Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

Ю. С. Белов

КРИТЕРИИ ДОПУСТИМОСТИ МАЖОРАНТ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ С БЫСТРО РАСТУЩИМ АРГУМЕНТОМ ПОРОЖДАЮЩЕЙ ВНУТРЕННЕЙ ФУНКЦИИ

§1. Введение

Пусть Θ – внутренняя функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Символом K_Θ мы обозначаем пространство $H^2 \ominus \Theta H^2$, где H^2 – пространство Харди в $\mathbb{C}^+$ (его элементы мы чаще всего будем воспринимать как квадратично суммируемые на $\mathbb{R}$ функции с неотрицательным спектром или, что то же, как граничные следы аналитических в $\mathbb{C}^+$ функций класса Харди $H^2(\mathbb{C}^+)$). Пространство K_Θ часто называют *модельным*, имея в виду роль, которую его векторные аналоги играют в теории Надя–Фояша; Θ называют *порождающей функцией пространства* K_Θ. Функция $\omega = e^{-\Omega}$, где Ω – неотрицательная функция, заданная на $\mathbb{R}$, называется *допустимой мажорантой для* K_Θ (или Θ-*допустимой*), если найдется такая ненулевая функция $f \in K_\Theta$, что

$$|f| \le \omega \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{R}.$$

Таким образом, то, что данная неотрицательная функция не Θ-допустима, равносильно следующей теореме единственности:

$$f \in K_\Theta, \quad |f| \le \omega \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{R} \Rightarrow f = 0.$$

(В [3] дана двойственная аппроксимационная переформулировка этого свойства.)

Допустимость мажорант для модельных пространств исследовалась в [6, 7, 1, 3, 4, 9]. В последней работе было, в частности, найдено новое доказательство теоремы Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе, не использующее ни аппарата комплексного анализа, ни теории потенциала. Цель настоящей статьи – найти

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00313.

достаточные условия допустимости для ряда конкретных пространств K_Θ, где в роли Θ выступает мероморфное произведение Бляшке B (в полуплоскости $\mathbb{C}^+$).

Той же теме посвящена и статья [4]. Однако, пространства K_Θ, рассмотренные в [4], по большей части отличны от пространств, которые изучаем мы. Методы, используемые нами, также отличны от методов работы [4].

В [6] были найдены довольно точные критерии допустимости мажорант для произведений B с "вертикальными" (т.е. чисто мнимыми) нулями; эти результаты были уточнены и обобщены А. Барановым в [1]. Результаты названных работ показывают, что критерии B-допустимости сильно отличаются друг от друга в зависимости от поведения на $\mathbb{R}$ аргумента произведения Бляшке B. Напомним, что мероморфная внутренняя (в $\mathbb{C}^+$) функция Θ аналитична на оси $\mathbb{R}$ и может быть представлена в виде

$$\Theta = e^{i\varphi},$$

где φ – вещественно-аналитическая функция, определенная на $\mathbb{R}$ с точностью до вещественной аддитивной постоянной, кратной 2π; мы будем называть ее *аргументом функции* Θ и обозначать символом $\arg\Theta$.

Мероморфная внутренняя функция имеет вид

$$\Theta(z) = e^{iaz}\prod_{k\in\mathbb{Z}}\frac{z-z_k}{z-\overline{z_k}}\cdot e^{i\alpha_k}, \quad \Im z > 0,$$

где $a \geq 0$, а последовательность $\{z_k\}$ такова, что $\Im z_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}|z_k| = \infty$, $z_k = x_k + iy_k$, $x_k \in \mathbb{R}$, $y_k > 0$ и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{y_k}{|z_k|^2} < +\infty \quad \text{(условие Бляшке)};$$

унимодулярные множители $e^{i\alpha_k}$ обеспечивают сходимость произведения. Функция $\arg\Theta$ возрастает, и ([6, стр. 1259])

$$\frac{d}{dx}\arg\Theta(x) = a + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2y_k}{(x-x_k)^2+y_k^2}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Как показано в работах [6, 7, 1], критерии Θ-допустимости сильно зависят от скорости вращения орта $\Theta(x)$ вокруг начала координат с ростом вещественной переменной x, точнее, от скорости возрастания функции $\arg\Theta$. Грубо говоря, анализ Θ-допустимости данной мажоранты облегчается с замедлением вращения орта $\Theta(x)$ и становится тем более проблематичным, чем быстрее происходит это вращение. Вектор $B(x)$, где B – мероморфное произведение Бляшке, вращается тем быстрее, чем теснее к оси $\mathbb{R}$ примыкают корни z_k. Так, скажем, в крайнем случае, когда B – *конечное* произведение, кривая $y = \arg B(x)$ совсем пологая, а критерии допустимости мажорант совершенно очевидны (ведь K_B в этом случае есть просто класс всех рациональных дробей $\frac{P(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_N)}$, где $\deg(P) < N$).

Для случая, когда корни произведения B "вертикальны" или "почти вертикальны" (т.е. в известном смысле далеки от $\mathbb{R}$), типичный рост аргумента еще медленный, его скорость затухает ($(\arg B)'(x) = o(1)$, $|x| \to \infty$), а B-допустимость удается исследовать почти исчерпывающим образом.

В работе [7] "в порядке эксперимента" были получены некоторые достаточные условия B-допустимости мажоранты ω для случая "горизонтальных корней" вида $z_k = \operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha + i$, $\alpha \in (1/2, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. (Ограничение $\alpha > 1/2$ продиктовано условием Бляшке, а случай $\alpha \geq 1$ отвечает сравнительно медленному росту функции $\arg B$ и исследован в [6]). Эти частные результаты "эспериментального" характера в нашей статье включены в гораздо более общую схему, охватывающую последовательности нулей вида

$$z_k = f(k) + i, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

а затем и

$$z_k = f(k) + ig(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

где f – вещественная возрастающая, а g – положительная функции вещественной переменной, подчиненные некоторым естественным условиям (среди них, конечно, условие Бляшке). Эти предположения охватывают не только "чисто горизонтальные" ситуации ($g = \mathrm{const}$) или близкие к ним ситуации корней, лежащих в полосе $(\inf\limits_{s\in\mathbb{R}} g(s) > 0,\ \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} g(s) < +\infty)$, но также и некоторые случаи неограниченного роста ординат $g(k)$ $(\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty)$. Самым проблематичным оказывается случай нулей, неограниченно приближающихся к оси $\mathbb{R}$ $(\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0)$, который также рассмотрен в этой работе.

Продвижение, полученное нами по сравнению с [7], состоит не только в большей общности изученных ситуаций, но и в самом характере условий допустимости. В [7] условия допустимости налагаются не непосредственно на мажоранту ω (или, что то же, на Ω), а на преобразование Гильберта $\widetilde{\Omega}$ функции Ω. Используя недавний результат Ф. Л. Назарова об "исправлении" преобразования Гильберта липшицевой функции [9], мы находим достаточные условия допустимости, налагаемые непосредственно на Ω и довольно просто проверяемые.

Данная работа посвящена исключительно *достаточным* условиям допустимости. Вопрос об их точности остается открытым. Некоторое продвижение в этом направлении получено в [2].

Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{P}$ будет обозначать меру Пуассона на $\mathbb{R}$:

$$d\mathbf{P}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{1+x^2};$$

символ $\mathcal{L}(F)$ – логарифмический интеграл неотрицательной функции F, заданной на $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(F) = \int\limits_{\mathbb{R}} \log F d\mathbf{P};$$

символ $\mathrm{Lip}_\alpha(I)$ будет обозначать пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α на промежутке I:

$$f \in \mathrm{Lip}_\alpha(I) \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \le C_f |x-y|^\alpha, \quad x, y \in I.$$

Исследуя мажоранту на допустимость, мы будем считать ее строго положительной и ограниченной. Напомним, что конечность интеграла $\mathcal{L}(\omega)$ (т.е. неравенство $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$) *необходимо* для Θ-допустимости. Отметим также, что если для данной мажоранты удалось найти такую Θ-допустимую мажоранту ω_1, что $\omega \ge \omega_1$, то мажоранта ω тоже Θ-допустима. Поэтому, имея дело с положительными непрерывными мажорантами ω, мы часто можем считать их сколь угодно гладкими (ведь для каждой положительной функции $\omega \in C(\mathbb{R})$ с конечным интегралом $\mathcal{L}(\omega)$ легко построить такую положительную функцию $\omega_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\mathcal{L}(\omega_1) > -\infty$ и $\omega_1 \le \omega$).

Мы постоянно будем использовать преобразование Гильберта, понимая его как оператор, преобразующий любую функцию $F \in$

$L^1(\mathbf{P})$ в функцию $\widetilde{F}$,

$$\widetilde{F}(x) = \frac{1}{\pi}(p.v.) \int_{\mathbb{R}} F(t) \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) dt; \tag{1.4}$$

как известно, этот интеграл сходится почти всюду на $\mathbb{R}$.

Статья организована следующим образом. В §2, ограничиваясь сначала частным случаем ($z_k = \operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha + i$, $\alpha \in (1/2, 1)$), рассмотренным в [7], мы избавляемся от одного громоздкого условия B-допустимости, участвовавшего в [7, теорема 1.10], заменив его простым условием, относящимся непосредственно к Ω (вместо $\widetilde{\Omega}$) (теорема 3 п. 2).

В теореме 4 (п. 2.2) мы находим асимптотику функции $(\arg B)'$ для довольно общего класса произведений Бляшке с "чисто горизонтальными" нулями, а в теореме 5 применяем ее и приходим к достаточным условиям B-допустимости для таких B; эти условия формулируются с участием функции $\widetilde{\Omega}$. В теореме 5 речь идет о "чисто горизонтальных" нулях.

В §3, используя технику работы [9], мы освобождаемся от участия преобразования Гильберта в достаточных условиях B-допустимости. Для этого, как и в [9], нам приходится доказать "теорему об исправлении" преобразования Гильберта, представляющую, на наш взгляд, самостоятельный интерес (см. теорему 7).

В §4 мы обращаемся к произведениям B, которые отвечают нулям $z_k = f(k) + ig(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где функция f растет от $-\infty$ до $+\infty$, функция g положительна и может расти до $+\infty$. Иллюстрацией доказанной здесь теоремы 9 служит следствие 9.1, где выписаны простые достаточные условия B-допустимости для произведений B, построенных по нулям $z_k = \operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha + i|k|^\gamma$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), где $1/2 < \alpha < 1$, $0 \le \gamma < 2\alpha - 1$. Заметим, что основная теорема 9 формально содержит "чисто горизонтальную" теорему 8, доказательство которой мы предпочли изложить отдельно, не загромождая его осложнениями, вызванными неограниченным ростом ординат нулей. Кроме того, сопоставление этих теорем демонстрирует определенную устойчивость найденных нами условий допустимости: в случае разрешенного нами роста ординат условия допустимости остаются теми же, что и для чисто горизонтальных нулей.

В заключительном §5 излагается то немногое, что удалось получить для последовательностей нулей, неограниченно приближающихся к прямой $\mathbb{R}$.

§2. Условия допустимости в терминах функции $\widetilde{\Omega}$

Как и в [7], назовем функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *в основном возрастающей,* если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция f абсолютно непрерывна;

2а) существует возрастающая последовательность $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ такая, что $f(d_n)=2\pi n$, $\lim\limits_{n\to-\infty} d_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=+\infty$;

2б) последовательность $l_n=\frac{1}{2}(d_n-d_{n-1})$ ограничена;

3) существует константа C такая, что

$$\frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_{n-1}}^{d_n}|f'(x)-f'(t)|dt\le C \tag{2.1}$$

для всех $x\in(d_{n-1},d_n)$ и всех $n\in\mathbb{Z}$.

Основным источником критериев допустимости в работе [7] служит следующее утверждение.

Теорема 1 (Хавин–Машреги). *Если функция $\Omega=-\log\omega$ ограничена снизу и функция $\arg\Theta+2\widetilde{\Omega}$ в основном возрастающая, то функция ω – допустимая мажоранта для пространства K_Θ.*

В работе [3] показано, что теорема 1 верна, даже если опустить условие 2б).

В этой статье в роли функции Θ будет выступать произведение Бляшке

$$\Theta(z)=B(z)=\prod_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1-\frac{z}{z_k}}{1-\frac{z}{\overline{z}_k}},\qquad \lim_{|k|\to+\infty}|z_k|=+\infty \tag{2.2}$$

с быстро растущим аргументом $\arg\Theta(x)$. Мы будем предполагать, что $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\Im z_k}{|z_k|^2}<+\infty$ (условие сходимости произведения Бляшке). Эти условия выполнены, если $z_k=\operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha+i$, $(\frac{1}{2}<\alpha)$; соответствующее произведение Бляшке мы будем обозначать символом B_α. Мы ограничимся случаем

$$\alpha\in\bigl(1/2,1\bigr). \tag{2.3}$$

Случай $\alpha \geq 1$ разобран (с несколько иной точки зрения) в работах [6, 7]. При условии (2.3) в работе [7] были получены следующие достаточные условия допустимости.

Теорема 2 (Хавин–Машреги). *Предположим, что функция Ω такова, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty$, $\widetilde{\Omega} \in C^1(\mathbb{R})$, $\Omega \geq 0$, причем выполнены следующие условия:*

$$\text{a)}\ -\frac{\pi}{\alpha} \leq \liminf_{|x|\to\infty} \frac{\widetilde{\Omega}'(x)}{|x|^{\frac{1}{\alpha}-1}} \leq \limsup_{|x|\to\infty} \frac{\widetilde{\Omega}'(x)}{|x|^{\frac{1}{\alpha}-1}} < C,$$

для некоторого $C > 0$;

b) $\lambda_t(t^{1-\frac{1}{\alpha}}) \leq K$, *где* λ_t *– модуль непрерывности функции* $\widetilde{\Omega}'$ *на* $\mathbb{R}\backslash(-t,t)$,

то есть $\lambda_t(\delta) = \sup\{|\widetilde{\Omega}'(t_1) - \widetilde{\Omega}'(t_2)| : |t_1|, |t_2| \geq t, |t_1 - t_2| < \delta\}$.

Тогда функция $\omega = e^{-\Omega}$ допустима для пространства K_{B_α}.

2.1. Предварительные замечания. В дальнейшем нам здесь понадобятся два несложных утверждения. Обозначим через S оператор усреднения по Стеклову: $Sf(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-1}^{x+1} f(s)ds$.

Утверждение 1. *Если функция f дифференцируема, то $|Sf(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{|s-x|<1} |f'(s)|$, $(Sf)'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = f'(s)$, где $s = s(x) \in [x-1, x+1]$.*

Утверждение 2. *Пусть $\beta \in (0,1)$, $\Omega(x) = |x|^\beta$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\widetilde{\Omega}$ удовлетворяет условиям* a) *и* b) *теоремы* 2 *(и тем самым мажоранта ω ($\omega(x) = e^{-|x|^\beta}$) допустима для пространства K_{B_α}).*

Функция Ω в последнем утверждении суммируема по мере Пуассона при любом $\beta \in (0,1)$ и чрезвычайно правильна; однако для многих “вертикальных” (чисто мнимых) последовательностей нулей K_B-допустимость имеет место не для всякой мажоранты $e^{-|x|^\beta}$, $0 < \beta < 1$; см. примеры в работе [7].

Доказательство. Как известно,

$$(\widetilde{\Omega})'(x) = c_\beta((\operatorname{sgn} x)|x|^\beta)' = c_\beta \operatorname{sgn}(x)\beta|x|^{\beta-1}$$

при любом $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, так что функция $\widetilde{\Omega}'$ удовлетворяет условию a) теоремы 2, ибо $\beta - 1 < 0 < \frac{1}{\alpha} - 1$. С другой стороны, для выполнения условия b) достаточно оценки $\widetilde{\Omega}''(x) = O(|x|^{\frac{1}{\alpha}-1})$ (см. [7, стр. 1300]). Так как $\widetilde{\Omega}''(x) = c_\beta \operatorname{sgn}(x)|x|^{\beta-2}$ ($x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$), условие b) теоремы 2 тоже выполнено. □

Теорема 3. *В теореме* 2 *условие* b) *можно заменить парой условий*

1) $\widetilde{\Omega} \in C^2(\mathbb{R})$ *и*

2) $\Omega'(x) = O(|x|^\beta)$, $\quad |x| \to \infty$, *при некотором* $\beta < 1$ *(подчеркнем, что* β *здесь не связано с* α*).*

Условие 1 несущественно, см. Введение.

Доказательство. 1. Как уже говорилось, условие b) теоремы 2 выполнено, если верна оценка $\widetilde{\Omega}''(x) = O(|x|^{\frac{1}{\alpha}-1})$ (см. [7, стр. 1300]);

2. Последняя оценка второй производной верна для функции $S\Omega$: $|\widetilde{S\Omega}''(x)| \le 2 \sup\limits_{|s-x|\le 1} |\widetilde{\Omega}'(s)| = O(|x|^{\frac{1}{\alpha}-1})$, так как $(\widetilde{S\Omega})' = S[(\widetilde{\Omega})]'$ (операторы S и $\sim$ перестановочны, см. подробности в [7, стр. 1286–1287]). Далее, верна оценка $|S\Omega(x) - \Omega(x)| = |\Omega(x_1) - \Omega(x)| \le |\Omega'(x_2)| = O(|x|^\beta)$ (см. Утверждение 1) для некоторых x_1 и x_2 из интервала $[x-1, x+1]$. Следовательно, функция $S\Omega$ суммируема по мере Пуассона, и существуют такие константы $C_{\Omega,1}$ и $C_{\Omega,2}$, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$S\Omega(x) + C_{\Omega,1}|x|^\beta + C_{\Omega,2} \ge \Omega(x). \tag{2.4}$$

С другой стороны, функция $S\Omega(x) + C_{\Omega,1}|x|^\beta + C_{\Omega,2}$ удовлетворяет условиям a) и b) теоремы 2, так как $\widetilde{|x|^\beta}' = c_\beta \operatorname{sgn}(x)\beta|x|^{\beta-1} \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$ и $\widetilde{|x|^\beta}'' = c_\beta \operatorname{sgn}(x)\beta(\beta-1)|x|^{\beta-2} \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$. Значит, функция ω, заданная равенством

$$\omega(x) = e^{-(S\Omega(x) + C_{\Omega,1}|x|^\beta + C_{\Omega,2})}, \quad x \in \mathbb{R},$$

допустима. Следовательно, допустима и функция $\omega_1 = e^{-\Omega}$, так как. $\omega_1 \ge \omega$ (см. неравенство (2.4)). □

2.2. Оценка производной аргумента произведения Бляшке. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго возрастающая функция, причем $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+f^2(t)} < +\infty$. Обозначим через B_f произведение Бляшке, нулями которого служат точки $z_k = f(k) + i$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку мы интересуемся значениями функции f лишь в целых точках, мы можем считать, что функция f дифференцируема. Условие сходимости интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+f^2(t)}$ гарантирует сходимость произведения Бляшке. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm\infty$. Тогда, в силу (1.1),

$$\frac{d}{dx} \arg B_f(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-f(k))^2+1} = 2\sigma(x). \tag{2.5}$$

Пусть $x > f(0)$, а l – такое число, что $f(l) \le x < f(l+1)$. Тогда $l = f^{-1}(x) + O(1)$. Разобъем сумму на три части:

$$\sigma(x) = \Big(\sum_{k=-\infty}^{0} + \sum_{k=1}^{l} + \sum_{k=l+1}^{+\infty} \Big) \frac{1}{(x-f(k))^2+1} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Далее,

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-f(-k))^2+1} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(f(0)-f(-k))^2+1} < +\infty.$$

Для оценки сумм Σ_2 и Σ_3 положим

$$F(t) = \frac{1}{(x-f(t))^2+1}, \quad t > 0.$$

Таким образом,

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{l} F(k), \quad \Sigma_3 = \sum_{k=l+1}^{+\infty} F(k).$$

Заметим, что функция F возрастает на промежутке $[0, f^{-1}(x)]$ и убывает на промежутке $[f^{-1}(x), +\infty)$, так что

$$F(1) + \int_1^l F(t)dt \le \Sigma_2 \le \int_1^l F(t)dt + 1 \quad (0 \le F \le 1),$$

то есть

$$\Sigma_2 = \int\limits_1^l F(t)dt + O(1) = \int\limits_0^{f^{-1}(x)} F(t)dt + O(1),$$

$$F(l+1) + \int\limits_{l+1}^{+\infty} F(t)dt \geq \Sigma_3 \geq \int\limits_{l+1}^{+\infty} F(t)dt,$$

$$\Sigma_3 = \int\limits_{f^{-1}(x)}^{+\infty} F(t)dt + O(1).$$

Положим $h(x) = (f^{-1})'(x)$. Предположим, что $h \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R})$ (при некотором $\beta \in (0,1)$). Тогда для $x > 0$

$$\int\limits_0^{f^{-1}(x)} F(t)dt = \int\limits_0^{f^{-1}(x)} \frac{dt}{(x - f(t))^2 + 1} = \int\limits_0^x \frac{h(x-z)}{z^2+1} dz =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{h(x)}{z^2+1} dz + \int\limits_0^x \frac{h(x-z) - h(x)}{z^2+1} dz \leq$$

$$\leq h(x) \int\limits_0^x \frac{dz}{z^2+1} + C_f \int\limits_0^x \frac{z^\alpha}{z^2+1} dz \leq \frac{\pi}{2} h(x) + C_2.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^x \frac{h(x)}{z^2+1} dz = h(x)\frac{\pi}{2} - h(x) \int\limits_x^{+\infty} \frac{dz}{z^2+1} \geq \frac{\pi}{2} h(x) - \frac{h(x)}{x} \geq \frac{\pi}{2} h(x) - C_4.$$

Аналогичо оценивается интеграл $\int\limits_{f^{-1}(x)}^{+\infty} F(t)dt$.

Таким образом, доказана сформулированная ниже теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям (где $h = h(f) = (f^{-1})'$):*

a) *функция f строго возрастает;*

b) *$h \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R})$ при некотором $\beta \in (0,1)$;*

c) $\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{dt}{f^2(t)+1} < +\infty.$

Тогда произведение Бляшке с нулями $z_k = f(k) + i$ $(k \in \mathbb{Z})$ *удовлетворяет следующему условию*

$$\frac{d}{dx}\arg B_f(x) = 2\pi h(x) + O(1), \quad |x| \to \infty. \tag{2.6}$$

Замечание 1. Дифференцируемая строго возрастающая функция f такая, что $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha \log^\delta(|x|+2)$, $|x| \geq C_\delta$, $(\frac{1}{2} < \alpha < 1, \delta \in \mathbb{R})$, удовлетворяет условиям теоремы 4.

Замечание 2. Пусть B_1 и B_2 – произведения Бляшке, построенные по нулям $\{z_{k,1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{z_{k,2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, причем

$$\text{a)}\quad \Re(z_{k,1}) = \Re(z_{k,2}); \qquad \text{b)}\quad 0 < \inf_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\Im(z_{k,1})}{\Im(z_{k,2})} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\Im(z_{k,1})}{\Im(z_{k,2})} < \infty.$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные c, C, что

$$c \leq \frac{\frac{d}{dx}\arg B_1(x)}{\frac{d}{dx}\arg B_2(x)} \leq C, \quad \text{при любом} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $z_{k,j} = x_k + iy_{k,j}$ $(j = 1, 2)$. Если $y_1^2 \leq y_2^2$, то $\frac{a^2+y_1^2}{a^2+y_2^2} \leq 1$ при любом $a \in \mathbb{R}$; если же $y_1^2 > y_2^2$, то при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{a^2+y_1^2}{a^2+y_2^2} = 1 + \frac{y_1^2 - y_2^2}{a^2+y_2^2} \leq \frac{y_1^2}{y_2^2}.$$

Значит, при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{y_2}{a^2+y_2^2} \Big/ \frac{y_1}{a^2+y_1^2} \leq \max(1, y_1/y_2) \leq \max(1, C),$$

если $y_1/y_2 \leq C$. Поэтому при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\arg B_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{2y_{k,1}}{(x_k - x)^2 + y_{k,1}^2} \leq$$

$$\leq \max(1, C) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{2y_{k,2}}{(x_k - x)^2 + y_{k,2}^2} = \max(1, C)\frac{d}{dx}\arg B_2(x),$$

если $y_{k,1}/y_{k,2} \leq C$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Замечание 3. Для произведений Бляшке, построенных по нулям $z_k = f(k) + ig(k)$, где $0 < c \le g(k) \le C$, вместо асимптотической формулы теоремы 4 получаем оценку

$$(\arg B)'(x) \asymp h(x).$$

2.3. Условия допустимости для пространства K_{B_f}. Теперь мы готовы доказать некоторые достаточные условия допустимости для пространства K_{B_f}.

Теорема 5. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

a) *функция f строго возрастает и дифференцируема;*

b) $h(= h_f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$, $(0 < \alpha < 1)$; c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+f^2(t)} < +\infty.$

(Это – условия предыдущей теоремы). Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Тогда любая гладкая функция $\omega = e^{-\Omega}$ такая, что

1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty$; 2) $\Omega'(x) = O(|x|^\beta)$ *(при некотором $\beta \in (0,1)$);*

3) $|\widetilde{\Omega}'(x)| \le Ah(x)$ *при любом $x \in \mathbb{R}$ и при некотором $A < 2\pi$,*

допустима для пространства K_{B_f}. (Напомним, что B_f – произведение Бляшке с нулями $z_k = f(k) + i$, $k \in \mathbb{Z}$.)

Эта теорема – того же типа, что и теорема 2, однако условие b) теоремы 2 заменено более простой оценкой 2).

Доказательство. Согласно теореме 1, достаточно доказать, что функция $\Phi_f = \arg B_f + 2\widetilde{\Omega}_1$ *в основном возрастает* для некоторой мажоранты $\Omega_1 \ge \Omega$ с конечным интегралом $\int_{\mathbb{R}} \Omega_1 d\mathbf{P}$. Заметим, что

$$(2\pi - A)h \le \frac{d}{dx}\Phi_f \le (2\pi + A)h, \tag{2.7}$$

так что $\frac{d}{dx}\Phi_f \ge c > 0$ (функция h отделена от нуля, так как $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f'| < +\infty$). Следовательно, существует такая строго возрастающая последовательность d_n, что $\Phi_f(d_n) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что последовательность $l_n = d_{n+1} - d_n$ ограничена. Теперь осталось проверить условие (2.1).

Функция Ω такова, что $|\widetilde{\Omega}'| \le C_{\Omega,3}h$. Взяв (если это необходимо) в качестве мажоранты Ω_1 функцию $S\Omega + C_1|x|^\beta + C_2$ (напомним, что $|S\Omega(x) - \Omega(x)| \le C_1|x|^\beta + C_2$, $x \in \mathbb{R}$), мы можем считать, что $|\widetilde{\Omega}''| \le C_{\Omega,3}h + C_{\Omega,4}$.

Положим $\phi(x) = \frac{d}{dx}\arg B_f(x) - 2\pi h(x)$. Функция ϕ ограничена (см. теорему 4). Далее,

$$\frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} |\Phi_f'(x) - \Phi_f'(t)|dt \le \frac{\pi}{l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} |h(x) - h(t)|dt +$$

$$+\frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} |\phi(x) - \phi(t)|dt + \frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} |\widetilde{\Omega}'(x) - \widetilde{\Omega}'(t)|dt \le$$

$$\le C\frac{\pi}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} |x-t|^\alpha dx + \frac{d_{n+1} - d_n}{l_n}\max_{s\in\mathbb{R}}|\phi(s)| +$$

$$+\frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} (d_{n+1} - d_n)|\widetilde{\Omega}''(\zeta(t))|dt,$$

где $\zeta(t) \in [d_n, d_{n+1}]$. Первое и второе слагаемые ограничены. Используя оценку $|\widetilde{\Omega}''| \le C_{\Omega,3}h + C_{\Omega,4}$, липшицевость функции h и ограниченность последовательности l_n, получаем ограниченность третьего слагаемого:

$$\frac{1}{2l_n}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} (d_{n+1} - d_n)|\widetilde{\Omega}''(\zeta(t))|dt \le C_0 + C_{\Omega,3}\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} h(\zeta(t))dt =$$

$$= C_0 + C_{\Omega,3}\Bigg(\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} h(t)dt + \int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} [h(\zeta(t)) - h(t)]dt\Bigg) \le$$

$$\le C_1 + C_2\int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} h(t)dt \le C_1 + C_2(f^{-1}(d_{n+1}) - f^{-1}(d_n)) =$$

$$= C_1 + C_2(f^{-1}(\Phi_f^{-1}(2\pi n + 2\pi)) - f^{-1}(\Phi_f^{-1}(2\pi n))) =$$

$$= C_1 + C_2(2\pi(f^{-1} \circ \Phi_f^{-1})'(\xi)) = C_1 + C_2 2\pi \frac{h(\Phi_f^{-1}(\xi))}{\Phi_f'(\Phi_f^{-1}(\xi))} \le C_3,$$

где $2\pi n \le \xi \le 2\pi n + 2\pi$. □

Замечание 4. Дифференцируемая строго возрастающая функция f такая, что $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha \log^\delta(|x|+2)$ при $|x| \ge 1$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), удовлетворяет условиям теоремы при любом $\delta \in \mathbb{R}$.

§3. Условия допустимости в терминах функции Ω

В условиях допустимости в теореме 5 кроме самой функции Ω участвует еще и $\widetilde{\Omega}$. Это главный недостаток теоремы 5. Но нам не обязательно доказывать допустимость функции Ω. Достаточно доказать допустимость хоть какой-нибудь функции Ω_1 такой, что $\Omega_1 \ge \Omega$. В связи с этим обстоятельством вопрос о существовании мажоранты Ω_1 функции Ω с нужными свойствами приобретает значительный интерес.

Недавно в работе [9] была доказана теорема о существовании такой мажоранты с липшицевым преобразованием Гильберта.

Теорема 6 (Ф. Л. Назаров)**.** *Пусть Ω – неотрицательная функция класса $L^1(\mathbf{P}) \bigcap \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция Ω_1, что*

$$\text{a)}\quad \Omega_1 \ge \Omega; \qquad \text{b)}\quad \Omega_1 \in \mathrm{Lip}_1(\varepsilon, \mathbb{R});$$
$$\text{c)}\quad \Omega_1 \in L^1(\mathbf{P}); \qquad \text{d)}\quad \widetilde{\Omega_1} \in \mathrm{Lip}\,(\varepsilon, \mathbb{R}).$$

Доказательство теоремы 6 опирается на существование локальной мажоранты, доказанное Ф. Л. Назаровым (см. [9]).

Через cI мы будем обозначать интервал длины $c|I|$ с тем же центром, что и интервал I.

Основная лемма. *Пусть I – замкнутый ограниченный промежуток, δ – положительное число, $K \ge 1$, $f \in \mathrm{Lip}_1(K, I)$ и $f \ge 0$, $\|f\|_\infty \le \delta|I|$. Тогда найдется такая функция $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F \ge 0$, что*

1) $F \equiv 0$ *вне* $\dfrac{3}{2}I$; 2) $F \ge f$ *на промежутке* I; 3) $\|F'\|_\infty \le A\delta$;

$$4)\quad \|\widetilde{F}'\|_\infty \le A\delta; \qquad 5)\quad \int_I f(s)\,ds \ge \frac{A\delta}{K}\int_{\mathbb{R}} F(s)\,ds,$$

где A – абсолютная константа.

Нам понадобится следующая оценка роста функции Ω.

Утверждение 3. *Пусть функция λ монотонно возрастает на луче $[0,+\infty)$ и монотонно убывает на луче $(-\infty,0]$, а положительная дифференцируемая функция Ω такова, что $\Omega\in L^1(\mathbf{P})$, $|\Omega'|\le\lambda$, $\Omega(0)=0$. Тогда $\Omega(x)=o(|x|\sqrt{\lambda(x)})$ (как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$).*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x>0$. Оценим функцию Ω: $\Omega(x)=\int\limits_0^x\Omega'(t)dt\le\int\limits_0^x\lambda(t)dt\le x\lambda(x)$. Следовательно, если $0\le x-\frac{\Omega(x)}{2\lambda(x)}\le y\le x$, то

$$\Omega(y)=\Omega(x)+\Omega(y)-\Omega(x)=\Omega(x)+\Omega'(\xi)(y-x)\ge$$
$$\ge\Omega(x)+\lambda(\xi)(y-x)\ge\Omega(x)+\lambda(x)(y-x).$$

Далее,

$$\int\limits_{x-\frac{\Omega(x)}{2\lambda(x)}}^{x}\frac{\Omega(y)}{1+y^2}dy\ge\frac{1}{1+x^2}\int\limits_{x-\frac{\Omega(x)}{2\lambda(x)}}^{x}\Omega(y)dy\ge$$
$$\ge\frac{1}{1+x^2}\int\limits_{x-\frac{\Omega(x)}{2\lambda(x)}}^{x}(\Omega(x)+\lambda(x)(y-x))dy=\frac{3}{8}\cdot\frac{\Omega^2(x)}{(1+x^2)\lambda(x)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Omega(x)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{\lambda(x)}}\le3\Bigg(\int\limits_{x-\frac{\Omega(x)}{2\lambda(x)}}^{+\infty}\frac{\Omega(y)}{1+y^2}dy\Bigg)^{\frac12}. \qquad\square$$

Теорема 7. *Пусть дважды дифференцируемая неотрицательная функция Ω такова, что $\Omega\in L^1(\mathbf{P})$, $|\Omega'|\le\lambda$, $\Omega(0)=0$, где функция λ обладает следующими свойствами:*

1) $\lambda\ge1$; 2) *функция λ монотонно возрастает на луче $[0,+\infty)$ и монотонно убывает на луче $(-\infty,0]$;*

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\lambda(x)=+\infty$; 4) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{\lambda(x)}{\lambda(\frac{x}{2})}\right|\le+\infty$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует функция* Ω_1 *такая, что*

a) $\Omega_1 \geq \Omega$; b) $\Omega_1 \in L^1(\mathbf{P})$;

c) $|\widetilde{\Omega}_1'(x)| \leq \varepsilon\lambda(x)$; d) $|\Omega_1'(x)| \leq \varepsilon\lambda(x)$.

Доказательство. Разобъем вещественную прямую $\mathbb{R}$ на промежутки следующим образом: $\mathbb{R} = I_0 \cup \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} I_k \cup \bigcup\limits_{k=-N}^{-\infty} I_k$.

$$I_0 = [-2^N, 2^N], \quad I_k = [2^k, 2^{k+1}] \quad (k \geq N),$$
$$I_k = [-2^{k+1}, -2^k] \quad (k \leq -N).$$

Число N выберем позднее. Пусть $f_j = \Omega \mid_{I_j}$ $(j > 0)$. Тогда при $x > 0$

$$|f_j(x)| \leq A_1 x\sqrt{\lambda(x)} \leq 2A_1 2^j\sqrt{\lambda(2^{j+1})},$$
$$|f_j'(x)| \leq \lambda(x) \leq \lambda(2^{j+1}); \quad (x \in I_j).$$

Положим $g_j(x) = \frac{f_j(x)}{\lambda(2^{j+1})}$, $x \in I_j$. Пусть $\delta > 0$. Если $N = N(\delta)$ достаточно велико, то

$$|g_j(x)| \leq \frac{2A_1}{\sqrt{\lambda(2^{j+1})}} 2^j = \frac{2A_1}{\sqrt{\lambda(2^{j+1})}} \cdot |I_j| \leq \delta |I_j| \quad (x \in I_j),$$
$$|g_j'(x)| \leq 1 \quad (x \in I_j).$$

Следовательно, согласно основной лемме, существуют такие функции G_j, что

$$G_j \geq g_j, \quad G_j \equiv 0 \ \text{ вне } \ \frac{3}{2} I_j, \quad |\widetilde{G}_j'| \leq A_2\delta, \quad |G_j'| \leq A_2\delta,$$
$$\int\limits_{I_j} g_j(s)ds \geq A_3\delta \int\limits_{\mathbb{R}} G_j(s)ds, \quad G_j \geq 0, \quad G_j \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим функции $H_j = G_j \cdot \lambda(2^{j+1})$. Тогда

$$H_j \geq f_j \text{ на } I_j, \quad H_j \equiv 0 \ \text{ вне } \ \frac{3}{2}|I_j|,$$
$$|\widetilde{H}_j'| \leq A_2\delta\lambda(2^{j+1}), \quad |H_j'| \leq A_2\delta\lambda(2^{j+1}).$$

Для $j < 0$ аналогично построим функции H_j. Функцию H_0 выберем так, что $H_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, H_0 неотрицательна и финитна, $H_0 \geq f_0$, $|\widetilde{H}_0'| \leq \delta$. Положим $\Omega_1 = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} H_j$. Ясно, что $\Omega_1 \geq \Omega$. Так как покрытие вещественной прямой интервалами $\frac{3}{2}I_j$ имеет конечную кратность, а функция λ удовлетворяет условию удвоения 4) теоремы 7, то для некоторой абсолютной константы A_4

$$|\Omega_1'(x)| \leq A_4\delta\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Осталось оценить функцию $\widetilde{\Omega_1}'(x)$. Пусть $x \in I_{j-1} \cup I_j \cup I_{j+1}$. Поскольку функция λ обладет свойством 4), существует константа A_3 такая, что

$$|\widetilde{H}_j'(x)| \leq A_3\delta\lambda(x) \quad \text{при} \quad x \in I_{j-1} \cup I_j \cup I_{j+1}.$$

Пусть $x \notin \frac{3}{2}I_j$. Тогда

$$|\widetilde{H}_j'(x)| = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{H_j(t)}{(x-t)^2}dt \leq 16 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{H_j(t)}{t^2}, \tag{3.1}$$

так как $|x - t| \geq \frac{|t|}{4}$.

Ясно, что $\int\limits_{\mathbb{R}} H_j \leq A_4\delta \int\limits_{\mathbb{R}} f_j$. Следовательно, функция Ω_1 лежит в $L^1(\mathbf{P})$, так как $\frac{1}{1+x^2} \asymp \frac{1}{1+y^2}$, $x, y \in I_j$. Пусть $x \in I_{j_0}$, тогда

$$|\widetilde{\Omega_1}'(x)| \leq |\widetilde{H}_0'(x)| + \sum_{|j|\geq N} |\widetilde{H_j}'(x)| \leq$$

$$\leq \delta + \sum_{|j-j_0|\leq 1, |j|\geq N} |\widetilde{H}_j'(x)| + \sum_{|j-j_0|>1, |j|\geq N} |\widetilde{H}_j'(x)| \leq$$

$$\leq \delta + 3A_3\delta\lambda(x) + 16 \sum_{|j-j_0|\geq 1, |j|\geq N} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{H_j(t)}{t^2}dt \leq$$

$$\leq A_4\delta\lambda(x) + 16 \int\limits_{|t|\geq 2^{N-1}} \frac{\Omega_1(t)}{t^2}dt \leq A_5\delta\lambda(x)$$

при надлежащем выборе N (так как $\lambda \geq 1$). $\square$

Следствие 7.1. *Пусть функции Ω и λ удовлетворяют условиям теоремы 7. Если для некоторого $\beta \in (0,1)$ и некоторой константы $C(\lambda)$ выполнено неравенство $\lambda(x) \le C(\lambda)|x|^\beta$, $x \in \mathbb{R}$, то существует мажоранта Ω_1, удовлетворяющая не только условиям* a)–d) *теоремы 7, но и дополнительному неравенству*

$$|\widetilde{\Omega}''(x)| \le \varepsilon\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применяя теорему 7 к функциям Ω и λ и числу ε_0 (выбор числа $\varepsilon_0 = \varepsilon(\Omega, \lambda)$ мы объясним позднее), построим функцию Ω_1. Положим $\Omega_2(x) = S\Omega_1(x) + C_1(\Omega_1)|x|^\beta + C_2(\Omega_1)$. Выберем константы $C_1(\Omega_1)$ и $C_2(\Omega_1)$ такими, что (см. доказательство теоремы 3)

$$\Omega_2(x) \ge \Omega_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Напомним, что S – оператор усреднения по Стеклову.) Заметим, что если $|x-y| < 1$ и $|x| > 2$, то отношение $\lambda(x)/\lambda(y)$ ограничено. Как и в доказательстве теоремы 3, нетрудно видеть, что $S\Omega_1'(x) = \Omega_1'(s_1)$, $\widetilde{(S\Omega_1)}'(x) = \widetilde{\Omega_1}'(s_2)$, где $s_1, s_2 \in [x-1, x+1]$. Заметим, что $|\widetilde{(S\Omega_1)}''(x)| = \frac{1}{2}|\widetilde{\Omega_1}'(x+1) - \widetilde{\Omega_1}'(x-1)| \le \sup\limits_{|s-x|\le 1} |\widetilde{\Omega_1}'(s)| \le \varepsilon_0\lambda(x+1) \le c(\lambda)\varepsilon_0\lambda(x)$. Следовательно, функция $S\Omega_1$ удовлетворяет неравенствам c) и d) теоремы 7 и условию (3.2) при надлежащем выборе ε_0. Еще раз уменьшив ε_0, мы можем добиться выполнения неравнств c), d) и (3.2) для функции Ω_2, начиная с некоторго места. Нетрудно видеть, что существует мажоранта функции Ω_2 (со сходящимся интегралом Пуассона), для которой эти неравенства выполнены на всей вещественной оси. Следствие доказано. ☐

Напомним, что $h(x) = (f^{-1})'(x)$.

Теорема 8. *Пусть дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $h(= h_f) \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}) \quad (0 < \beta < 1)$; 2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+f^2(t)} < +\infty$;

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f'(x) = 0$; 4) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{h(x)}{h(x/2)}\right| < +\infty$;

$$5) \quad \sup_{s\in[\min(0,x),\max(0,x)]} h(s) \le C_h h(x).$$

Тогда любая гладкая функция $\omega = e^{-\Omega}$ такая, что

$$\text{a)} \quad \Omega \in L^1(\mathbf{P}); \qquad \text{b)} \quad |\Omega'| \le Mh \quad \textit{для некоторого } M > 0,$$

допустима для пространства K_{B_f}.

Доказательство. Так как $h(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, то (см. условие 3 теоремы 8) $\lim\limits_{|x|\to\infty} h(x) = +\infty$. Положим $\lambda(x) = C \sup\limits_{s\in[\min(0,x),\max(0,x)]} h(s)$, где константа C такова, что $\lambda \ge 1$. Функция λ возрастает на луче $[0, +\infty)$, убывает на луче $(-\infty, 0]$ и удовлетворяет условию удвоения (теорема 7.4), так как этому условию удовлетворяет функция h. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая мажоранта Ω_1, что $|\widetilde{\Omega_1}'| \le \varepsilon\lambda \le \varepsilon C_h h$ и $|\Omega_1'(x)| \le \varepsilon\lambda(x) \le \varepsilon C_h h(x) = O(|x|^\beta)$ (из-за липшицевости функции h). Уменьшив ε, можем считать, что $\varepsilon C_h < 2\pi$. Тогда из теоремы 4 следует требуемое. $\square$

Дифференцируемая строго возрастающая функция f такая, что $f(x) = |x|^\alpha \log^\delta(|x|+2)$, $|x| \ge 1$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), удовлетворяет условиям теоремы 7. Прямым подсчетом получаем, что в этом случае $h(x) \asymp |x|^{\frac{1}{\alpha}-1} \log^{-\frac{\delta}{\alpha}}(|x|+2)$.

Следствие 8.1. *Функция $\omega = e^{-\Omega}$ такая, что*

$$\text{a)} \quad \int_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty;$$

$$\text{b)} \quad |\Omega'(x)| \le M|x|^{\frac{1}{\alpha}-1} \log^{-\frac{\delta}{\alpha}}(|x|+2)$$

для некоторого $M > 0$ и любого $x \in \mathbb{R}$,

допустима для пространства K_{B_f}, где $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha(\log(|x|+2))^\delta$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1, \delta \in \mathbb{R}$).

§4. Условия допустимости в случае роста мнимой части нулей произведения Бляшке

Рассмотрим произведение Бляшке B с нулями $z_k = f(k) + ig(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, (функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает и дифференцируема,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, функция g положительна и $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(k)}{f^2(k)+g^2(k)} < +\infty$), тогда, в силу (1.1),

$$\frac{d}{dx}\arg B(x) = 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{(x-f(k))^2+g^2(k)} = 2\sigma(x). \qquad (4.1)$$

Предположим, что

$$4\mathrm{a})\quad \inf_{s\in\mathbb{R}} g(s) > 0; \qquad 4\mathrm{b})\quad \sup_{|x-y|\le 1} \frac{g(x)}{g(y)} < +\infty; \qquad 4\mathrm{c})\quad f\in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}).$$

Тогда, как мы увидим ниже,

$$\sigma(x) \asymp \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(x-f(t))^2+g^2(t))}dt. \qquad (4.2)$$

Нам понадобится одно несложное вспомогательное утверждение.

Утверждение 4. *Пусть числа a, b, c, d таковы, что $0 < M_0 < \frac{b}{d} < M_1$, $b > M_2 > 0$, $d > M_2$, $|a-c| < M_3$. Тогда отношение $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ отделено от нуля и бесконечности константами, зависящими только от величин M_0, M_1, M_2, M_3.*

Доказательство. Если $|a| > 1$ и $|c| > 1$, то $a \asymp c$, $b \asymp d$. Используя элементарное неравенство

$$\min\left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{d^2}\right) \le \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \le \max\left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{d^2}\right),$$

получаем требуемое. Если же либо $|a| \le 1$, либо $|c| \le 1$, то $a, c \preceq 1$, и потому $a^2+b^2 \asymp b^2$, $c^2+d^2 \asymp d^2$ и $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \asymp \frac{b^2}{d^2}$. □

Положим $F_x(t) = \frac{g(t)}{(x-f(t)^2)+g^2(t)}$. Тогда $\sigma(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} F_x(k)$. С другой стороны, если $|t_1 - t_2| \le 1$, то

$$\frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} = \frac{g(t_1)}{g(t_2)} \cdot \frac{(x-f(t_2))^2+g^2(t_2)}{(x-f(t_1))^2+g^2(t_1)}.$$

Первая дробь отделена от нуля и бесконечности в силу условия 4b). Так как функция f липшицева, то разность $|(x-f(t_1))-(x-f(t_2))|$ ограничена. Поэтому, применяя утверждение 4 ($a = x -$

$f(t_1)$, $c = x - f(t_2)$, $b = g(t_1)$, $d = g(t_2)$), получаем, что вторая дробь также отделена от нуля и бесконечности (константами, не зависящими от t_1, t_2 и x), то есть

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}, |t_1 - t_2|\le 1} \frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} \le \sup_{x\in\mathbb{R}, |t_1-t_2|\le 1} \frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} < +\infty.$$

Следовательно, $F_x(t) \asymp \int\limits_t^{t+1} F_x(s)ds$. Суммируя эти оценки, получаем нужную нам оценку (4.2):

$$\sigma(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_x(k) \asymp \int\limits_{\mathbb{R}} F_x(t)dt.$$

Положим

$$G(x) = g(f^{-1}(x)), \quad H(x) = h(x)G(x) \qquad \text{(напомним, что} \quad h = (f^{-1})'). \tag{4.3}$$

Предположим, что $H \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R})$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$, а функция g удовлетворяет условиям 4a), 4b). Пусть $x > 0$, а $f(0) = 0$. Оценим интеграл

$$\int\limits_0^{f^{-1}(x)} \frac{g(t)}{(x - f(t))^2 + g^2(t)}dt = \int\limits_0^x \frac{H(x-z)}{z^2 + G^2(x-z)}dz =$$

$$= H(x)\int\limits_0^x \frac{dz}{z^2 + G^2(x-z)} + \int\limits_0^x \frac{H(x-z) - H(x)}{z^2 + G^2(x-z)}dz.$$

Начнем с последнего интеграла:

$$\left|\int\limits_0^x \frac{H(x-z) - H(x)}{z^2 + G^2(x-z)}dz\right| \le \int\limits_0^x \frac{|H(x-z) - H(x)|}{z^2 + G^2(x-z)}dz \le$$

$$\le C_H \int\limits_0^x \frac{z^\gamma}{z^2 + G^2(x-z)}dz \le C_1.$$

Последнее неравенство верно, так как функция G отделена от нуля. Далее,

$$\int_0^x \frac{dz}{z^2+G^2(x-z)} = \frac{1}{G(x)}\int_0^x \frac{d(\frac{z}{G(x)})}{(\frac{z}{G(x)})^2+(\frac{G(x-z)}{G(x)})^2} =$$

$$= \frac{1}{G(x)} \int_0^{\frac{x}{G(x)}} \frac{dz}{z^2+(\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)})^2}.$$

Предположим, что $G(x)=o(x)$ и $\frac{G(x)}{G(y)}\to 1$, когда $\frac{x}{y}\to 1$. Тогда, с одной стороны,

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2+(\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)})^2} \preceq 1,$$

так как отношение $\frac{x-G(x)z}{x}$ стремится к 1 при $|x|\to+\infty$ равномерно по всем $z\in[0,1]$. С другой стороны, мы можем выбрать столь малое a, что $\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)}<2$ для всех $z\in[0,ax/G(x)]$. Поэтому

$$\int_1^{\frac{x}{G(x)}} \frac{dz}{z^2+(\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)})^2} \geq \int_0^{a\frac{x}{G(x)}} \frac{dz}{z^2+4} \asymp 1$$

и

$$\int_1^{\frac{x}{G(x)}} \frac{dz}{z^2+(\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)})^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dz}{z^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{x}{G(x)}} \frac{dz}{z^2+(\frac{G(x-G(x)z)}{G(x)})^2} \asymp 1.$$

Таким образом,

$$\int_0^{f^{-1}(x)} \frac{g(t)}{(x-f(t))^2+g^2(t)}dt \asymp \frac{H(x)}{G(x)} = h(x).$$

Аналогично оценивается интеграл $\int\limits_{f^{-1}(x)}^{+\infty} \frac{g(t)}{(x-f(t))^2+g^2(t)}dt$. Легко видеть, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{g(t)}{(x-f(t))^2+g^2(t)}dt$ ограничен.

Таким образом (см. (4.2)), если $H \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R})$ $(\gamma < 1)$, $G(x) = o(x)$, $\frac{G(x)}{G(y)} \to 1$, когда $\frac{x}{y} \to 1$, а функция g удовлетворяет условиям 4a) и 4b), то

$$\frac{d}{dx} \arg B(x) \asymp h(x). \tag{4.4}$$

Используя оценку (4.4), мы докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть дифференцируемая строго возрастающая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1, 3, 4, 5 теоремы 8, функция g удовлетворяет условию* 4a), $\sum\limits_{k\in\mathbb{R}} \frac{g(k)}{f^2(k)+g^2(k)} < +\infty$ *(условие сходимости произведения Бляшке) и верна оценка скорости роста аргумента произведения Бляшке* (4.4). *Тогда любая функция $\omega = e^{-\Omega}$ такая, что*

$$\text{a)}\quad \Omega \in L^1(\mathbf{P}), \qquad \text{b)}\quad |\Omega'| \le Mh \quad \textit{для некоторого} \quad M,$$

допустима для пространства K_B.

Для доказательства теоремы 9 нам понадобится лемма.

Лемма. *Пусть дважды дифференцируемая строго возрастающая функция $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что*

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} m'(x) = +\infty$;
2) *существует такая константа C, что $|m''(x)| \le Cm'(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.*

Тогда функция m в основном возрастающая.

Доказательство. Легко видеть, что существует такая последовательность d_n, что $m(d_n) = 2\pi n$, $(n \in \mathbb{Z})$. Положим $I_n = [d_n, d_{n+1}]$, $l_n = d_{n+1} - d_n$. Из 1) следует, что $|I_n|_{n\to\pm\infty} \to 0$. Далее,

$$\frac{1}{l_n}\int\limits_{I_n} |m'(x) - m'(t)|dt = \int\limits_{I_n} |m''(\xi(t))|dt \le$$

$$\leq C\int\limits_{I_n} m'(\xi(t))dt \leq C\sup_{I_n}(m')l_n = \tag{4.5}$$

$$= C\sup_{I_n}(m')\cdot(m^{-1})'(s) = C\frac{\sup_{I_n}(m')}{m'(t)},$$

где $x\in I_n$, $\xi(t)\in I_n$, $s\in(2\pi n,\, 2\pi n+2\pi)$, $t\in I_n$.

С другой стороны, для любых $x,y\in I_n$

$$|m'(x)-m'(y)| = |m''(s)l_n| \leq$$
$$\leq C\sup_{I_n}(m')l_n \Rightarrow |1-m'(x)/\sup_{I_n} m'| \leq l_n \to_{|n|\to+\infty} 0,$$

равномерно относительно $x\in I_n$. Следовательно, для достаточно больших $|n|$ имеем $\frac{\sup_{I_n} m'}{\inf_{I_n} m'} \leq 2$. Утверждение леммы следует теперь из (4.5). $\square$

Доказательство теоремы 9. Нам достаточно доказать, что функция $\arg B_{z_k}+2\widetilde{\Omega}_1$ является *в основном возрастающей* для некоторой мажоранты $\Omega_1\geq\Omega$ с конечным интегралом Пуассона. Для любого $\varepsilon>0$ (выбор ε мы объясним позднее) мы можем найти такую мажоранту Ω_1, что $|\widetilde{\Omega_1}'|\leq\varepsilon h$ и $|\widetilde{\Omega_1}''|\leq\varepsilon h$. Действительно, как и в доказательстве теоремы 8, мы можем построить функцию $\lambda(= C\sup\limits_{s\in[\min(0,x),\max(0,x)]} h(s))$, которая удовлетворяет условиям следствия 7.1, так как $\lambda(x)=O(|x|^\beta)$. Рассмотрим ряд (4.1) и продифференцируем его:

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}\arg B_{z_k}(x)\right| = \left|\sum_k \frac{4g(k)(x-f(k))}{((x-f(k)^2)+g^2(k))^2}\right| \leq$$

$$\leq \sum_k \frac{2g(k)|x-f(k)|}{(x-f(k))^2+g^2(k)}\frac{2g(k)}{(x-f(k))^2+g^2(k)}\cdot\frac{1}{g(k)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\inf_{\mathbb{R}}(g)}\sum_k \frac{2g(k)}{(x-f(k))^2+g^2(k)} = \frac{1}{\inf_{\mathbb{R}}(g)}\frac{d}{dx}\arg B(x).$$

Таким образом, для некоторой константы C_3 верно неравенство

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}\arg B\right| \leq C_3\frac{d}{dx}\arg B. \tag{4.6}$$

Для достаточно малых ε имеем $(\arg B + 2\widetilde{\Omega}_1)' \asymp h$. Поэтому условие 1 леммы выполнено. Используя неравенство (4.6), мы можем выбрать ε таким, что

$$(\arg B + 2\widetilde{\Omega}_1)'' \preceq h \asymp (\arg B + 2\widetilde{\Omega}_1)'.$$

Воспользовавшись леммой, получаем, что функция $\arg B + 2\widetilde{\Omega}_1$ является в основном возрастающей. □

Рассмотрим функции $f(x) = |x|^\alpha$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) и $g(x) = |x|^\gamma$. Нетрудно видеть, что эта пара функций удовлетворяет условиям теоремы 9, если $\gamma < 2\alpha - 1$. (То есть чем быстрее растет функция f, тем быстрее может расти функция g.) Следующее утверждение служит конкретной иллюстрацией теоремы 9.

Следствие 9.1. *Пусть* $z_k = \operatorname{sgn}(k)|x|^\alpha + i|x|^\gamma$ $(k \neq 0)$, *где* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 2\alpha - 1$. *Тогда любая функция* $\omega = e^{-\Omega}$ *такая, что*

a) $\int\limits_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty$;

b) $|\Omega'(x)| \leq M|x|^{\frac{1}{\alpha}-1}$ *для некоторого* M *и при всех* $x \in \mathbb{R}$,

допустима для пространства $K_{B_{z_k}}$.

Если $g \equiv 1$, то мы вновь получаем теорему 8.

Замечание 5. Если функция g_1 такова, что $0 < \inf_{\mathbb{R}} \frac{g_1}{g} \leq \sup_{\mathbb{R}} \frac{g_1}{g} < +\infty$, то теорема 9 верна и для произведения Бляшке, построенного по нулям $z_k = f(k) + ig_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из замечания 2 следует, что функция $(\arg B)'$ имеет нужную оценку и неравенство (4.6) остается верным для этого нового произведения Бляшке. □

Замечание 6. Если внутренняя функция B такая, как в теореме 9, то любая мажоранта $\omega = e^{-\Omega}$ со сходящимся логарифмическим интегралом $\mathcal{L}(\omega)$ такая, что функция Ω липшицева (т.е. такая как в теореме Берлинга-Мальявена), B-допустима.

Доказательство. Поскольку непрерывная функция h отделена от нуля, мы можем выбрать столь большое M, что

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\Omega'(s)| < Mh.$$

Тогда из теоремы 9 следует требуемое. □

Замечание 7. Если внутренняя функция B такая, как в теореме 9, то любая четная положительная и убывающая на положительной полуоси мажоранта $\omega = e^{-\Omega}$ B-допустима.

Доказательство. Для такой функции Ω можно построить липшицеву мажоранту Ω_1, суммируемую по мере Пуассона ([5, стр. 310) (то есть $|\Omega_1'| \preceq 1$). Следовательно, она B-допустима. $\square$

§5. Условия допустимости в случае убывания мнимой части нулей произведения Бляшке

Как и в §4, рассмотрим произведение Бляшке с нулями $z_k = f(k) + ig(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает и дифференцируема, функция g положительна и $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(k)}{f^2(k)+g^2(k)} < +\infty$. В этом параграфе мы будем рассматривать функции g, подчиненные условию $\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s) = 0$. Трудность этого случая заключается в том, что функция $\arg B$, в отличие от §§3–4, вообще говоря, перестает быть в основном возрастающей. Поэтому при помощи теоремы 1 (которой мы пользовались при доказательстве всех критериев допустимости в этой статье) мы не можем даже доказать допустимость мажоранты $\omega \equiv 1$ ($\Omega \equiv 0$). Для таких произведений неверна оценка (4.6), и мы не можем воспользоваться леммой из предыдущего параграфа.

Нам понадобится следующее несложное утверждение (аналогичное утверждению 4).

Утверждение 5. *Пусть числа a, b, c, d таковы, что $0 < M_0 < \frac{b}{d} < M_1$, $0 < b < M_2$, $0 < d < M_2$, $|a - c| < M_3 b$. Тогда отношение $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ отделено от нуля и бесконечности константами, зависящими только от величин M_0, M_1, M_2, M_3.*

Действительно, если $|a| > b$ и $|c| > b$, то $a \asymp c$, $b \asymp d$. Используя неравенство

$$\min\left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{d^2}\right) \le \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \le \max\left(\frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{d^2}\right),$$

получаем требуемое. Если же либо $|a| < b$, либо $|c| < b$, то $a, c \preceq b$. Следовательно, $a^2 + b^2 \asymp b^2$, $c^2 + d^2 \asymp d^2$, так что $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \asymp \frac{b^2}{d^2}$. $\square$

Пусть функция σ определена формулой (4.1). Предположим, что

5a) $\sup\limits_{|x-y|\le 1} \frac{g(x)}{g(y)} < +\infty$;

5b) $f' \preceq g$.

Тогда, как мы покажем ниже,

$$\sigma(x) \asymp h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(x-f(t))^2 + g^2(t)} dt. \tag{5.1}$$

(В этом параграфе, в отличие от предыдущих, функция h определена как интеграл в правой части оценки (5.1).) Положим $F_x(t) = \frac{g(t)}{(x-f(t)^2)+g^2(t)}$. Тогда $\sigma(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} F_x(k)$. С другой стороны, если $|t_1 - t_2| \le 1$, то

$$\frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} = \frac{g(t_1)}{g(t_2)} \cdot \frac{(x-f(t_2))^2 + g^2(t_2)}{(x-f(t_1))^2 + g^2(t_1)}.$$

Первая дробь отделена от нуля и бесконечности в силу условия 5a). Так как функция f липшицева, то $|(x-f(t_1)) - (x-f(t_2))| \preceq g$ (свойство 5b)). Поэтому, применяя утверждение 5 ($a = x - f(t_1)$, $c = x - f(t_2)$, $b = g(t_1)$, $d = g(t_2)$), получаем, что вторая дробь также отделена от нуля и бесконечности (константами, не зависящими от t_1, t_2 и x). Таким образом,

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}, |t_1-t_2|\le 1} \frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} \le \sup_{x\in\mathbb{R}, |t_1-t_2|\le 1} \frac{F_x(t_1)}{F_x(t_2)} < +\infty.$$

Следовательно, $F_x(t) \asymp \int\limits_t^{t+1} F_x(s)ds$. Суммируя оценки, получаем нужное соотношение.

Теорема 10. *Пусть функции f, g таковы, что f строго возрастает и дифференцируема, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(k)}{f^2(k)+g^2(k)} < +\infty$, а функция $h = (h_{f,g})$ удовлетворяет условиям 1, 4, 5 теоремы 8 и $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x) = +\infty$. Предположим, что для некоторых C_1, $C_2 > 0$*

$$|\arg B(x) - \arg B(y)| \le C_1 \Rightarrow |(\arg B)'(x) - (\arg B)'(y)| \le C_2.$$

Тогда любая гладкая функция $\omega = e^{-\Omega}$ такая, что

a) $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$; b) $|\Omega'| \le Mh$ *для некоторого* $M > 0$, *допустима для пространства K_B.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 9, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти функцию $\Omega_1 \geq \Omega$ такую, что $\Omega_1 \in L^1(\mathbf{P})$, $|\Omega_1'| \leq \varepsilon h$, $|\widetilde{\Omega_1}'| \leq \varepsilon h$, $|\widetilde{\Omega_1}''| \leq \varepsilon h$. Будем считать, что функция Ω обладает этими свойствами. Положим для краткости $a = \arg B$. Мы можем выбрать столь малое ε, что (напомним, что $\arg B' \asymp h$)

$$|\widetilde{\Omega}(x) - \widetilde{\Omega}(y)| \leq \frac{1}{2}|a(x) - a(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|a(x) + 2\widetilde{\Omega}(x) - (a(y) + 2\widetilde{\Omega}(y))| \leq \frac{C_1}{2} \quad \Rightarrow |a(x) - a(y)| \leq C_1. \quad (5.2)$$

Для таких x, y ($|a(x)+2\widetilde{\Omega}(x)-(a(y)+2\widetilde{\Omega}(y))| \leq \frac{C_1}{2}$) легко видеть, что $|\widetilde{\Omega}'(x) - \widetilde{\Omega}'(y)| \leq |x - y|\widetilde{\Omega}''(s) \preceq |x - y|h(s)$ (s лежит между x и y). Функция h отделена от нуля, разность $|x - y|$ ограничена и отношение $\frac{h(s)}{h(t)}$ (s, t лежат между x и y) также ограничено (это следует из свойств 4) и 5) функции h). Оценим $|x - y|h(s)$, где s лежит между x и y:

$$|x-y|h(s) = |a^{-1}(a(x))-a^{-1}(a(y))|h = (a^{-1})'(\zeta)|a(x)-a(y)|h(s) \preceq \frac{h(s)}{a'(t)}$$

для некоторого t между x и y. Поскольку $a' \asymp h$, получаем, что

$$|\widetilde{\Omega}'(x) - \widetilde{\Omega}'(y)| \preceq 1.$$

Значит, существует такая константа C_3, что

$$|a(x) + 2\widetilde{\Omega}(x) - (a(y) + 2\widetilde{\Omega}(y))| \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{2} \Rightarrow |a'(x) + 2\widetilde{\Omega}'(x) - (a'(y) + 2\widetilde{\Omega}'(y))| \leq C_3.$$

Если последовательность $\{d_n\}$ такова, что $a(d_n) + 2\widetilde{\Omega}(d_n) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sup\limits_n\{\sup\limits_{s,t\in(d_n,d_{n+1})}\{a'(s) + 2\widetilde{\Omega}'(s) - (a'(t) + 2\widetilde{\Omega}'(t))\}\} < +\infty$. Следовательно, функция $\arg B + 2\widetilde{\Omega}$ в основном возрастающая. $\Box$

Заметим, что пара функций $f(x) = |x|^\alpha$, $g(x) = |x|^\beta$, где $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\alpha - 1 < \beta < 0$, удовлетворяет условиям теоремы 10.

Следствие 10.1. *Пусть* $z_k = \operatorname{sgn}(k)|x|^\alpha + i|x|^\beta$ $(k \neq 0)$, *где* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\alpha - 1 < \beta \leq 0$. *Тогда любая функция* $\omega = e^{-\Omega}$ *такая, что*

a) $\int\limits_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty$;

b) $|\Omega'(x)| \leq M|x|^{\frac{1}{\alpha}-1}$ *для некоторого* M *и при всех* $x \in \mathbb{R}$,

допустима для пространства K_B.

Я благодарен В. П. Хавину за постановку задач и помощь при подготовке этой работы к печати.

Литература

1. A. D. Baranov, *Polynomials in the de Branges spaces of entire functions.* — Ark. Mat. **44** (2006), no. 1, 16–38.
2. Ю. С. Белов, *Необходимые условия допустимости для некоторых классов модельных подпространств* (готовится к печати).
3. А. Д. Баранов, В. П. Хавин, *Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций.* — Функциональный анализ и его приложения **40**, no. 4 (2006), 2–21.
4. A. D. Baranov, A. A. Borichev, V. P. Havin, *Admissible majorants for meromorphic functions with fixed poles* (принято к печати в Indiana University Math. J.).
5. V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* — Springer-Verlag (1994).
6. V. P. Havin, J. Mashreghi, *Admissible majorants for model subspaces of* H^2*. Part 1: slow winding of the generating inner function.* — Can. J. Math. **55**, 6 (2003), 1231–1263.
7. V. P. Havin, J. Mashreghi, *Admissible majorants for model subspaces of* H^2*. Part 2: fast winding of the generating inner function.* — Can. J. Math. **55**, 6(2003), 1264–1301.
8. P. Koosis, *The Logarithmic integral.* I. — Cambridge Stud. Adv. Math. **12**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
9. В. П. Хавин, Дж. Машреги, Ф. Назаров, *Теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство.* — Алгебра и Анализ **17** (2005), No. 5, 3–68.

Belov Yu. S. Admissibility criteria for model subspaces with fast growth of the argument of the generating inner function.

Let Θ be an inner function in the upper half plane and let $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ be the associated model subspace of the Hardy space H^2. We call a non-negative function ω Θ-admissible if in the space K_Θ there exists a non-zero function $f \in K_\Theta$ such that $|f| \leq \omega$ a.e. on $\mathbb{R}$. We give some sufficient conditions of Θ-admissibility for the case when Θ is meromorphic and $\arg\Theta$ grows fast ($(\arg\Theta)'$ tends to infinity).

Norwegian University
of Science and Technology (NTNU)
E-mail: j_b_juri_belov@mail.ru

Поступило 9 ноября 2006 г.