Тогда существуют несчетное множество $\tau_0\subset\tau$ и числа a, b, такие что $a_\zeta=a$ и $b_\zeta=b$ для всех $\zeta\in\tau_0$. Ясно, что тогда можно найти точки $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3\in\tau_0$, такие что $\mathcal{S}(\zeta_1)\cap\mathcal{S}(\zeta_2)\cap\mathcal{S}(\zeta_3)\ne\emptyset$. Очевидно, что

$$\mathbb{D}\setminus(\mathcal{S}(\zeta_1)\cup\mathcal{S}(\zeta_2)\cup\mathcal{S}(\zeta_3))=\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2\cup\mathcal{G}_3,$$

где $\mathcal{G}_j$ – открытые множества, такие что $\mathcal{G}_j\cap\mathcal{G}_\ell=\emptyset$, если $j\ne\ell$, $j,\ell=1,2,3$. Так как $\mathcal{C}$ связно, то существует номер j, $j=1$, 2, или

3, такой, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_j$. Таким образом, $\tau_0 \subset \operatorname{clos}\mathcal{C} \subset \operatorname{clos}\mathcal{G}_j$, следовательно, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \operatorname{clos}\mathcal{G}_j$ только для одного номера j. Получили противоречие. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть φ – внутренняя функция, ψ – конечное произведение Бляшке, φ и ψ взаимно просты и $\deg\psi = N$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, уравнение $\varphi - \lambda\psi = 0$ имеет ровно N нулей в $\mathbb{D}$ (с учетом кратностей).*

Эта лемма – следствие теоремы Руше.

Мы будем использовать следующие обозначения. Пусть $\gamma : [0,1) \to \mathbb{C}$ – непрерывное отображение. Предельное множество для γ – это множество $\mathcal{C}(\gamma) = \{w \in \mathbb{C}$: существует последовательность $t_n \to_n 1$ такая, что $\gamma(t_n) \to_n w\}$. $\mathcal{C}(\gamma)$ является замкнутым связным множеством (см. [12, гл. 1]). Положим $\mathcal{A} = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D} :$ $\Phi - \lambda$ имеет кратный ноль в $\mathbb{D}\}$. Из хорошо известных свойств аналитических функций и леммы 2.2 сразу следует, что $\mathcal{A}$ состоит из изолированных друг от друга точек. В самом деле, пусть $\lambda_0 \in \mathcal{A}$, тогда существует окрестность $\mathcal{V}$ точки λ_0 такая, что $\mathcal{V} \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$ и $\Phi - \lambda$ имеет N простых нулей в $\mathbb{D}$ для любой точки $\lambda \in \mathcal{V} \setminus \{\lambda_0\}$. По лемме 2.2 функция $\Phi - \lambda$ имеет ровно N нулей в $\mathbb{D}$ (с учетом кратностей), и мы заключаем, что все нули функции $\Phi - \lambda$ простые. Таким образом, $\mathcal{A}$ состоит из изолированных друг от друга точек.

Лемма 2.3. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке, $\deg\psi = N < \infty$, φ – внутренняя функция, $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Далее, пусть $\mathcal{A} = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D} : \Phi - \lambda$ имеет кратный ноль в $\mathbb{D}\}$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ и*

$$\Gamma\colon [0,1] \to \big((\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}\big) \cup \{\lambda_0\}$$

– простая кривая, такая что $\Gamma(1) = \lambda_0$ и

$$\Gamma[0,1) \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}.$$

Тогда существуют простые кривые $\gamma_j\colon [0,1] \to \operatorname{clos}\mathbb{D}$, $j = 1, \dots, N$, такие что

$$\gamma_j[0,1) \subset \mathbb{D}, \quad \Phi^{-1}(\Gamma[0,1)) = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j[0,1), \quad \gamma_j[0,1) \cap \gamma_\ell[0,1) = \emptyset,$$

если $j \neq \ell$ *и* $\Phi \circ \gamma_j = \Gamma$ *на* $[0,1)$, $j, \ell = 1, \dots, N$.

Доказательство. Имеем

$$\Gamma[0,1) \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A},$$

поэтому легко построить непрерывные отображения $\gamma_j\colon [0,1) \to \mathbb{D}$, такие, что $\Phi^{-1}(\Gamma[0,1)) = \cup_{j=1}^{N} \gamma_j[0,1)$ и $\gamma_j[0,1) \cap \gamma_\ell[0,1) = \emptyset$, если $j \neq \ell$, $j, \ell = 1, \dots, N$. Так как $\Gamma(1) = \lambda_0$, имеем $\lim_{t\to 1} \Phi(\gamma_j(t)) = \lambda_0$, $j = 1, \dots, N$.

Пусть $1 \leq j \leq N$, докажем, что множество $\mathcal{C}(\gamma_j)$ состоит из одной точки. Сначала заметим, что если $\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$, то $\Phi(\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D}) = \{\lambda_0\}$. Если предположить, что $\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D}$ состоит больше чем из одной точки, то $\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D}$ имеет предельную точку в $\mathbb{D}$, но Φ – мероморфная функция в $\mathbb{D}$, поэтому она должна быть постоянной в $\mathbb{D}$ – противоречие. Таким образом, если $\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$, то $\mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D}$ состоит из одной точки. Из связности множества $\mathcal{C}(\gamma_j)$ заключаем, что $\mathcal{C}(\gamma_j) = \mathcal{C}(\gamma_j) \cap \mathbb{D}$. Теперь рассмотрим случай, когда $\mathcal{C}(\gamma_j) \subset \mathbb{T}$. Если предположить, что $\mathcal{C}(\gamma_j)$ состоит больше чем из одной точки, то нужно заключить, что $\mathcal{C}(\gamma_j)$ – это замкнутая дуга, и, следовательно, $\mathcal{C}(\gamma_j)$ имеет положительную меру. Рассмотрим множество точек ζ из $\mathcal{C}(\gamma_j)$ таких, что ζ является угловым пределом точек из γ_j и функция Φ имеет угловое граничное значение $\Phi(\zeta)$ в ζ. По лемме 2.1 и свойствам функции Φ это множество имеет положительную меру. По построению $\Phi(\zeta) = \lambda_0$ для всех ζ из этого множества, следовательно, функция Φ должна быть постоянной – противоречие.

Таким образом, $\mathcal{C}(\gamma_j)$ состоит из одной точки. Обозначим эту точку через w_j и положим $\gamma_j(1) = w_j$, тогда $\gamma_j\colon [0,1] \to \operatorname{clos}\mathbb{D}$ – непрерывное отображение. □

Теперь мы докажем, что Φ имеет угловое граничное значение в каждой точке множества $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$, и что функция Φ, определенная на множестве $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ своими угловыми граничными значениями, непрерывна на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$.

Лемма 2.4. *Пусть* ψ *– конечное произведение Бляшке,* $\deg\psi = N < \infty$, φ *– внутренняя функция,* $N \leq \deg\varphi \leq \infty$, φ *и* ψ *взаимно просты и* $\Phi = \varphi/\psi$. *Далее, пусть* $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega_\Phi$, $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ *и* $z_n \to_n \zeta_0$. *Тогда* Φ *имеет угловое граничное значение* $\Phi(\zeta_0)$ *в* ζ_0 *и* $\lim_n \Phi(z_n) = \Phi(\zeta_0)$.

Доказательство. Положим $\mathcal{A} = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D} : \Phi - \lambda$ имеет кратный ноль в $\mathbb{D}\}$ и $\lambda_n = \Phi(z_n)$. Сначала рассмотрим случай

$$\{\lambda_n\}_n \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}.$$

Имеем $1 < |\lambda_n| = |\varphi(z_n)|/|\psi(z_n)| < 1/|\psi(z_n)| \to_n 1$, то есть $\lim_n |\lambda_n| = 1$. Поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{n_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, такую что существует предел $\lim_\ell \lambda_{n_\ell}$. Обозначим этот предел через λ_0. Имеем

$$\{\lambda_{n_\ell}\}_{\ell=1}^\infty \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A},$$

$\lambda_0 \in \mathbb{T}$ и $\lambda_{n_\ell} \to_\ell \lambda_0$. Построим простую кривую

$$\Gamma\colon [0,1] \to \big((\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}\big) \cup \{\lambda_0\},$$

такую что

$$\Gamma[0,1) \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A},$$

$\Gamma(t_\ell) = \lambda_{n_\ell}$ для некоторых точек $t_\ell \to_\ell 1$ и $\Gamma(1) = \lambda_0$. Применим лемму 2.3 к Γ, получим γ_j, $j = 1, \dots, N$. Имеем $\{z_{n_\ell}\}_\ell \subset \cup_{j=1}^N \gamma_j[0,1)$. Из свойства $\gamma_i[0,1) \cap \gamma_j[0,1) = \emptyset$, если $i \neq j$, заключаем, что существует номер ν, $1 \le \nu \le N$, такой что множество номеров ℓ, для которых $z_{n_\ell} \in \gamma_\nu[0,1)$, бесконечно. Следовательно, $\gamma_\nu(1) = \zeta_0$. Далее, $\lim_{t\to 1} \Phi(\gamma_\nu(t)) = \lambda_0$, поэтому существует предел $\lim_{t\to 1} \varphi(\gamma_\nu(t))$, следовательно ([12, теорема 2.3]), φ имеет угловое граничное значение в ζ_0, и это угловое граничное значение равно пределу $\lim_{t\to 1} \varphi(\gamma_\nu(t))$. Таким образом, Φ имеет угловое граничное значение λ_0 в ζ_0. Теперь, если мы предположим, что существует другая подпоследовательность $\{n_s\}_s$, такая что предел $\lim_s \lambda_{n_s}$ существует и равен некоторой точке μ_0, мы должны заключить, что угловое граничное значение $\Phi(\zeta_0)$ в ζ_0 равно μ_0. Мы получили, что существует предел $\lim_n \lambda_n$. Лемма доказана в случае $\lambda_n \notin \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$.

В произвольном случае возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}_n$, такую что $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to_n 0$, и выберем последовательность $\{z_{*n}\}_n \subset \Omega_\Phi$, такую что $\Phi(z_{*n}) \notin \mathcal{A}$, $|z_n - z_{*n}| < \varepsilon_n$ и $|\lambda_n - \Phi(z_{*n})| < \varepsilon_n$. Затем применим уже доказанную часть леммы к $\{z_{*n}\}_n$. $\square$

Следствие 2.5. *Определим функцию Φ на $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ ее угловыми граничными значениями. Тогда Φ непрерывна на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$.*

Следствие 2.5 выводится из леммы 2.4 стандартным способом. Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 2.6. *Пусть* ψ – *конечное произведение Бляшке,* $\deg\psi = N < \infty$, φ – *внутренняя функция,* $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ *и* ψ *взаимно просты и* $\Phi = \varphi/\psi$. *Положим* $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$ *и* $\mathcal{I}_N = \{\lambda \in \mathbb{T} : \Phi - \lambda$ *имеет* N *нулей в* $\mathbb{D}$ *(с учетом кратности)*$\}$. *Тогда* $\mathcal{I}_N = \mathbb{T} \setminus \Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$.

Доказательство. Положим $\mathcal{A} = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D} : \Phi - \lambda$ имеет кратный ноль в $\mathbb{D}\}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{T}$. Тогда существует простая кривая

$$\Gamma\colon [0,1] \to \big((\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}\big) \cup \{\lambda_0\},$$

такая что

$$\Gamma[0,1) \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}$$

и $\Gamma(1) = \lambda_0$. Применим лемму 2.3 к Γ, получим простые кривые $\gamma_j\colon [0,1] \to \operatorname{clos}\mathbb{D}$, $j = 1, \dots, N$. Положим $w_j = \gamma_j(1)$, $j = 1, \dots, N$, тогда $\Phi^{-1}(\Gamma[0,1)) = \cup_{j=1}^N \gamma_j[0,1)$ и $\Phi(w_j) = \lambda_0$, $j = 1, \dots, N$ (может быть $w_j = w_\ell$ для некоторых $j \ne \ell$). Покажем, что

$$\Phi^{-1}(\lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{z \in \operatorname{clos}\Omega_\Phi : \Phi(z) = \lambda_0\big\} = \bigcup_{j=1}^N \{w_j\}. \tag{2.1}$$

Сначала пусть $w_* \in \mathbb{D}$ и $\Phi(w_*) = \lambda_0$. Тогда $\Gamma[t,1] \subset \Phi(\mathcal{U})$ для некоторого t, $0 < t < 1$, и для некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки w_*. Поэтому $\Phi^{-1}(\Gamma[0,1)) \cap \mathcal{U} \subset \cup_{j=1}^N \gamma_j[0,1)$ и $w_* \in \cup_{j=1}^N \{w_j\}$. При этом кратность числа w_* как нуля функции $\Phi - \lambda_0$ равна количеству номеров j, для которых $w_* = w_j$.

Далее, предположим, что существует число $w_* \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$, такое что $\Phi(w_*) = \lambda_0$ и $w_* \ne w_j$ для $j = 1, \dots, N$. Тогда существует последовательность $\{z_n\}_n \subset \mathbb{D}$, такая что $z_n \to_n w_*$ и $\lambda_n = \Phi(z_n) \in (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}$. Имеем $\lambda_n \to_n \lambda_0$. Выберем последовательность $\{\mu_n\}_n$, такую что $\{\mu_n\}_n \subset \Gamma[0,1)$ и $\mu_n \to_n \lambda_0$, и построим простую кривую $\Gamma_*\colon [0,1] \to \big((\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}\big) \cup \{\lambda_0\}$, такую что $\Gamma_*[0,1) \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}) \setminus \mathcal{A}$ и $\{\lambda_n\}_n \cup \{\mu_n\}_n \subset \Gamma_*[0,1)$. Применим лемму 2.3 к Γ_*, получим простые кривые $\gamma_{*j}\colon [0,1] \to \operatorname{clos}\mathbb{D}$, $j = 1, \dots, N$. Положим $w_{*j} = \gamma_{*j}(1)$. По построению $w_* = w_{*\nu}$ для некоторого номера ν, $1 \le \nu \le N$. Далее, существуют последовательности $\{t_n\}_n$ и $\{s_n\}_n$, такие что $t_n \to_n 1$, $s_n \to_n 1$ и $\Gamma(t_n) = \Gamma_*(s_n) = \mu_n$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем $\Phi(\gamma_{*\nu}(s_n)) = \mu_n$ и $\Phi(\gamma_j(t_n)) = \mu_n$ для всех $j = 1, \dots, N$. Заключаем, что для любого n, $n = 1, 2, \dots$, существует номер j_n, $1 \le j_n \le N$, такой что $\gamma_{*\nu}(s_n) = \gamma_{j_n}(t_n)$. Тогда существует номер

κ, $1 \le \kappa \le N$, такой что количество номеров n, для которых $j_n = \kappa$, бесконечно, поэтому $w_* = \lim_n \gamma_{*\nu}(s_n) = \lim_n \gamma_\kappa(t_n) = w_\kappa$– противоречие с предположением $w_* \ne w_j$ для $j = 1, \dots, N$.

Таким образом, равенство (2.1) доказано. Из аналитичности функции Φ имеем, что если $\lambda \in \mathbb{T}$, $z \in \mathbb{D}$ и $\Phi(z) = \lambda$, то $z \in \operatorname{clos}\Omega_\Phi$, то есть $z \in \Phi^{-1}(\lambda)$. Следовательно, $\mathcal{I}_N = \{\lambda \in \mathbb{T} : \Phi^{-1}(\lambda) \cap \mathbb{D}$ состоит из N точек (с учетом кратностей)$\}$. Но, по (2.1), $\Phi^{-1}(\lambda)$ состоит из N точек, поэтому $\mathcal{I}_N = \{\lambda \in \mathbb{T} : \Phi^{-1}(\lambda) \subset \mathbb{D}\}$. $\square$

3. Верхняя оценка меры множества $\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$

В этом параграфе мы покажем, что если $m(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) = 0$, то $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})) = 0$. С учетом равенства $\sigma_N = \Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$, доказанного в теореме 2.6, мы получим импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) из заключения предложения 1.3.

Лемма 3.1. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке, $\deg\psi = N < \infty$, φ – внутренняя функция, $N \le \deg\varphi \le \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Положим $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ (зависящая от Φ) такая, что*

$$m(\Phi(E)) \le Cm(E) \tag{3.1}$$

для любого измеримого множества $E \subset \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. В частности, $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})) \le Cm(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$.

Доказательство. Хорошо известно (и может быть получено при помощи леммы 2.3), что открытое множество Ω_Φ имеет конечное число компонент связности. Далее, если Ω – это компонента связности множества Ω_Φ, то существует натуральное число N_Ω, такое что $\Phi - \lambda$ имеет ровно N_Ω нулей в Ω (с учетом кратностей) для любого $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$. Хорошо известно, что Ω – конечносвязное множество.

Нам нужно рассматривать только такие компоненты связности Ω множества Ω_Φ, для которых $\partial\Omega \cap \mathbb{T} \ne \emptyset$. Для такого множества Ω определим односвязную область $\mathcal{O}(\Omega)$ как дополнение неограниченной компоненты связности множества $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Очевидно, что $\Omega \subset \mathcal{O}(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $\partial\mathcal{O}(\Omega) \subset \partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \mathbb{T} = \partial\mathcal{O}(\Omega) \cap \mathbb{T}$. Пусть $\omega\colon \mathbb{D} \to \mathcal{O}(\Omega)$ – конформное отображение. Легко видеть, что существует число r, $0 < r < 1$, такое что $R = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\} \subset \omega^{-1}(\Omega)$. Для удобства выберем r так, чтобы полюсы функции Φ не принадлежали множеству $\omega(R)$.

Положим $h = \Phi \circ \omega$, $h{:}\,\omega^{-1}(\Omega) \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$. Тогда h – мероморфная функция. Так как ω – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на $\mathcal{O}(\Omega)$, то ω имеет угловые граничные значения почти всюду на $\mathbb{T}$, и угловые граничные значения функции ω принадлежат множеству $\partial\mathcal{O}(\Omega)$. Далее, $\partial\mathcal{O}(\Omega) \subset \partial\Omega \subset \partial\Omega_\Phi$, поэтому угловые граничные значения функции ω принадлежат множеству $\partial\Omega_\Phi$. Напомним, что функция Φ непрерывна на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$ и $\Phi(\partial\Omega_\Phi) \subset \mathbb{T}$. Поэтому если ω имеет угловое граничное значение $\omega(\zeta)$ в некоторой точке ζ из $\mathbb{T}$, то $h = \Phi \circ \omega$ имеет угловое граничное значение $\Phi(\omega(\zeta))$ в ζ, и $\Phi(\omega(\zeta)) \in \mathbb{T}$. Используя то, что $h - \lambda$ имеет ровно N_Ω нулей в $\omega^{-1}(\Omega)$ для любого $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$, аналогично доказательству непрерывности функции Φ на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$ получаем, что h может быть продолжена до функции, непрерывной на $\operatorname{clos}\omega^{-1}(\Omega)$. Как только что было отмечено, угловые граничные значения функции h принадлежат $\mathbb{T}$, поэтому $h(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Мы получили, что h может быть продолжена до функции, аналитической на $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1/r\}$, по формуле $h(z) = 1/\overline{h(1/\bar{z})}$, $1 < |z| < 1/r$. Далее, $h(R) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$, поэтому $h' \neq 0$ на $\mathbb{T}$. В самом деле, предположим, что $h'(\zeta) = 0$ для некоторой точки $\zeta \in \mathbb{T}$. Обозначим через κ кратность точки ζ как прообраза числа $h(\zeta)$ при отображении h, тогда $\kappa > 1$. Пусть I – достаточно малая открытая дуга окружности $\mathbb{T}$, такая что $h(\zeta) \in I$. Тогда прообраз дуги I при отображении h – это объединение 2κ простых кривых. Эти кривые начинаются в ζ, и углы между двумя соседними кривыми равны π/κ. Поэтому мы должны заключить, что некоторые из этих кривых лежат в R, что противоречит включению $h(R) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$. Таким образом, $h' \neq 0$ на $\mathbb{T}$. Так как h – гладкая функция, имеем $|h'| \asymp 1$ на $\mathbb{T}$. Из этого факта и предыдущего включения получаем, что аргумент функции $h|_\mathbb{T}$ – строго убывающая функция. Таким образом, существуют постоянные c_h, C_h, такие что $0 < c_h < C_h < \infty$ и $c_h m(\tau) \le m(h(\tau)) \le C_h m(\tau)$ для любого измеримого множества $\tau \subset \mathbb{T}$.

Отметим, что функция ω непрерывна на $\operatorname{clos}\mathbb{D}$. В самом деле, пусть $\gamma{:}\,[0,1] \to \operatorname{clos}\mathbb{D}$ – непрерывное отображение, такое что $\gamma[0,1) \subset \mathbb{D}$. Имеем $\Phi(\mathcal{C}(\omega(\gamma))) = \{h(\gamma(1))\}$, где предельное множество $\mathcal{C}(\omega(\gamma))$ определено перед леммой 2.3. Это означает, что $\Phi(\mathcal{C}(\omega(\gamma)))$ состоит из одной точки, поэтому $\mathcal{C}(\omega(\gamma))$ состоит из одной точки. Оставшаяся часть доказательства непрерывности функции ω стандартна.

По [13, VIII.30] существует постоянная $C_\omega > 0$, такая что $m(\omega^{-1}(E)) \le C_\omega m(E)$ для любого измеримого подмножества E окружности $\mathbb{T}$, такого что $E \subset \partial\Omega \cap \mathbb{T}$. Пусть E – такое множество. Положим $\tau = \omega^{-1}(E)$. Имеем

$$m(\Phi(E)) = m\big((\Phi \circ \omega)(\omega^{-1}(E))\big) = m(h(\tau)) \le C_h m(\tau) \le C_h C_\omega m(E).$$

Получили, что $m(\Phi(E)) \le C_h C_\omega m(E)$ для любого измеримого множества $E \subset \partial\Omega \cap \mathbb{T}$. Так как число компонент связности Ω множества Ω_Φ конечно, неравенство (3.1) доказано. □

Замечание. Если $N = 1$, то, по лемме 2.2, $\Phi - \lambda$ имеет ровно один ноль в Ω_Φ для любого $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$. Это означает, что $1/\Phi\colon \Omega_\Phi \to \mathbb{D}$ – конформное отображение, в частности, Ω_Φ – односвязная область. Как отмечалось в доказательстве леммы 3.1, обратное к $1/\Phi$ отображение непрерывно на $\operatorname{clos}\mathbb{D}$. По следствию 2.5 отображение $1/\Phi$ непрерывно на $\operatorname{clos}\Omega_\Phi$. Таким образом, Ω_Φ – жорданова область и $\Phi|_{\partial\Omega_\Phi}$ – гомеоморфизм множеств $\partial\Omega_\Phi$ и $\mathbb{T}$.

4. Угловые производные функции φ и нижняя оценка меры множества $\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$

В этом параграфе мы покажем, что если $m(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) > 0$, то $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})) > 0$. С учетом равенства $\sigma_N = \Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})$, доказанного в теореме 2.6, мы получим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2) из заключения предложения 1.3. Таким образом, доказательство предложения 1.3, а с ним и теоремы 1.2, будет завершено.

Напомним, что $\Phi = \varphi/\psi$, где ψ – конечное произведение Бляшке, φ – внутренняя функция, φ и ψ взаимно просты и $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$. Внутренняя функция φ может быть представлена в виде

$$\varphi(z) = \prod_n \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.1}$$

где $\{a_n\}_n \subset \mathbb{D}$, $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$ и μ – положительная конечная борелевская сингулярная (по отношению к m) мера на $\mathbb{T}$. Покажем, что φ имеет угловую производную $\varphi'(\xi)$ в каждой точке $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. По теореме 2 из [14]

$$|\varphi'(\xi)| = \sum_n \frac{1 - |a_n|^2}{|\xi - a_n|^2} + 2\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{T}, \tag{4.2}$$

и $\varphi'(\xi)$ существует тогда и только тогда, когда правая часть равенства (4.2) конечна.

Лемма 4.1. *Во введенных ранее обозначениях*

$$|\varphi'(\xi)| \le |\psi'(\xi)| \quad \textit{для} \quad \xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}.$$

Доказательство. Пусть $z \in \Omega_\Phi$. По определению множества Ω_Φ имеем $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$, поэтому $\log|\varphi(z)| > \log|\psi(z)|$. Далее,

$$\log|\varphi(z)| = \sum_n \log\left|\frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}\right| - \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n \log\left|\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right|^2 - (1-|z|^2)\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}.$$

Из неравенства $1 - x < -\log x$ для $0 < x < 1$ имеем

$$\frac{1}{2}\sum_n \left(\left|\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right|^2 - 1\right) - (1-|z|^2)\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} =$$

$$= (|z|^2 - 1)\left(\frac{1}{2}\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n z|^2} + \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\right) > \log|\varphi(z)| > \log|\psi(z)|,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n z|^2} + \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} < \frac{-\log|\psi(z)|}{1-|z|^2}, \quad z \in \Omega_\Phi. \tag{4.3}$$

Так как ψ – конечное произведение Бляшке, то $\frac{-\log|\psi(z)|}{1-|z|^2} \to_{z\to\xi} \frac{1}{2}|\psi'(\xi)|$, где $\xi \in \mathbb{T}$.

Положим $\mu_0 = \frac{1}{2}\sum_n (1-|a_n|^2)\delta_{a_n} + \mu$, где δ_{a_n} – мера Дирака в точке a_n. Тогда левая часть неравенства (4.3) равна

$$\int\limits_{\operatorname{clos}\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|^2} d\mu_0(\zeta).$$

Пусть $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$, тогда существует последовательность $\{z_n\}_n$, такая что $z_n \in \Omega_\Phi$ и $z_n \to_n \xi$. По лемме Фату

$$\int\limits_{\operatorname{clos}\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\bar{\zeta}\xi|^2} d\mu_0(\zeta) \le \liminf_n \int\limits_{\operatorname{clos}\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\bar{\zeta}z_n|^2} d\mu_0(\zeta) \le$$

$$\leq \liminf_n \left(\frac{-\log|\psi(z_n)|}{1-|z_n|^2} \right) = \frac{1}{2}|\psi'(\xi)|,$$

то есть

$$\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|\xi - a_n|^2} + 2\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2} \leq |\psi'(\xi)|, \quad \xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}. \tag{4.4}$$

Теперь лемма следует из равенства (4.2) и оценки (4.4). □

Следствие 4.2. *Пусть $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. Тогда*

$$\prod_n \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-\xi}{1-\bar{a}_n\xi} \quad \textit{и} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi}d\mu(\zeta)$$

сходятся, и угловые граничные значения функции φ на $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ вычисляются по формуле

$$\varphi(\xi) = \prod_n \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-\xi}{1-\bar{a}_n\xi} \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi}d\mu(\zeta)\right), \quad \xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}. \tag{4.5}$$

Доказательство следствия 4.2 состоит из хорошо известных стандартных вычислений и опускается.

Следствие 4.3. *Пусть μ и $\{a_n\}_n$ определены формулой (4.1). Тогда $\mu(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) = 0$, и если $I \subset \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ – открытая дуга, то $\{a_n\}_n$ не имеет предельных точек на I.*

Доказательство. Хорошо известно (см. [15, II.6.2]), что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(I(\xi,\varepsilon))}{\varepsilon} = \infty$$

для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ по отношению к μ, где

$$I(\xi,\varepsilon) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\arg\zeta - \arg\xi| < \varepsilon\}.$$

Имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\mu(I(\xi,\varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mu(I(\xi,\varepsilon)) = \int\limits_{I(\xi,\varepsilon)} \frac{d\mu(\zeta)}{\varepsilon^2} \leq \int\limits_{I(\xi,\varepsilon)} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2} \leq \frac{1}{2}|\psi'(\xi)|$$

для всех $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(I(\xi,\varepsilon))}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}|\psi'(\xi)| < \infty$$

для всех $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. Таким образом, $\mu(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) = 0$.

Пусть теперь I – открытая дуга, $I \subset \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. Предположим, что существуют последовательность $\{n_\ell\}_\ell$ и точка $\xi_0 \in I$, такие что $a_{n_\ell} \to_\ell \xi_0$. Положим $\xi_\ell = a_{n_\ell}/|a_{n_\ell}|$, тогда $\xi_\ell \to_\ell \xi_0$, поэтому $\xi_\ell \in I$ для достаточно больших номеров ℓ. По лемме 4.1 и равенству (4.2)

$$|\psi'(\xi_\ell)| \geq |\varphi'(\xi_\ell)| \geq \frac{1-|a_{n_\ell}|^2}{|\xi_\ell - a_{n_\ell}|^2} = \frac{1-|a_{n_\ell}|^2}{(1-|a_{n_\ell}|)^2} = \frac{1+|a_{n_\ell}|}{1-|a_{n_\ell}|} \to_\ell \infty,$$

это противоречит тому, что $\sup_\mathbb{T} |\psi'| < \infty$. □

Лемма 4.4. *Пусть μ и $\{a_n\}_n$ определены формулой (4.1), и пусть $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – последовательность, такая что $\varepsilon_\nu > \varepsilon_{\nu+1} > 0$ и $\varepsilon_\nu \to_\nu 0$. Положим*

$$I_\nu = \{\zeta \in \mathbb{T} : \operatorname{dist}(\zeta, \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) < \varepsilon_\nu\}$$

и

$$\varphi_\nu(z) = \prod_{n=1}^{\nu} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \exp\Bigg(- \int\limits_{\mathbb{T}\setminus I_\nu} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)\Bigg), \quad z \in \mathbb{D} \cup I_\nu.$$

Тогда $\varphi_\nu(\xi) \to_{\nu\to\infty} \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$.

Эта лемма вытекает из следствий 4.2 и 4.3.

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 4.5. *Пусть $K \subset \mathbb{T}$ – компактное множество, $g_\nu, g\colon K \to \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, – непрерывные функции и $g_\nu \to_\nu g$ на K. Тогда существует последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, такая что K_n – компактные множества, $K_n \subset K_{n+1} \subset K$, $m(K \setminus \cup_{n=1}^\infty K_n) = 0$ и $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на K_n, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, такую что $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to_n 0$. По теореме Егорова существует измеримое множество τ_1, такое что $\tau_1 \subset K$, $m(\tau_1) < \varepsilon_1$ и $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на $K \setminus \tau_1$. Положим $K_1 = \operatorname{clos}(K \setminus \tau_1)$. Из непрерывности функций g_ν и g имеем $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на K_1. Теперь применим теорему Егорова к множеству $K \setminus K_1$ и числу ε_2. Получим измеримое множество τ_2, такое что $\tau_2 \subset K \setminus K_1$, $m(\tau_2) < \varepsilon_2$ и $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на $(K \setminus K_1) \setminus \tau_2$. Положим $K_2 = K_1 \cup \operatorname{clos}((K \setminus K_1) \setminus \tau_2)$. Получим, что $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на K_2 и $m(K \setminus K_2) < \varepsilon_2$. Продолжая таким образом, получим последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, такую что

$K_n \subset K_{n+1} \subset K$, $g_\nu \to_\nu g$ равномерно на K_n, и $m(K \setminus K_n) < \varepsilon_n$. Поэтому $m(K \setminus \cup_{n=1}^{\infty} K_n) = \lim_{n\to\infty} m(K \setminus K_n) \leq \lim_n \varepsilon_n = 0$. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть $K \subset \mathbb{T}$ – компактное множество, и пусть $g_n, g : K \to \mathbb{T}$, $n = 1, 2, \dots$, – непрерывные функции, такие что $g_n \to_n g$ равномерно на K. Тогда $m(g(K)) \geq \limsup_n m(g_n(K))$.*

Доказательство. Имеем

$$m(g(K)) = \lim_{\varepsilon\to 0} m(G_\varepsilon),$$

где

$$G_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \operatorname{dist}(\zeta, g(K)) < \varepsilon\}.$$

Из равномерной сходимости последовательности $\{g_n\}_n$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер ν, такой что $g_n(K) \subset G_\varepsilon$ для всех $n > \nu$. Поэтому $\limsup_n m(g_n(K)) \leq m(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, и мы заключаем, что $\limsup_n m(g_n(K)) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} m(G_\varepsilon)$. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 4.7. *Пусть ψ – конечное произведение Бляшке, $\deg\psi = N < \infty$, φ – внутренняя функция, $N \leq \deg\varphi \leq \infty$, φ и ψ взаимно просты и $\Phi = \varphi/\psi$. Положим $\Omega_\Phi = \{z \in \mathbb{D} : |\Phi(z)| > 1\}$. Тогда*

$$m(\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})) \geq \frac{1}{N} \int\limits_{\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}} \big(|\psi'| - |\varphi'|\big) dm.$$

Доказательство. Положим $\Phi_\nu = \varphi_\nu/\psi$, $\nu = 1, 2, \dots$, где функции φ_ν определены в лемме 4.4. Тогда Φ_ν – гладкие функции на I_ν и $\Phi_\nu(\xi) \to_\nu \Phi(\xi)$ для всех $\xi \in \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. Применим лемму 4.5 к множеству $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ и функциям Φ_ν, $\nu = 1, 2, \dots$, и Φ. Получим последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактных множеств, таких что $K_n \subset K_{n+1} \subset \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$, $\Phi_\nu \to_\nu \Phi$ равномерно на K_n и $m\big((\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} K_n\big) = 0$. Из последнего равенства и оценки (3.1) имеем $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T})) = m(\Phi(\cup_{n=1}^{\infty} K_n)) = \lim_n m(\Phi(K_n))$. По лемме 4.6 $m(\Phi(K_n)) \geq \limsup_\nu m(\Phi_\nu(K_n))$, $n = 1, 2, \dots$.

Далее, $\Phi_\nu' = (\varphi_\nu'\psi - \varphi_\nu\psi')/\psi^2$ на I_ν, и, по теореме Жюлиа–Каратеодори (см. [14, 16]), $\varphi_\nu'(\xi) = \bar{\xi}\varphi_\nu(\xi)|\varphi_\nu'(\xi)|$, $\psi'(\xi) = \bar{\xi}\psi(\xi)|\psi'(\xi)|$ для $\xi \in I_\nu$, поэтому $|\Phi_\nu'| = |\psi'| - |\varphi_\nu'|$ на I_ν. Пусть K – компактное множество, такое что $K \subset \partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$. Используя обычную замену переменных и принимая во внимание то, что каждая точка окружности $\mathbb{T}$ имеет не более N прообразов на $\partial\Omega_{\Phi_\nu}\cap\mathbb{T}$ при отображении Φ_ν, получаем, что

$$m(\Phi_\nu(K))\geq\frac{1}{N}\int\limits_K(|\psi'|-|\varphi'_\nu|)dm.$$

По лемме Леви $\int_K|\varphi'_\nu|dm\to_\nu\int_K|\varphi'|dm$. Таким образом,

$$\limsup_\nu m(\Phi_\nu(K_n))\geq\limsup_\nu\frac{1}{N}\int\limits_{K_n}(|\psi'|-|\varphi'_\nu|)dm=\frac{1}{N}\int\limits_{K_n}(|\psi'|-|\varphi'|)dm,$$

поэтому

$$m(\Phi(K_n))\geq\frac{1}{N}\int\limits_{K_n}(|\psi'|-|\varphi'|)dm.$$

Теперь в обоих частях последнего неравенства устремляем n к ∞ и получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие 4.8. *Если* $m(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})>0$, *то* $m(\Phi(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}))>0$.

Доказательство. Из леммы 4.1 вытекает, что $|\psi'|-|\varphi'|\geq 0$ на $\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$, поэтому интеграл

$$\int\limits_{\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}}(|\psi'|-|\varphi'|)dm$$

может быть равен нулю, если и только если

$$|\psi'|=|\varphi'|\quad\text{п.в. на}\quad\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}.$$

Рассмотрим функцию $h=\varphi'\psi-\varphi\psi'$. Функция h аналитична на $\mathbb{D}$. По теореме Жюлиа–Каратеодори и лемме 4.1 функция h имеет угловые граничные значения

$$h(\xi)=\bar{\xi}\varphi(\xi)\psi(\xi)(|\varphi'(\xi)|-|\psi'(\xi)|)$$

для всех $\xi\in\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$. Если $m(\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T})>0$ и $|\psi'|=|\varphi'|$ п.в. на $\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$, мы должны заключить, что множество точек $\xi\in\mathbb{T}$, таких что $h(\xi)=0$, имеет положительную меру, поэтому h должна быть равна нулю на $\mathbb{D}$ ([12, теорема 8.1]). Это противоречит форме функции h. $\square$

Теперь предложение 1.3, а с ним и теорема 1.2, вытекают из теоремы 2.6, леммы 3.1 и следствия 4.8. Таким образом, теорема 1.2 доказана.

5. Примеры

Пример 5.1. [16] Существует внутренняя функция φ, такая что для любого конечного произведения Бляшке ψ оператор Тёплица с символом $T_\Phi\colon H^2 \to H^2$ подобен одностороннему сдвигу, где $\Phi = \varphi/\psi$. Именно, в [16] построена внутренняя функция φ, такая что φ не имеет угловой производной ни в одной точке окружности $\mathbb{T}$. Пусть ψ – конечное произведение Бляшке и $\Phi = \varphi/\psi$. По лемме 4.1 $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T} = \emptyset$, и по теореме 1.2 оператор T_Φ подобен одностороннему сдвигу.

Пример 5.2. Существует функция Φ, такая что $m(\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}) > 0$ и $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T}$ не содержит открытых дуг. Именно, положим $\psi(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$, и построим сингулярную внутреннюю функцию φ с атомической мерой μ, такую что $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T} = \{e^{it} : t \in K\}$, где $\Phi = \varphi/\psi$ и $K \subset [0, 2\pi]$ – замкнутое множество, имеющее положительную меру Лебега и не содержащее открытых промежутков.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3. *Пусть μ – положительная атомическая мера на $\mathbb{T}$ с нагрузкой (обозначенной также через μ) только в точке 1. Пусть*

$$\varphi_\mu(z) = \exp\left(-\mu\frac{1+z}{1-z}\right),$$

$\psi(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$, и $\Phi_\mu = \varphi_\mu/\psi$. Далее, пусть $0 < \mu < 2$. Тогда $\arg\Phi_\mu(e^{it})$ возрастает на $(0, t(\mu)) \cup (2\pi - t(\mu), 2\pi)$ и убывает на $(t(\mu), 2\pi - t(\mu))$, где $t(\mu) = \arccos(1-\mu)$. Таким образом, $\partial\Omega_{\Phi_\mu} \cap \mathbb{T} = \{e^{it} : t \in [t(\mu), 2\pi - t(\mu)]\}$. Далее, $m(\partial\Omega_{\Phi_\mu} \cap \mathbb{T})$ убывает от 1 до 0, когда μ изменяется от 0 до 2. Если $\mu = 2$, то $\partial\Omega_{\Phi_\mu} \cap \mathbb{T} = \{-1\}$, и если $\mu > 2$, то $\partial\Omega_{\Phi_\mu} \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

Доказательство леммы 5.3 состоит в простых вычислениях и опускается.

Приступим к построению примера 5.2.

Пусть $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ – такая последовательность, что $0 < c_n < \pi/2$, $\sum_n c_n < \infty$ и

$$\sum_n \left(\frac{c_n}{\sum_{\nu=n+1}^\infty c_\nu}\right)^2 < \infty \tag{5.1}$$

(например, можно взять $c_n = 1/n^a$, где $a > 1$).

Положим $\mu_n = 1 - \cos c_n$ и $s_n = c_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n}{\sin^2 s_n} < \infty$. В самом деле, из неравенства $C_1 x < \sin x < x$ для $0 < x < C_2$ с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ следует, что

$$\frac{\mu_n}{\sin^2 s_n} = \frac{2\sin^2 \dfrac{c_n}{2}}{\sin^2\left(c_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu\right)} \le C_3 \left(\frac{c_n}{c_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu}\right)^2$$

для некоторой постоянной $C_3 > 0$ и достаточно больших n, и

$$\frac{c_n}{c_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu} < \frac{c_n}{2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu}.$$

Теперь сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n}{\sin^2 s_n}$ следует из (5.1).

Далее, существует последовательность $\{n_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, такая что

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell+1} s_{n_\ell} < 2\pi \quad \text{и} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell} \left(\frac{\mu_{n_\ell}}{\sin^2 s_{n_\ell}} + 2\sum_{\nu=n_\ell+1}^{\infty} \frac{\mu_\nu}{\sin^2 s_\nu}\right) < 1.$$

Положим

$$\Delta_\ell = 2 s_{n_\ell} \quad \text{и} \quad M_\ell = \frac{\mu_{n_\ell}}{\sin^2 s_{n_\ell}} + 2\sum_{\nu=n_\ell+1}^{\infty} \frac{\mu_\nu}{\sin^2 s_\nu}.$$

Имеем $\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell-1} M_\ell < 1/2$. Обозначим через m_1 меру Лебега на $[0, 2\pi]$.

Построим *обобщенное канторово множество* K на $[0, 2\pi]$, используя последовательность $\{2\Delta_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$. Именно, возьмем один открытый промежуток I_{11} с центром в точке π и такой что $m_1(I_{11}) = 2\Delta_1$, тогда $[0, 2\pi] \setminus I_{11}$ состоит из двух замкнутых промежутков J_{11}, J_{12}. Возьмем два окрытых промежутка I_{21}, I_{22} с центрами в тех же точках, что и у J_{11}, J_{12}, и таких что $m_1(I_{2j}) = 2\Delta_2$, $j = 1, 2$, тогда $[0, 2\pi] \setminus (I_{11} \cup I_{21} \cup I_{22})$ состоит из четырех замкнутых промежутков J_{21}, J_{22}, J_{23}, J_{24}. Возьмем четыре открытых промежутка I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34} с центрами в тех же точках, что и у J_{21}, J_{22}, J_{23}, J_{24}, и таких что $m_1(I_{3j}) = 2\Delta_3$, $j = 1, 2, 3, 4$, и так далее. Получим множество

$$K = [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{\ell-1}} I_{\ell j}.$$

Имеем

$$m_1(K) = 2\pi - \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{\ell-1}} m_1(I_{\ell j}) = 2\pi - \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell-1}2\Delta_\ell > 0.$$

Далее,

$$m_1(J_{\ell j}) = \frac{1}{2^\ell}\left(2\pi - \sum_{\nu=1}^{\ell} 2^{\nu-1}2\Delta_\nu\right) \to_{\ell\to\infty} 0, \quad j = 1, \dots, 2^\ell,$$

поэтому K не содержит открытых промежутков. Также K является замыканием множества, состоящего из концов промежутков $I_{\ell j}$, $\ell = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, 2^{\ell-1}$.

Определим *атомическую меру* μ следующим образом. Пусть $1 \le \ell < \infty$, $1 \le j \le 2^{\ell-1}$, и $I_{\ell j}$ – построенный ранее промежуток. Поместим нагрузку μ_{n_ℓ} в точку $\zeta_{+\ell j 0} = e^{it_{+\ell j 0}}$, где $t_{+\ell j 0}$ – центр промежутка $I_{\ell j}$, и нагрузку $\mu_{\kappa+1}$ в точку $\zeta_{\pm\ell j\kappa} = e^{it_{\pm\ell j\kappa}}$, где $t_{\pm\ell j\kappa} = t_{+\ell j 0} \pm \left(c_{n_\ell} + 2\sum_{\nu=n_\ell+1}^{\kappa} c_\nu + c_{\kappa+1}\right)$, $\kappa = n_\ell, n_\ell+1, n_\ell+2, \dots$. Имеем $t_{\pm\ell j\kappa} \in I_{\ell j}$ и $\mu(\{e^{it} : t \in I_{\ell j}\}) = \mu_{n_\ell} + 2\sum_{\nu=n_\ell+1}^{\infty}\mu_\nu \le M_\ell$, поэтому $\mu(\mathbb{T}) \le \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell-1}M_\ell < \frac{1}{2} < \infty$. Положим $\varphi(z) = \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\mu(\zeta)\right)$, $z \in \mathbb{D}$.

Далее, положим $\varphi_{\pm\ell j\kappa}(z) = \exp\left(-\mu_{\kappa+1}\dfrac{\zeta_{\pm\ell j\kappa}+z}{\zeta_{\pm\ell j\kappa}-z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, и $\Phi_{\pm\ell j\kappa} = \varphi_{\pm\ell j\kappa}/\psi$ для всех наборов индексов $\pm, \ell, j, \kappa$. Имеем $\mathbb{T}\setminus\partial\Omega_\Phi \supset \mathbb{T}\setminus\partial\Omega_{\Phi_{\pm\ell j\kappa}}$. По лемме 5.3 $\mathbb{T}\setminus\partial\Omega_{\Phi_{\pm\ell j\kappa}} = \{e^{it} : |t - t_{\pm\ell j\kappa}| < c_{\kappa+1}\}$. По построению

$$\mathbb{T}\setminus\partial\Omega_\Phi \supset \bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{\ell-1}}\{e^{it} : t \in I_{\ell j}\},$$

то есть $\partial\Omega_\Phi \cap \mathbb{T} \subset \{e^{it} : t \in K\}$.

Пусть t_* – конец промежутка $I_{\ell_* j_*}$ для некоторых ℓ_*, j_*, и пусть $\xi = e^{it_*}$. Покажем, что $r\xi \in \Omega_\Phi$ для $0 < r < 1$. Положим $\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\arg\zeta - \arg\xi| \ge \pi/2\}$. Тогда $|\zeta - r\xi| \ge 1$, если $\zeta \in \Gamma$, и $|\zeta - r\xi| \ge \sin|\arg\zeta - \arg\xi|$, если $\zeta \notin \Gamma$. Пусть $\zeta_{\pm\ell j\kappa} \notin \Gamma$. Обозначим через $t_{\ell j}$ конец промежутка $I_{\ell j}$, ближайший к t_*. Имеем $|t_{\pm\ell j\kappa} - t_*| \ge |t_{\pm\ell j\kappa} - t_{\ell j}| \ge c_{\kappa+1} + 2\sum_{\nu=\kappa+2}^{\infty} c_\nu = s_{\kappa+1}$. Таким образом,

$$|\zeta_{\pm\ell j\kappa} - r\xi| \ge \sin|t_{\pm\ell j\kappa} - t_*| \ge \sin s_{\kappa+1}.$$

Поэтому

$$\frac{\log|\varphi(r\xi)|}{r^2-1}=\sum_{\pm\ell j\kappa}\frac{\mu_{\kappa+1}}{|\zeta_{\pm\ell j\kappa}-r\xi|^2}\le\sum_{\substack{\pm\ell j\kappa\\ \zeta_{\pm\ell j\kappa}\in\Gamma}}\mu_{\kappa+1}+\sum_{\substack{\pm\ell j\kappa\\ \zeta_{\pm\ell j\kappa}\notin\Gamma}}\frac{\mu_{\kappa+1}}{\sin^2 s_{\kappa+1}}\le$$

$$\le\sum_{\pm\ell j\kappa}\frac{\mu_{\kappa+1}}{\sin^2 s_{\kappa+1}}=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{\ell-1}}\left(\frac{\mu_{n_\ell}}{\sin^2 s_{n_\ell}}+2\sum_{\kappa=n_\ell}^{\infty}\frac{\mu_{\kappa+1}}{\sin^2 s_{\kappa+1}}\right)=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{\infty}2^{\ell-1}\left(\frac{\mu_{n_\ell}}{\sin^2 s_{n_\ell}}+2\sum_{\nu=n_\ell+1}^{\infty}\frac{\mu_\nu}{\sin^2 s_\nu}\right)=\sum_{\ell=1}^{\infty}2^{\ell-1}M_\ell.$$

Получили, что

$$|\Phi(r\xi)|=\frac{|\varphi(r\xi)|}{r}\ge\frac{\exp\left(-(1-r^2)\sum_{\ell=1}^{\infty}2^{\ell-1}M_\ell\right)}{r}>\frac{e^{r-1}}{r}>1.$$

Поэтому $\{r\xi:\ 0<r<1\}\subset\Omega_\Phi$, следовательно, $\xi\in\partial\Omega_\Phi$. Это означает, что концы дуг $\{e^{it}:\ t\in I_{\ell j}\}$ принадлежат множеству $\partial\Omega_\Phi$ для всех номеров $l=1,2,\dots,$ $j=1,\dots,2^{\ell-1}$. Наконец, $\partial\Omega_\Phi$ – замкнутое множество, и мы заключаем, что $\{e^{it}:\ t\in K\}\subset\partial\Omega_\Phi\cap\mathbb{T}$.

Примечание при корректуре. Области вида $\{z\in\mathbb{D}:|z|<|\varphi(z)|\}$, где $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ – аналитическая функция, $\varphi(0)\ne0$, рассматриваются в работах [17]–[20].

Литература

1. M. Rosenblum, J. Rovnyak, *Hardy classes and operator theory.* Oxford Math. Monogr. (1985).
2. D. N. Clark, *On Toeplitz operators with unimodular symbols.* in: Operators in indefinite metric spaces, scattering theory and other topics (Bucharest, 1985), Oper. Theory Adv. Appl., **24**, Birkhäuser, Basel (1987), 59–68.
3. D. N. Clark, *Perturbation and similarity of Toeplitz operators.* in: Topics in operator theory: Ernst D. Hellinger memorial volume, Oper. Theory Adv. Appl. **48**, Birkhäuser, Basel (1990), 235–243.
4. D. N. Clark, *On Toeplitz operators with loops.* — J. Operator Theory **4** (1980), 37–54.
5. D. N. Clark, *On a similarity theory for rational Toeplitz operators.* — J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 6–31.
6. D. Wang, *Similarity theory of smooth Toeplitz operators.* — J. Operator Theory **12** (1984), 319–330.

7. D. V. Yakubovich, *Riemann surface models of Toeplitz operator.* — Toeplitz Operators and Spectral Function Theory, Oper. Theory Adv. Appl. **42**, Birkhäuser, Basel (1989), 305–415.
8. Д. В. Якубович, *К спектральной теории операторов Тёплица с гладким символом.* — Алгебра и анализ **3** (1991), No. 4, 208–226.
9. D. V. Yakubovich, *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators.* — J. Funct. Anal. **136** (1996), 294–330.
10. M. F. Gamal', *On Toeplitz operators similar to isometries.* — J. Operator Theory (to appear).
11. H. Bercovici, *Notes on invariant subspaces.* — Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 1–36.
12. Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств.* Мир, М. (1971).
13. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory.* Maruzen, Tokyo (1959).
14. P. R. Ahern, D. N. Clark, *On inner functions with H^p derivative.* — Michigan Math. J. **21** (1974), 115–127.
15. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).
16. B. D. MacCluer, J. H. Shapiro, *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergmann spaces.* — Canadian J. Math. **38** (1986), 878–906.
17. D. Mejía, Ch. Pommerenke, *The analytic fixed point function in the disk.* — Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), no. 2, 275–299.
18. D. Mejía, Ch. Pommerenke, *The analytic fixed point function* II. — Revista Colombiana de Matematicas **40** (2006), 39–52.
19. А. Ю. Солынин, *Аналитическая функция неподвижной точки и ее свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 238–252.
20. A. Yu. Solynin, *Hyperbolic convexity and the analytic fixed point function.* — Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1181–1186.

Gamal' M. F. On Toeplitz operators similar to unilateral shifts.

Let T be a Toeplitz operator on the Hardy space H^2 on the unit circle, and let the symbol of T be of the form φ/ψ, where φ is an inner function, ψ is a finite Blaschke product, and $\deg\psi \le \deg\varphi$. D. N. Clark proved that such T is similar to an isometry. In this paper we find necessary and sufficient conditions to such T be similar to a unilateral shift.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 апреля 2007 г.

E-mail: gamal@pdmi.ras.ru