Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

В. А. Беднаж

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГЛАВНЫХ ЧАСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Пусть C – комплексная плоскость, $M(C)$ – множество функций f, мероморфных в C, $\{z_k\}_1^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел, таких что $|z_1| \le |z_2| \le \dots$, $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = \infty$.

По классической теореме Миттаг-Леффлера для произвольной последовательности рациональных функций $\{g_k\}_1^{+\infty}$ с полюсами в точках z_k всегда существует функция $f \in M(C)$, такая что главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки z_k совпадает с функциями g_k, $k = 1, 2, \dots$. Естественно возникает вопрос: при каких условиях на $\{g_k\}_1^{+\infty}$ и $\{z_k\}_1^{+\infty}$ можно найти функцию $f \in M(C)$ конечного порядка и нормального типа с такими главными частями?

В заметке найдено необходимое и достаточное условие, при котором можно построить такую функцию. Отметим, что впервые задача такого рода в классе Р. Неванлинны в единичном круге была поставлена и решена в работе А. Г. Нафталевича [6].

Для формулировки основного результата введем следующие обозначения: пусть $f \in M(C)$, $T(r,f)$ – характеристика Р. Неванлинны, то есть

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|d\varphi + \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

где $n(t) = \{\operatorname{card} b_k, |b_k| \le t\}$, b_k – множество полюсов функции f.

Функция f из $M(C)$ имеет конечный порядок ρ и нормальный тип, если существует постоянная $c_f \in R_+$, такая что

$$T(r,f) \le c_f r^\rho, \quad \rho > 0, \quad r \ge r_0 > 0.$$

Множество таких функций обозначим через $M(\rho; +\infty)$, а множество всех целых функций конечного порядка ρ и нормального типа – через $H(\rho;+\infty)$.

Пусть

$$g_k(z)=\frac{a_{k,1}}{z-z_k}+\frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2}+\ldots+\frac{a_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}},$$

$$|z_1|\le|z_2|\le\ldots,\qquad \lim_{k\to+\infty}z_k=\infty,$$

заданная последовательность рациональных функций; при каких условиях, наложенных на рост модулей $|a_{k,j}|$, $k=1,2,3,\ldots$, $j=1,2,\ldots,p_k$, существует функция из $M(\rho;+\infty)$ с полюсами в точках z_k, и только в них, с соответствующими главными частями g_k?

Как следовало ожидать, такие задачи сводятся к соответствующей интерполяционной задаче в классе $H(\rho;+\infty)$. Последовательность различных комплексных чисел $\{z_k\}_1^{+\infty}$ вместе с их кратностями p_k называется интерполяционной в классе $H(\rho;+\infty)$, если для любой последовательности комплексных чисел $\lambda_{k,j}$, $k=1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots,p_k$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{|z_k|^\rho}\ln\max_{1\le j\le p_k}\frac{|\lambda_{k,j}|}{j!}<+\infty,$$

существует $F\in H(\rho;+\infty)$ со свойством

$$F^{(j)}(z_k)=\lambda_{k,j},\quad k=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,p_k.$$

Полная характеризация интерполяционных множеств в классах $H(\rho;+\infty)$ получена в работах [1–4]. Из этих результатов следует, что если последовательность $\{z_k\}_1^{+\infty}$ – интерполяционная в классе $H(\rho;+\infty)$, то выполняется условие

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\ln\left|\frac{F^{(p_k)}(z_k)}{p_k!}\right|}{|z_k|^\rho}<+\infty,\tag{1}$$

где

$$F(z)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{p_k}\exp\left\{p_k\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right\},$$

m – род последовательности $\{z_k\}_1^{+\infty}$.

Теорема. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^{+\infty}$ *интерполяционная в классе* $H(\rho; +\infty)$. *Тогда для того, чтобы существовала функция* $g \in M(\rho; +\infty)$ *с главными частями*

$$\frac{a_{k,1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \ldots + \frac{a_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}} \tag{2}$$

в окрестности точки z_k, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\ln|a_{k,i}|}{|z_k|^\rho} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, p_k. \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что существует функция $g \in M(\rho; +\infty)$ с главными частями вида (2). Хорошо известно, что функция g представима в виде отношения двух целых функций класса $H(\rho; +\infty)$ (см. [5]), т.е. $g = \frac{h}{F}$.

Таким образом, в окрестности точки z_k имеем

$$h(z) = F(z)\left(\frac{a_{k,1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \ldots + \frac{a_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}}\right) =$$

$$= \sum_{j=p_k}^{+\infty} \frac{1}{j!} F^{(j)}(z_k)(z-z_k)^j \left(\frac{a_{k,1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{a_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}}\right).$$

Получим выражение для $a_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots, p_k$:

$$h(z) = \sum_{i=1}^{p_k} \sum_{j=p_k}^{+\infty} \frac{1}{j!} F^{(j)}(z_k)(z-z_k)^{j-i} a_{k,i}.$$

Находя $(p_k - i)$-ю производную функции h в точке z_k, получаем

$$h^{(p_k-i)}(z_k) = \frac{F^{(p_k)}(z_k) a_{k,i} (p_k - i)!}{p_k!}. \tag{4}$$

Используя то, что $h \in H(\rho; +\infty)$ и последовательность $\{z_k\}_1^{+\infty}$ – интерполяционная, из равенства (4) имеем

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\ln|a_{k,i}|}{|z_k|^\rho} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, p_k.$$

Достаточность. Предположим, что условие (3) выполняется и последовательность $\{z_k\}_1^{+\infty}$ – интерполяционная. Докажем, что существует функция $g \in M(\rho; +\infty)$ с главными частями вида (2).

Так как

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\ln\left|\frac{F^{(p_k)}(z_k)\cdot a_{k,i}}{p_k!}\right|}{|z_k|^\rho}<+\infty,\quad i=1,\dots,p_k,$$

то существует функция $h\in H(\rho;+\infty)$ (см. [1–4]), решающая интерполяционную задачу

$$\frac{h^{(p_k-i)}(z_k)}{(p_k-i)!}=\frac{F^{(p_k)}(z_k)\cdot a_{k,i}}{p_k!},\quad i=1,\dots,p_k. \tag{5}$$

Положим $g=\frac{h}{F}$. Так как $h\in H(\rho;+\infty)$ и $F\in H(\rho;+\infty)$, то функция g лежит в $M(\rho;+\infty)$, и ее особые точки – это полюса z_k порядка p_k, $k=1,2,\dots$. Следовательно, разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_k имеет вид

$$\frac{a'_{k,1}}{z-z_k}+\frac{a'_{k,2}}{(z-z_k)^2}+\dots+\frac{a'_{k,p_k}}{(z-z_k)^{p_k}}.$$

Учитывая равенство (5), нетрудно заметить, что $a'_{k,i}=a_{k,i}$, $i=1,\dots,p_k$. Теорема доказана.

Литература

1. А. Ф. Леонтьев, *Разрешимость интерполяционной задачи в классе целых функций.* — ДАН СССР **66**, (1949), 33–34.
2. О. С. Фирсакова, *Некоторые вопросы интерполированния с помощью целых функций.* — ДАН СССР **120**, No. 3 (1958), 477–480.
3. А. В. Братищев, *К одной задаче Леонтьева.* — ДАН СССР **270**, No. 2 (1983), 265–267.
4. А. Ф. Гришин, А. М. Руссаковский, *Свободная интерполяция целыми функциями.* — Теория функций, функцион. анализ и их прил., вып. 44 (1985), 32–42.
5. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций.* Наука, М. (1970).
6. А. Г. Нафталевич, *Об интерполировании функций ограниченного вида.* — Ученые записки Вильнюсского университета, **5** (1956), 5–27.

Bednazh V. A. Characterizing the principal parts of meromorphic functions of finite order and normal type near singlular points.

A complete description of the principal parts of meromorphic functions of finite order and normal type in their Laurent decomposition near singular points is presented.

Брянский
государственный университет
им. академика И.Г. Петровского
E-mail: verabednazh@rambler.ru

Поступило 12 июня 2006 г.