Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

РЯДЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ КРУГЛОВА

§1. Введение

Ввиду классического неравенства Хинчина, система Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$, $r_n(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^n\pi t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, рассматриваемая в $L_p[0,1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$, эквивалентна последовательности дизъюнктных "сдвигов" $\{\overline{r}_n(\cdot) := r_n(\cdot - n + 1)\}_{n=1}^\infty$ в $L_2(0,\infty)$. Если рассматривать систему Радемахера как специальный случай последовательностей независимых функций с нулевым средним (т.е. $\int\limits_0^1 f_k(t)dt = 0$, $k = 1, 2, \ldots$), то замечательное обобщение этого неравенства на симметричные пространства (с.п.) функций на $[0,1]$ было доказано в 1989 году В. Джонсоном и Г. Шехтманом [1]. По данному с.п. X они определили с.п. Z_X^2 на $[0,\infty)$ (наше обозначение не совпадает с использованным в [1]) и показали, что произвольная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ независимых функций с нулевым средним в X эквивалентна последовательности их дизъюнктных "сдвигов" $\{\overline{f}_k(\cdot) := f_k(\cdot - k + 1)\}_{k=1}^\infty$ в Z_X^2 при условии, что X содержит $L_p[0,1]$ при некотором $p < \infty$. Подчеркнем, что основная трудность заключается при этом в доказательстве неравенства

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_X \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n \overline{f}_k\Big\|_{Z_X^2} \tag{1.1}$$

(см. правую часть неравенства (3) в [1, теорема 1]).

Основными средствами при доказательстве оценки (1.1) в [1] были один из вариантов хорошо известного неравенства Хоффмана–Йоргенсена [2], а также связанная с ним техника сведения задачи к L_p-случаю. Рассматривая аналогичный вопрос здесь, мы применяем совсем другие рассуждения, основывающиеся на теории безгранично делимых распределений и на изучении свойств положительного линейного оператора $\mathcal{K}$, введенного нами недавно в [3] (см. также [4]). Техника безгранично делимых распределений, безусловно, хорошо известна в теории вероятностей. В то же время, при изучении геометрии с.п. она широко применялась, видимо, только М. Ш. Браверманом [5], использовавшим при этом некоторые идеи и вероятностные конструкции В. М. Круглова [6]. Наш подход, кроме того, тесно связан со стохастическим интегрированием относительно симметризованного пуассоновского процесса, примененным в [7] (см. также [8]) для изучения вопроса о том, когда данное с.п. на $[0, 1]$ изоморфно некоторому с.п. на полуоси. Мы детально рассматриваем эти связи в последней части работы. В §2 вводятся необходимые определения и сведения из теории с.п., а также некоторые вероятностные конструкции. В §3 мы доказываем главный результат, состоящий в том, что для широкого класса с.п. X выполнение неравенства (1.1) для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ независимых функций со средним 0 эквивалентно ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в этом пространстве (см. теоремы 3.1 и 3.6). Внешне это утверждение аналогично теореме 6.1 работы [3], где речь идет о произвольных последовательностях (неотрицательных) независимых функций (см. начало §3). Подчеркнем, тем не менее, что доказательства этих результатов совершенно различны. Это объясняется разницей свойств последовательностей неотрицательных функций и функций с нулевым средним (см. также различие в доказательствах неравенств (3) и (4) в теореме 1 статьи [1]). Важно отметить, что преимущество нашего подхода по сравнению с работой [1] состоит в том, что он позволяет получать неравенство (1.1) в целом ряде важных в приложениях с.п., не содержащих L_p-пространство ни при каком $p < \infty$. Соответствующий пример приведен в замечании 3.5, где наши результаты применяются к экспоненциальным пространствам Орлича $\mathrm{Exp}L_p$, $0 < p < 1$ (напротив, условия теоремы 1 в [1] для них не выполняются). Из теоремы 3.6, а также результатов статьи [3] вытекает следствие 3.7, которое в определенном смысле обратно по отношению к утверждению первой части теоремы 1 в [1]. Одновременно оно показывает, что, в отличие от ситуации с неравенством Хинчина (см. [9]), не существует “минимального” с.п. E такого, что неравенство (1.1) выполнено для каждого с.п. $X \supseteq E$.

В последней части работы, в §4, мы применяем полученные результаты к хорошо известной задаче о том, имеет ли данное с.п. X на $[0,1]$ изоморфное представление как с.п. на полуоси (впервые поставленной в [10] и глубоко изученной в [7] и [8]). Во-первых, оказывается, что при условии ограниченности оператора $\mathcal{K}$ пространство X содержит подпространство, изоморфное с.п. Z_X^2 на полуоси. Ранее подобное утверждение было доказано лишь для гораздо более узкого класса с.п. с нетривиальным нижним индексом Бойда. Во-вторых, теорема 3.1 позволяет дать гораздо более простое доказательство хорошо известной теоремы (см. [7, §8] или [8, с. 203]) о том, что X изоморфно некоторому с.п. на полуоси, если индексы Бойда X нетривиальны. И наконец, мы показываем, что существует глубокая связь между оператором $\mathcal{K}$ и стохастическим интегрированием относительно симметризованного пуассоновского процесса, применяемого в [7].

Далее будут использоваться следующие сокращения:

с.п.– симметричное пространство;

с.в.– случайная величина (измеримая функция);

ф.р.– функция распределения случайной величины;

х.ф.– характеристическая функция случайной величины;

$f \overset{d}{=} g$ означает, что с.в. f и g имеют одинаковые ф.р..

§2. Определения и предварительные сведения

Раздел содержит основные определения и обозначения из теории с.п. (подробнее см. [11, 8]), а также некоторые понятия и конструкции вероятностного характера, взятые, в основном, из [5] и [3], которые будут использоваться в этой работе.

2.1. Симметричные пространства. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $J=[0,\alpha)$, $0<\alpha\leqslant\infty$ (с отождествлением λ-почти всюду), называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если

(i) X является порядковой решеткой, т.е. если $y\in X$ и x – любая измеримая функция на J такая, что $|x|\leqslant|y|$, то $x\in X$ и $\|x\|_X\leqslant\|y\|_X$;

(ii) X перестановочно инвариантно в том смысле, что если $y\in X$ и x – любая измеримая функция на J такая, что $x^*=y^*$, то $x\in X$ и $\|x\|_X=\|y\|_X$.

Здесь и всюду далее λ – мера Лебега, а $x^*(t)$ – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* функции $|x(s)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf\{\ \tau \geqslant 0 : \lambda(\{s \in [0,\alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leqslant t\ \}\quad (t > 0),$$

где $n_{|x|}(\tau) := \lambda\{s \geqslant 0 :\ |x(s)| > \tau\}$ $(\tau > 0)$.

Для любого с.п. $X = X[0,\infty)$ (соответственно $X = X[0,1]$) имеют место непрерывные вложения

$$L_1 \cap L_\infty[0,\infty) \subseteq X \subseteq L_1 + L_\infty[0,\infty) \quad (L_\infty[0,1] \subseteq X \subseteq L_1[0,1])$$

(определения суммы и пересечения банаховых пространств, образующих банахову пару, см. далее в этом разделе).

Пусть X – с.п. на $[0,1]$. Далее мы будем рассматривать также с.п. $X(\Omega,\mathcal{P})$ измеримых функций или случайных величин (с.в.) на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{P})$, определяемое следующим образом:

$$X(\Omega,\mathcal{P}) := \{f \in L_1(\Omega,\mathcal{P}) : f^* \in X\}, \quad \|f\|_{X(\Omega,\mathcal{P})} := \|f^*\|_X.$$

Здесь f^* – невозрастающая перестановка относительно меры $\mathcal{P}$ на Ω. Через $S(\Omega)(= S(\Omega,\mu))$ будет обозначаться линейное пространство всех измеримых конечных п.в. функций на пространстве с мерой (Ω,μ), снабженное топологией сходимости по мере на подмножествах конечной меры в Ω.

Если X – с.п. на интервале $J = [0,\alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $X^\times$ состоит из всех измеримых функций y, для которых

$$\|y\|_{X^\times} := \sup\Big\{\int\limits_J |x(t)y(t)|dt :\ x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\Big\} < \infty$$

(основные свойства двойственного пространства можно найти в [11]). Если X^* – пространство, сопряженное с X, то $X^\times \subset X^*$, а $X^\times = X^*$, если и только если норма $\|\cdot\|_X$ порядково непрерывна, т.е. из $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X, x_n \downarrow_n 0$, следует, что $\|x_n\|_X \to 0$. Заметим, что норма $\|\cdot\|_X$ с.п. X на J порядково непрерывна тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Говорят, что с.п. X на J *максимально* (или *имеет свойство Фату*), если из того, что $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$, $f_n \to f$ п.в. на J и $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, следует: $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$. Хорошо известно, что с.п. X максимально тогда и только тогда, когда естественное вложение X в его второе двойственное $X^{\times\times}$ является изометрической сюръекцией. Гораздо более слабым является следующее условие. Норма $\|\cdot\|_X$ с.п. X называется *порядково полунепрерывной* (или *нормой Фату*), если единичный шар пространства X замкнут в X относительно сходимости почти всюду. Последнее эквивалентно тому, что естественное вложение X в его второе двойственное $X^{\times\times}$ – изометрия.

Напомним, что для $\tau > 0$ оператор растяжения σ_τ определяется следующим образом:

$$\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau), \quad \text{если} \quad J = [0, \infty),$$

и

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \min(1, \tau) \\ 0, & \min(1, \tau) < t \leqslant 1, \end{cases}$$

если $J = [0, 1]$. Операторы σ_τ ограничены в любом с.п. X. Кроме того, существуют числа

$$\alpha_X := \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_X}{\ln \tau}, \quad \beta_X := \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_X}{\ln \tau},$$

называемые индексами Бойда пространства X. Всегда $0 \leqslant \alpha_X \leqslant \beta_X \leqslant 1$. Говорят, что индексы Бойда с.п. X нетривиальны, если $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$.

Важными примерами с.п. являются L_p-пространства ($1 \leqslant p \leqslant \infty$), а также их обобщение – пространства Орлича. Пусть Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. Пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi[0, \alpha)$ состоит из всех функций $f \in S[0, \alpha)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf\Big\{\rho > 0 : \int_0^\alpha \Phi\Big(\frac{|f(t)|}{\rho}\Big)\, dt \leqslant 1\Big\}.$$

Через $\chi_E(t)$ далее будет обозначаться характеристическая функция множества $E \subset [0, \infty)$, а через $\operatorname{supp} f$ – носитель измеримой функции f.

2.2. Свойство Круглова и оператор $\mathcal{K}$ в с.п.. Пусть f – измеримая функция (или с.в.) на $[0, 1]$, а $\mathcal{F}_f$ – ее ф.р. Через $\pi(f)$

обозначим случайную величину, х.ф. которой определяется равенством

$$\varphi_{\pi(f)}(t) = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1\right) d\mathcal{F}_f(x) \right),$$

или, эквивалентно, это с.в. $\sum_{i=1}^{N} f_i$, где f_i – независимые копии f, а с.в. N имеет распределение Пуассона с параметром 1 и независима относительно последовательности $\{f_i\}$.

Определение 2.1. *Говорят, что с.п. X на $[0,1]$ имеет свойство Круглова (мы пишем: $X \in \mathbb{K}$), если*

$$f \in X \Longleftrightarrow \pi(f) \in X.$$

Это свойство изучалось и интенсивно использовалось М. Ш. Браверманом [5]. Заметим, что нетривиальна лишь импликация $f \in X \Longrightarrow \pi(f) \in X$; обратное ввиду неравенства Прохорова [12] (см. также [5, с. 11]) справедливо всегда. Известно [5, теорема 2, с. 16], что с.п. X обладает свойством Круглова, если $X \supseteq L_p$ для некоторого $p < \infty$. В частности, последнее выполнено для с.п. с нетривиальным нижним индексом Бойда, т.е. если $\alpha_X > 0$. Кроме того, этим свойством обладают также некоторые экспоненциальные пространства Орлича, не содержащие L_p ни при каком $p < \infty$ (см. замечание 3.5).

Со свойством Круглова тесно связан оператор $\mathcal{K}$ [3] (см. также [4]). Сначала определим вспомогательный оператор $\mathcal{K}_1$ со значениями в пространстве $S(\Omega, \mathcal{P})$, где $(\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=0}^{\infty}([0,1], \lambda_k)$ (λ_k – мера Лебега на $[0,1]$, $k = 0, 1, \ldots$). Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктных подмножеств отрезка $[0,1]$, $\lambda(E_n) = \frac{1}{e \cdot n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Для произвольной функции f из $S([0,1], \lambda)$ положим

$$\mathcal{K}_1 f(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k) \chi_{E_n}(\omega_0).$$

Хорошо известно, что существует сохраняющее меру отображение $\delta: (\Omega, \mathcal{P}) \to ([0,1], \lambda)$. Для каждой функции g из $S(\Omega, \mathcal{P})$ определим $R(g)(x) := g(\delta^{-1} x)$, $x \in [0,1]$. Легко видеть, что

$$\lambda\{x \in [0,1] : R(g)(x) < t\} = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : g(\omega) < t\} \ \ (t \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $\mathcal{K} := R\mathcal{K}_1$ – положительный линейный оператор, действующий из $S([0,1],\lambda)$ в $S([0,1],\lambda)$, причем для любой измеримой на $[0,1]$ функции f распределения функций $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}_1 f$ одинаковы.

Так как мы рассматриваем с.п., то для нас важно лишь распределение функции $\mathcal{K}f$, в связи с чем на определение оператора $\mathcal{K}$ можно смотреть с несколько иной (и зачастую более удобной) точки зрения. Если $f \in S([0,1],\lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ – последовательность наборов функций, измеримых на $[0,1]$, такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_{n,1},\ f_{n,2},\ldots,f_{n,n},\ \chi_{E_n}$ – последовательность независимых с.в.;

(ii) $\mathcal{F}_{f_{n,k}} = \mathcal{F}_f,\ k = 1,2,\ldots,n,$

то определим:

$$\mathcal{K}'f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{n,k}(x)\chi_{E_n}(x), \qquad x \in [0,1].$$

Непосредственная проверка показывает, что ф.р. функций $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}'f$ одинаковы. Поэтому, как уже отмечалось, оператор $\mathcal{K}$ можно в определенном смысле отождествлять с $\mathcal{K}'$.

Напомним, что оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в с.п. X тогда и только тогда, когда X имеет свойство Круглова [3, лемма 3.3]. В [3], главным образом, изучалось действие оператора $\mathcal{K}$ в различных классах с.п. В этой работе нас, прежде всего, будет интересовать проблема сравнения в пространствах со свойством Круглова сумм независимых функций с нулевым средним, с одной стороны, и их дизъюнктных копий, с другой.

§3. Оценки сумм независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова

Пусть X и Y – с.п. на $[0,1]$, $X \subseteq Y$. Напомним следующий результат [3, теорема 6.1]: если (i) оператор $\mathcal{K}: X \mapsto Y$ ограничен или если (ii) норма пространства Y порядково полунепрерывна и оператор $\mathcal{K}: X \mapsto Y^{\times\times}$ ограничен, то существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности с.в. $\{f_k\}_{k=1}^{n} \subset X$ выполнено неравенство:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_Y \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^{n}\overline{f}_k\Big\|_{Z_X^1},$$

где

$$Z_X^p := \{f \in (L_1 + L_\infty)(0,\infty) : \|f\|_{Z_X^p} := \|f^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|f^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_p[1,\infty)} < \infty\}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

а $\{\overline{f}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность дизъюнктных функций на $[0,\infty)$, таких, что ф.р. для $\overline{f}_k$ и f_k ($k \in \mathbb{N}$) одинаковы. Здесь мы докажем аналогичное неравенство (с пространством Z_X^2 вместо Z_X^1) для последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют нулевые средние, т.е. $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Как уже говорилось во Введении, этот результат усиливает теорему 1 из [1] в случае нормированных пространств (подробнее см. замечание 3.5).

Теорема 3.1. *Пусть X и Y – с.п. на $[0,1]$, $X \subseteq Y$ и выполнено хотя бы одно из условий:* (i) *оператор $\mathcal{K} : X \mapsto Y$ ограничен;* (ii) *норма пространства Y порядково полунепрерывна и оператор $\mathcal{K} : X \mapsto Y^{\times\times}$ ограничен. Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$ со средним 0 в X выполнено:*

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leqslant C \left\| \sum_{k=1}^n \overline{f}_k \right\|_{Z_X^2}. \tag{3.1}$$

Наиболее важным компонентом доказательства теоремы 3.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Если X и Y – с.п. на $[0,1]$, $X \subseteq Y$ и оператор $\mathcal{K}$ действует из X в Y, то для любой последовательности симметрично распределенных с.в. $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ справедлива следующая импликация:*

$$\text{если} \quad \sum_{k=1}^\infty \overline{f}_k \in Z_X^2, \quad \text{то} \sum_{k=1}^\infty f_k$$
$$\text{сходится п.в. на} \quad [0,1] \text{ и } \sum_{k=1}^\infty f_k \in Y. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть F_k – ф.р. с.в. f_k, а $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ – последователность независимых с.в., определенных на $[0,1]$, такая, что ф.р. случайных величин g_k и $\pi(f_k)$ для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ совпадают. Предположим на время, что мы доказали сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ п.в. на $[0,1]$ к некоторой с.в. $g \in Y$. Тогда доказательство предложения 3.2 может быть закончено следующим образом. Ввиду неравенства Прохорова (см. [12] или [5, с. 8])

$$\lambda\left\{t \in [0,1] : \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right| \geqslant x\right\} \leqslant 8\lambda\left\{t \in [0,1] : \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(t)\right| \geqslant \frac{x}{2}\right\} \quad (3.3)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x > 0$. Так как ряд из независимых с.в. сходится по мере тогда и только тогда, когда он сходится п.в. (см., например, [13, теорема 2.1.1, с. 29]), то из (3.3) следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ также сходится к некоторой с.в. f п.в. на $[0,1]$. Кроме того, сходимость по мере гарантирует существование возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_m\}_{m \geqslant 1}$ такой, что для всех $\tau > 0$ и $m \geqslant 1$ мы имеем

$$\lambda\{t : |f(t)| \geqslant \tau\} \;\leqslant\; \lambda\left\{t : \left|\sum_{k=1}^{n_m} f_k(t)\right| \geqslant \tau - \frac{1}{m}\right\} \;+\; \frac{1}{m}$$

и

$$\lambda\left\{t : \left|\sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)\right| \geqslant \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m}\right\} \;\leqslant\; \lambda\left\{t : |g(t)| \geqslant \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m}\right\} \;+\; \frac{1}{m}.$$

Отсюда и из (3.3) следует

$$\begin{aligned} \lambda\{t : |f(t)| \geqslant \tau\} \;&\leqslant\; 8\lambda\left\{t : \left|\sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)\right| \geqslant \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m}\right\} \;+\; \frac{1}{m} \\ &\leqslant\; 8\lambda\left\{t : |g(t)| \geqslant \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m}\right\} \;+\; \frac{2}{m}, \end{aligned}$$

или после перехода к пределу при $m \to \infty$

$$\lambda\{t : |f(t)| \geqslant \tau\} \;\leqslant\; 8\lambda\left\{t : |g(t)| \geqslant \frac{\tau}{2}\right\}.$$

Так как $g \in Y$, то из последней оценки мы немедленно получаем: $f \in Y$, что и заканчивает доказательство импликации (3.2).

Для доказательства того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ сходится п.в. на $[0,1]$ и что его сумма g принадлежит пространству Y, нам прежде всего нужна некоторая дополнительная информация о х.ф. суммы

$S_n := \sum_{k=1}^n g_k$, $n \geqslant 1$. Так как с.в. g_k (так же, как и с.в. f_k) симметрично распределена (см. [5, с. 11] или [3]), то ее х.ф. φ_k вещественнозначна и определяется соотношением:

$$\varphi_k(t) = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) dF_k(x)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.4}$$

Кроме того, распределение с.в. g_k, $k \geqslant 1$, является смесью дискретного распределения Пуассона с параметром 1 и семейства сверток F_k (см. [5] или [3]), которая является частным случаем так называемого обобщенного распределения Пуассона (см., например, [14, глава 12] или [15, глава 17, §1, с. 622]). Обобщенное распределение Пуассона безгранично делимо [15, глава 17, §1, с. 622], и поэтому ввиду одного из вариантов формулы Леви–Хинчина (см., например, [5, с. 72])

$$\varphi_k(t) = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1 + x^2}{x^2} dH_k(x)\right), \quad k = 1, 2, \dots , \tag{3.5}$$

где $H_k(x)$ – ограниченная, неубывающая, непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, которая называется спектральной функцией (Леви–Хинчина). Можно предположить, что $H_k(-\infty) = 0$. Сравнивая (3.4) и (3.5), получаем

$$H_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1 + y^2} dF_k(y), \ k = 1, 2, \dots . \tag{3.6}$$

Далее нам будет нужно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. *Если выполнены условия предложения* 3.2, *то ряд*

$$H(x) := \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \tag{3.7}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$ *и* $H(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\infty) < \infty$.

Доказательство леммы 3.3. Прежде всего, так как по условию $\overline{f}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{f}_k(t) \in Z_X^2$, то функция $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \lambda\{t >$

$0 : \overline{f}(t) < x\}$ конечна для всех $x < 0$. Далее, так как с.в. f_k симметрично распределена, то во всех точках непрерывности $x \in \mathbb{R}$ функции $F_k(x)$ имеем

$$F_k(-x) = 1 - F_k(x), \ \ k = 1, 2, \dots \ . \tag{3.8}$$

Следовательно, существует такое всюду плотное множество $E \subseteq (0, \infty)$, что для всех $x \in E$

$$n_{\overline{f}}(x) := \lambda\{t > 0 : |\overline{f}(t)| > x\} = 2F(-x).$$

Применяя последнее соотношение вместе с (3.6) и (3.8), мы получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} H_k(\infty) &= -2 \int\limits_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} d\left(\sum_{k=1}^{n} F_k(-y)\right) \\ &\leqslant -2 \int\limits_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dF(-y) = -\int\limits_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\overline{f}}(y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda\{t > 0 : |\overline{f}(t)| = \tau\} = 0$ для каждого $\tau \geqslant 0$. Рассмотрим два взаимно исключающих случая:

a) для некоторого $y_0 > 0$ выполнено: $n_{\overline{f}}(y_0) = 1$;

b) при всех $y > 0$ имеем $n_{\overline{f}}(y) < 1$, т.е. $\lambda\{\operatorname{supp} \overline{f}\} < 1$. В случае a), применяя (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} H_k(\infty) &= -\int\limits_0^{y_0} \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\overline{f}}(y) - \int\limits_{y_0}^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\overline{f}}(y) \\ &\leqslant -\int\limits_0^{y_0} y^2 dn_{\overline{f}}(y) - \int\limits_{y_0}^\infty dn_{\overline{f}}(y) \\ &= \|\overline{f}^* \mathbf{1}_{[1,\infty)}\|_{L_2}^2 + n_{\overline{f}}(y_0) \leqslant \|\overline{f}\|_{Z_X^2}^2 + 1 < \infty. \end{aligned}$$

В случае b) подобные (и чуть более простые) оценки показывают, что $\sum_{k=1}^{n} H_k(\infty) \leqslant 1$. Таким образом, $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(\infty) < \infty$. Так как для каждого $k \geqslant 1$ функция $H_k(x)$ возрастает, то отсюда следует равномерная сходимость ряда (3.7) на $\mathbb{R}$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x > 0$ мы имеем: $H(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} H_k(x)$. Поэтому, переходя к пределу сначала при $x \longrightarrow \infty$, а затем при $n \longrightarrow \infty$, мы получаем:

$$H(\infty) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\infty).$$

Так как противоположное неравенство очевидно, то лемма 3.3 доказана. $\square$

Продолжим доказательство предложения 3.2. Пусть ψ_n – х.ф. с.в. S_n $(n = 1, 2, \dots)$, где, как и ранее, $S_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Так как с.в. g_k $(k = 1, 2, \dots)$ независимы, то

$$\psi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} d\left(\sum_{k=1}^{n} H_k(x) \right) \right).$$

Кроме того, так как функции $H_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ возрастают и $\cos(tx) - 1 \leqslant 0$, то последовательность $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, и, значит, по лемме 3.3

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = \psi(t) := \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \right). \quad (3.10)$$

Покажем, что $\psi(t)$ является х.ф. некоторой с.в. Для этого достаточно проверить, что функция $\psi(t)$ непрерывна в нуле [16, глава 6, теорема 5.4, с. 144].

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зафиксируем $x_0 \geqslant 1$ такое, что $H(-x_0) + H(\infty) - H(x_0) < \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда найдется константа $c = c(x_0)$ такая, что для всех $|x| \leqslant x_0$ выполнено: $(1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} \leqslant c \cdot t^2$. Таким образом, если число $|t|$ достаточно мало, то

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \right| \\
&= \int_{-x_0}^{x_0} (1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) + \int_{|x| \geqslant x_0} (1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \\
&\leqslant ct^2 (H(x_0) - H(-x_0)) + 4 \cdot (H(-x_0) + H(\infty) - H(x_0)) \\
&\leqslant c \cdot H(\infty) t^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Итак, ψ – х.ф. некоторой с.в. g, ф.р. которой является слабым пределом функций распределения сумм S_n [15, глава 15, §3, теорема 2, с. 569]. Тем самым g имеет безгранично делимое распределение [15, глава 17, § 1, следствие к теореме 2, с. 624]. Кроме того, применяя теорему Ито–Нисио [13, теорема 2.1.1, с. 29–32], заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ сходится п.в. на $[0,1]$ к с.в. g. Чтобы закончить доказательство предложения 3.2, осталось показать, что $g \in Y$.

Из (3.6) и (3.8) следует, что для всех x из некоторого всюду плотного подмножества полуоси $(0,\infty)$ выполнено

$$H_k(\infty) - H_k(x) = \int_x^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2}\,dF_k(y) = \int_x^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2}\,d(1 - F_k(-y))$$

$$= \int_{-\infty}^{-x} \frac{y^2}{1+y^2}\,dF_k(y) = H_k(-x), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда (опять принимая во внимание (3.6)) мы получаем

$$H(-x) + H(\infty) - H(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} H_k(-x) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} F_k(-x) = n_{\overline{f}}(x). \quad (3.11)$$

Так как функция $H(x)$ непрерывна слева, то существует измеримая на $(0,\infty)$ функция u такая, что

$$\lambda\{s > 0 : u(s) < x\} = H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

По предположению $\overline{f} \in Z_X^2$; следовательно, $u \in Z_X^2$ ввиду (3.11). Но тогда функция $v(s) := u(H(\infty)\cdot s)$ $(s > 0)$ также принадлежит пространству Z_X^2. Отсюда и из определения пространства Z_X^2 немедленно следует: $v^*(t)\chi_{[0,1]}(t) \in X$. Более того, так как

$$\lambda\{s > 0 : v(s) < x\} = \frac{H(x)}{H(\infty)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

то $v^*(t) = v^*(t)\chi_{[0,1]}(t) \in X$. Таким образом, существует с.в. $h \in X$, ф.р. которой $\mathcal{F}_h(x)$ определяется соотношением:

$$\mathcal{F}_h(x) := \frac{H(x)}{H(\infty)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что последнее, а также ограниченность оператора $\mathcal{K}$ из X в Y, которую мы имеем по условию, позволяют доказать, что $g \in Y$ (похожее рассуждение см. в доказательстве леммы 10 на с. 72 в работе [5]).

Введем обозначения:

$$U(t,x) := (\cos(tx) - 1)\,\frac{1+x^2}{x^2}, \quad t, x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \nu_1(t) &:= \exp\Big(\int\limits_{|x|<1} U(t,x)dH(x)\Big), \quad t \in \mathbb{R} \\ \nu_2(t) &:= \exp\Big(\int\limits_{|x|\geqslant 1} U(t,x)dH(x)\Big), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ввиду (3.10) имеем $\psi(t) = \nu_1(t)\cdot\nu_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и, таким образом, $g \stackrel{d}{=} g_1 + g_2$, где g_1 и g_2 – независимые с.в. с х.ф. ν_1 и ν_2 соответственно. Для доказательства принадлежности g пространству Y достаточно проверить, что $g_1 \in Y$ и $g_2 \in Y$.

Из формулы Леви–Хинчина следует, что с.в. g_1 имеет безгранично делимое распределение и что соответствующая ей спектральная функция постоянна на каждом из интервалов $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$. Тем самым, ввиду теоремы 4 в [17], получаем

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{-\ln \lambda\{t \in [0,1] : |g_1(t)| \geqslant x\}}{x\ln(1+x)} = 1.$$

Из последнего соотношения, очевидно, вытекает оценка

$$\lambda\{t \in [0,1] : |g_1(t)| \geqslant x\} \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}x\ln(1+x)\Big),$$

верная для достаточно больших $x > 0$. Поэтому g_1 принадлежит пространству Орлича L_{M_1}, $M_1(t) = e^{|t|\ln(e+|t|)} - 1$, $t \in \mathbb{R}$ (см. также [3, лемма 4.3]). Так как $X \supseteq L_\infty$ (см. §2) и $\mathcal{K} : X \mapsto Y$, то из теоремы 4.4 в [3] следует: $Y \supseteq L_{M_1}$ и, в частности, $g_1 \in Y$.

Покажем, наконец, что $g_2 \in Y$. Обозначим

$$\nu_2(t) := \exp\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1)dW(x)\Big), \tag{3.14}$$

где

$$W(x) := \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dH(y), & \text{если } \infty < x \leqslant -1, \\ W(-1), & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ W(-1) + \int\limits_{1}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dH(y), & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $W(x)$ – неотрицательная, ограниченная, неубывающая и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, $W(-\infty) = 0$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $H(\infty) > 0$, а значит, и $W(\infty) > 0$. Пусть ф.р. $\mathcal{F}_W$ задана равенством: $\mathcal{F}_W(x) = \frac{W(x)}{W(\infty)}$. Ввиду предложения 12 на с. 74 в [5], $g_2 \in Y$ тогда и только тогда, когда $w \in Y$, где w – с.в. с х.ф.

$$\theta(t) = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) d\mathcal{F}_W(x)\right). \tag{3.15}$$

Обозначим через w' с.в. с ф.р. $\mathcal{F}_W(x)$. Так как с.в. h (с ф.р. $\mathcal{F}_h(x) = \frac{H(x)}{H(\infty)}$) принадлежит X, то и $w' \in X$. Действительно, из элементарного неравенства $1 < (1+y^2)y^{-2} \leqslant 2$ $(y \geqslant 1)$ следует, что для всех $x \geqslant 1$

$$\lambda\{t : |w'(t)| \geqslant x\} = \\ = \frac{1}{W(\infty)} \int\limits_{|y| \geqslant x} \frac{1+y^2}{y^2}\, dH(y) \leqslant \frac{2H(\infty)}{W(\infty)} \lambda\{t : |h(t)| \geqslant x\}.$$

Ввиду (3.15), $w = \pi(w')$. В итоге, так как по условию оператор $\mathcal{K}$ действует из X в Y, то, применяя теорему 3.5 работы [3], мы получаем, что $w \in Y$, а значит, и $g_2 \in Y$. Тем самым доказательство предложения 3.2 закончено. $\square$

Следующая лемма вместе с предложением 3.2 приводят к доказательству теоремы 3.1 в важном частном случае симметрично распределенных с.в.

Лемма 3.4. *Предположим, что X и Y – с.п. на $[0,1]$, $X \subseteq Y$ и что импликация (3.2) верна для произвольной последовательности* *независимых симметрично распределенных с.в.* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$. *Тогда существует такая постоянная* $C > 0$, *что для любой такой последовательности мы имеем*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|_Y \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \overline{f}_k\Big\|_{Z_X^2}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее подпространство пространства Z_X^2:

$$Z_{X,s}^2 := \{f \in Z_X^2 :\ \text{с.в. } f^{(k)}(x) := f(x+k-1)\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$\text{симметрично распределена для всех}\ \ k \geqslant 1\}.$$

Покажем, прежде всего, что $Z_{X,s}^2$ замкнуто в Z_X^2. Пусть $\{f_n\} \subset Z_{X,s}^2$, $f_n \to f \in Z_X^2$ относительно $\|\cdot\|_{Z_X^2}$. Тогда $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ по мере для каждого $k = 1, 2, \ldots$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и обозначим через E множество всех точек $x \in (0,\infty)$, в которых каждая из ф.р. $F_n(x)$ с.в. $f_n^{(k)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а также ф.р. $F(x)$ с.в. $f^{(k)}$ непрерывны. Очевидно, E всюду плотно в $(0,\infty)$. Так как из сходимости по мере следует слабая сходимость распределений [15, глава 8, §2, лемма 2, с. 293], то $F_n(x) \to F(x)$ для всех $x \in E$. Используя симметричность распределений $F_n(\cdot)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, мы получаем: $F(x) = 1 - F(-x)$, $x \in E$. Так как E всюду плотно в $(0,\infty)$, то последнее равенство выполняется во всех точках $x > 0$ непрерывности функции $F(x)$. Другими словами, $f^{(k)}$ имеет симметричное распределение для любого $k \in \mathbb{N}$, и, таким образом, подпространство $Z_{X,s}^2$ замкнуто.

Определим последовательность $\{L_n\}_{n\geqslant 1}$ линейных операторов, действующих из $Z_{X,s}^2$ в $Y(\Omega, \mathcal{P})$:

$$(L_n f)(w_1, w_2, \ldots) := \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(w_k),\ \ f \in Z_{X,s}^2,\ \ n \in \mathbb{N},$$

где $f^{(k)}(x) = f(x+k-1)$ $(x \in [0,1])$ и $(\Omega, \mathcal{P}) = \prod_{k=1}^{\infty}([0,1], \lambda_k)$ (λ_k – мера Лебега на $[0,1]$). Заметим, что ввиду условия $X \subseteq Y$ имеют место вложения $L_n(Z_{X,s}^2) \subseteq Y(\Omega, \mathcal{P})$ для каждого $n \geqslant 1$. Более того, существует такая константа $C_1 > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $f \in Z_{X,s}^2$ выполнено

$$\|L_n f\|_{Y(\Omega,\mathcal{P})} \leqslant n \max_{k=1,\ldots,n} \|f^{(k)}\|_Y \leqslant C_1 n \|f^* \mathbf{1}_{[0,1]}\|_X \leqslant C_1 n \|f\|_{Z_X^2}.$$

Таким образом, операторы L_n $(n \geqslant 1)$ ограничены. По условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k)$ сходится $\mathcal{P}$-п.в. на Ω, и его сумма принадлежит пространству Y. Следовательно, ввиду предложения 11 на с. 6 в [5] найдется константа $C(Y) > 0$ такая, что для всех $f \in Z_{X,s}^2$

$$\sup_{n=1,2,\dots} \|L_n f\|_{Y(\Omega,\mathcal{P})} \leqslant C(Y) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k) \right\|_Y.$$

Тем самым последовательность операторов $\{L_n\}_{n\geqslant 1}$, определенных на банаховом пространстве $Z_{X,s}^2$, поточечно ограничена, и, значит, ввиду принципа равномерной ограниченности, $\sup_{n\geqslant 1} \|L_n\|_{Z_X^2 \to Y} < \infty$. Иначе говоря, существует такая постоянная $C_2 > 0$, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(w_k) \right\|_{Y(\Omega,\mathcal{P})} \leqslant C_2 \|f\|_{Z_X^2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f \in Z_{X,s}^2$. Применяя еще раз предложение 11 на с. 6 в [5], заключаем, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k) \right\|_{Y(\Omega,\mathcal{P})} \leqslant C_2 C(Y) \|f\|_{Z_X^2}.$$

Так как последнее неравенство эквивалентно соотношению (3.16), то лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3.1. Действуя стандартным образом, мы применим симметризацию. Пусть $\{f_k'\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий с.в. f_k, т.е. $f_k' \stackrel{d}{=} f_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, и, кроме того, $h_k := f_k - f_k'$ $(k = 1, \dots, n)$. Тогда $\{h_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых симметрично распределенных с.в., и ввиду предложения 11 на с. 6 в [5]

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_Y \leqslant C(Y) \left\| \sum_{k=1}^{n} h_k \right\|_Y.$$

Так как

$$\lambda\Big\{t > 0 : \sum_{k=1}^{n} |\overline{h}_k(t)| > x\Big\} \leqslant 2\lambda\Big\{t > 0 : \sum_{k=1}^{n} |\overline{f}_k(t)| > x\Big\}$$

для всех $x \geqslant 0$, то в случае (i) неравенство (3.1) является непосредственным следствием предложения 3.2 и леммы 3.4.

Если выполнено (ii), то то же рассуждение показывает, что существует константа $C > 0$ такая, что для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых с.в. с нулевым средним верно неравенство

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{Y^{\times\times}} \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n \overline{f}_k\Big\|_{Z_X^2}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что ввиду порядковой полунепрерывности нормы в Y последнее соотношение эквивалентно неравенству (3.1). □

Замечание 3.5. Как уже говорилось во Введении, теорема 3.1 усиливает соответствующую часть теоремы 1 в [1] в случае нормированных пространств. В частности, рассмотрим пространства Орлича $\mathrm{Exp}L_p := L_{N_p}$, где

$$N_p(t) := e^{t^p} - \sum_{k=0}^{[1/p]} \frac{t^{kp}}{k!} \ \ (t \geqslant 0).$$

Заметим, что $\mathrm{Exp}L_p \in \mathbb{K}$, если $0 < p \leqslant 1$ (см. [6, 5] или [3]), и, следовательно, теорема 3.1 применима к таким пространствам. Напротив, так как для любых $q \in (0, \infty)$ и $p \in (0, \infty)$ $L_q \not\subseteq \mathrm{Exp}L_p$, то теорема 1 в [1] в этом случае не “работает”.

Важно указать, что в случае, когда норма в Y порядково полунепрерывна, справедливо также и обратное утверждение. Точнее, применение теоремы 3.1, а также аккуратный анализ доказательства теоремы 3.5 в [3] приводят к следующему результату.

Теорема 3.6. *Пусть X и Y – с.п. на $[0,1]$, $X \subseteq Y$ и норма в Y порядково полунепрерывна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в Y;*

(ii) *существует такая константа $C > 0$, что неравенство*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_Y \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n \overline{f}_k\Big\|_X \tag{3.17}$$

верно для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ *независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(\{f_k \neq 0\}) \leqslant 1. \tag{3.18}$$

Как показано в работе [9] (см. также [8, с. 134–136]), неравенство Хинчина выполнено в с.п. X тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича $\exp L_2 = L_{N_2}$, $N_2(t) := \exp t^2 - 1$. В общей ситуации, когда рассматривается класс всех последовательностей независимых функций со средним 0, подобного “минимального” с.п. уже нет. Точнее, справедливо следующее утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению первой части теоремы 1 в [1].

Следствие 3.7. *Предположим, что с.п. E обладает следующим свойством: для любого максимального с.п. $X \supseteq E$ существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство* (3.17) *верно в случае $Y = X$ для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию* (3.18). *Тогда E содержит L_p для некоторого $p \in [1, \infty)$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.6 вместе со следствиями 5.4 и 5.6 из [3]. □

§4. Изоморфизмы между симметричными пространствами на $[0,1]$ и $[0,\infty)$

В последней части работы мы применим теорему 3.1 к изучению вопроса о том, содержит ли данное с.п. на конечном интервале подпространство, изоморфное некоторому с.п. на полуоси. Общая проблема изоморфизма между с.п. на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$ (иными, нежели L_p-пространства) впервые была поставлена в [10]. Этот и другие близкие вопросы интенсивно изучались в [7] (см. также [8]) на основе подхода, использующего конструкцию стохастического интеграла относительно симметризованного пуассоновского процесса. Наш подход технически проще; заметим, что аналогичные рассуждения применялись ранее в работе [18] в специальном случае пространств Лоренца $L_{p,q}$. Первая часть следующей теоремы усиливает ранее имевшиеся результаты об изоморфном вложении некоторого с.п. на полуоси в данное с.п. X на $[0,1]$, заменяя условие нетривиальности нижнего индекса Бойда X на более слабое условие ограниченности оператора $\mathcal{K}$. Вторая часть теоремы хорошо известна (см. [7, §8] или [8, с. 203]), но наше доказательство ее (основанное на теореме 3.1) намного проще.

Теорема 4.1. *Пусть X – с.п. на $[0,1]$.*

(i) *Если оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в X, то X содержит подпространство, изоморфное с.п. Z_X^2;*

(ii) *Если индексы Бойда X нетривиальны, т. е. $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$, то пространства X и Z_X^2 изоморфны.*

Доказательство. Определим на пространстве Z_X^2 линейный оператор

$$Qf(t,\omega_1,\omega_2,\dots) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega_k) r_k(t), \quad \text{где} \quad f_k(\omega_k) = f(k-1+\omega_k) \quad (k=1,2,\dots).$$

По теореме 3.1, оператор Q ограниченно действует из Z_X^2 в пространство $X(\Omega \times [0,1])$, где $\Omega = [0,1]^\infty$ с мерой $\prod_{k=1}^\infty \lambda_k$ (как и ранее, λ_k – мера Лебега). Кроме того, ввиду “легкой” части теоремы 1 в [1] (левая часть неравенства (3) в той теореме верна для любого с.п. X), существует константа $c > 0$ такая, что $\|Qf\|_{X(\Omega\times[0,1])} \geqslant c\|f\|_{Z_X^2}$. Тем самым, образ $\Im(Q)$ оператора Q изоморфен пространству Z_X^2. Так как пространства X и $X(\Omega \times [0,1])$ изоморфны, то часть (i) доказана.

Перейдем к доказательству части (ii). Прежде всего, заметим, что из условия $\alpha_X > 0$ вытекает ограниченность оператора $\mathcal{K}$ в X [5, теорема 3, с. 16]. Покажем, что образ $\Im(Q)$ оператора Q, состоящий из всех функций $g \in X(\Omega \times [0,1])$, представимых в виде суммы ряда

$$g(t,\omega_1,\omega_2,\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega_k) r_k(t),$$

который сходится п.в. на $\Omega \times [0,1]$, при условии нетривиальности индексов Бойда дополняем в пространстве $X(\Omega \times [0,1])$.

Определим на $L_1(\Omega\times[0,1])$ последовательность условных математических ожиданий

$$\mathbb{E}(g|\omega_k)(\omega_k) := \\ := \int_0^1 \dots \int_0^1 g(t,\omega_1,\omega_2,\dots)dt d\omega_1\dots d\omega_{k-1}d\omega_{k+1}\dots \quad (k\geqslant 1),$$

а также проектор

$$Pg(t,\omega_1,\omega_2,\dots) := \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}(gr_k|\omega_k)r_k(t).$$

Докажем, что проектор P ограничен в $L_p(\Omega\times[0,1])\approx L_p$ для всех $1<p<\infty$. Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{F} := \{F\times[0,1] : F\subset \Omega$ – измеримо$\}$ подмножеств пространства $\Omega\times[0,1]$. Заметим, что каждое условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\cdot|\omega_k)$ $(k\geqslant 1)$ можно получить как произведение условных математических ожиданий $\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{A}_k)\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{B}_k)$, где σ-алгебры $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ порождаются семействами множеств

$$A_k := \Big\{\prod_{j=1}^{\infty} C_j : C_j \text{ – произвольное измеримое подмножество} \\ \text{отрезка}\quad [0,1],\quad \text{если}\quad j\leqslant k,\quad C_j=[0,1],\quad \text{если } j>k\Big\}$$

и

$$B_k := \Big\{\prod_{j=1}^{\infty} C_j : C_j \text{ – произвольное измеримое подмножество} \\ \text{отрезка}\quad [0,1],\quad \text{если}\quad j\geq k,\ C_j=[0,1],\quad \text{если } j<k\Big\},$$

соответственно. Применяя теперь неравенство Хинчина, затем дважды теорему Стейна для условных математических ожиданий [19] и, наконец, еще раз неравенство Хинчина, получим

$$\|Pf\|_{L_p(\Omega\times[0,1])} \asymp \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{E}(fr_k|\omega_k))^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_p\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{E}(fr_k|\mathcal{F}))^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L_p(\Omega)} \asymp \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}(fr_k|\mathcal{F})r_k\Big\|_{L_p(\Omega\times[0,1])}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(fr_k|\mathcal{F})(\omega_1,\omega_2,..)r_k(t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^1 f(u,\omega_1,\omega_2,..)r_k(u)\,du\cdot r_k(t),$$

то (см., например, [8, с. 137]) для каждого $p\in(1,\infty)$ существует постоянная $C_p' < \infty$ такая, что

$$\int\limits_0^1 |Pf(t,\omega_1,\omega_2,\dots)|^p\,dt \leqslant C_p' \int\limits_0^1 |f(t,\omega_1,\omega_2,\dots)|^p\,dt, \quad \forall f\in L_p(\Omega\times[0,1]).$$

После интегрирования последнего неравенства по Ω мы получаем, что проектор P ограничен в $L_p(\Omega\times[0,1])$ $(1<p<\infty)$. Из интерполяционной теоремы Бойда [8, теорема 2.b.11] следует тогда, что проектор P ограничен в $X(\Omega\times[0,1])$. Кроме того, легко видеть, что $\Im(P)=\Im(Q)$. Следовательно, образ $\Im(Q)$ оператора Q (который ввиду уже доказанной первой части теоремы изоморфен Z_X^2) дополняем в $X(\Omega\times[0,1])\approx X$. С другой стороны, очевидно, пространство X изоморфно дополняемому подпространству пространства Z_X^2. Так как пространство $X\oplus X$ (соответственно, $Z_X^2\oplus Z_X^2$) изоморфно X (соответственно Z_X^2), то в итоге, применяя метод декомпозиции Пелчинского [8, с. 172], получаем изоморфность пространств X и Z_X^2. $\square$

В заключение установим тесную связь между стохастическим интегралом Пуассона, ключевым средством в конструкциях из [7, §8] и [8, §2.f], и оператором $\mathcal{K}$, играющим центральную роль в наших доказательствах.

Полное и детальное определение оператора T стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона можно найти в [8, с. 205–206]. Мы здесь ограничимся частным случаем, когда функция f определена на $[0,1]$. Положим: $Tf=T'f-T''f$, где

$$T'f(u,v):=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{F_k'}(u)\sum_{j=1}^{k} f(\varphi_j'(v)) \;\; (u,v\in[0,1]).$$

Здесь $\{F_k'\}_{k\geqslant 0}$ – разбиение отрезка $[0,1]$ на попарно дизъюнктные подмножества, $\lambda(F_k')=\frac{1}{e\cdot k!}$, $k=0,1,2,\dots$, а $\{\varphi_j'\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых с.в., равномерно распределенных на $[0,1]$.

Подобным образом определяется и функция $T''f$, при этом соответствующие последовательности $\{F''_k\}_{k\geqslant 0}$ и $\{\varphi''_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимы относительно последовательностей $\{F'_k\}_{k\geqslant 0}$ и $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$, соответственно. Таким образом, функции $T'f$ и $T''f$ одинаково распределены и независимы.

В [7, §8] (см. также [8, §2.f]) доказано, что оператор T ограниченно действует из Z_X^2 в X, если $\alpha_X > 0$.

В следующей теореме тот же результат получен при более слабом предположении о пространстве X.

Теорема 4.2. *Если X – с.п. на $[0,1]$, которое сепарабельно или максимально, то оператор T ограничен из Z_X^2 в X тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{K}$ ограничен в X.*

Доказательство. Для любой с.в. f на $[0,1]$, последовательность $\{f(\varphi'_j)\}_{j=1}^{\infty}$ из определения оператора T состоит из независимых с.в., имеющих то же распределение, что и с.в. f. Следовательно (см. определение оператора $\mathcal{K}'$ в §2), $T'f \stackrel{d}{=} \mathcal{K}f$, и поэтому $\|T'f\|_X = \|\mathcal{K}f\|_X$. Более того, ввиду независимости с.в. $T'f$ и $T''f$,

$$\lambda\{(u,v): |Tf(u,v)| > \tau\} \geqslant \lambda\{(u,v): |T'f(u,v)| > \tau \text{ и } u \in F''_0\} =$$
$$= e^{-1}\lambda\{(u,v): |T'f(u,v)| > \tau\},$$

и, таким образом, так как для любого с.п. справедлива оценка $\|\sigma_t\|_{X\to X} \leqslant \max(1,t)$ [11, глава 2, следствие 4.1, с. 133], то

$$\|\mathcal{K}f\|_X = \|T'f\|_X \leqslant \|\sigma_e\|_{X\to X}\|Tf\|_X \leqslant e\|Tf\|_X.$$

Итак, если оператор $T : Z_X^2 \to X$ ограничен, то ограничен и оператор $\mathcal{K} : X \to X$.

Наоборот, предположим, что оператор $\mathcal{K} : X \to X$ ограничен. Если с.в. f определена на $[0,1]$, то по предыдущему

$$\|Tf\|_X = \|T'f - T''f\|_X \leqslant 2\|\mathcal{K}f\|_X. \tag{4.1}$$

Пусть теперь функция $f \in Z_X^2$ произвольна. Так как операторы T' и T'' положительны, то мы можем предположить, что с.в. f неотрицательна. Обозначим $f_n := f\chi_{(n-1,n)}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Легко видеть, что существуют последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $f_n = g_n + h_n$, $g_n h_n = 0$ и $\int\limits_{n-1}^{n} g_n(t)\,dt = \int\limits_{n-1}^{n} h_n(t)\,dt$ $(n =$

$1, 2, \ldots$). Поэтому, если $f'_n := g_n - h_n$, то $|f'_n| = f_n$ и $\int\limits_{n-1}^{n} f'_n(t)\,dt = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Далее, пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых копий с.в. f'_n $(n = 1, 2, \ldots, n)$ на $[0, 1]$ (т.е. $b_n \stackrel{d}{=} f'_n$). По теореме 3.1 мы имеем

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k \Big\|_X \leqslant C \Big\| \sum_{k=1}^{n} f'_k \Big\|_{Z_X^2} = C \Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big\|_{Z_X^2}. \tag{4.2}$$

Кроме того, из определения оператора T [8, с. 207] следует, что $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Tb_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности независимых симметрично распределенных с.в., а также, что Tf_n и Tb_n одинаково распределены для любого $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, применяя теорему 5.4.4 на с. 243 в [20], мы получаем

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} Tb_k \Big\|_X \asymp \Big\| \sum_{k=1}^{n} Tf_k \Big\|_X, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, ввиду формул (4.1) и (4.2), а также ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в пространстве X, имеем

$$\Big\| T\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big) \Big\|_X = \Big\| \sum_{k=1}^{n} Tf_k \Big\|_X \asymp \Big\| \sum_{k=1}^{n} Tb_k \Big\|_X =$$

$$= \Big\| T\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \Big\|_X \leqslant 2 \Big\| \mathcal{K}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \Big\|_X \leqslant 2\|\mathcal{K}\|_{X\to X} \Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k \Big\|_X \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\mathcal{K}\|_{X\to X} C \Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big\|_{Z_X^2} \leqslant 2\|\mathcal{K}\|_{X\to X} C \|f\|_{Z_X^2}.$$

Так как пространство X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные рассуждения, заключаем отсюда, что оператор $T : Z_X^2 \to X$ ограничен. □

Из теоремы 4.2 и теоремы 2.f.1(i) в [8] вытекает следующий результат.

Следствие 4.3. *Если с.п. X сепарабельно или максимально и $X \in \mathbb{K}$, то образ оператора стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона изоморфен пространству Z_X^2.*

Литература

1. W. B. Johnson and G. Schechtman, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces.* — Ann. Probab. **17** (1989), 789–808.
2. J. Hoffman-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables.* — Studia Math. **52** (1974), 258–286.
3. S. V. Astashkin and F. A. Sukochev, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach.* — Israel J. Math. **145** (2005), 125–156.
4. С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Сравнение сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах.* — Матем. заметки. **76**, No. 4 (2004), 483–489.
5. M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces.* — Cambridge University Press (1994).
6. В. М. Круглов, *Замечание о бесконечно делимых распределениях.* — Теор. вероятн. и ее примен. **15**, No. 2 (1970) 331–336.
7. W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces* — Mem. Amer. Math. Soc. **19**, No. 217 (1979).
8. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces.* — Ergebnisse der Mathematic und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas] **97**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1979).
9. V. A. Rodin and E. M. Semenov, *Rademacher series in symmetric spaces.* — Anal. Math. **1** (1975), 207–222.
10. Б. С. Митягин, *Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства.* — Усп. матем. наук. **25** (1970), 59–103.
11. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Наука, М. (1978).
12. Ю. В. Прохоров, *Сильная устойчивость сумм и бесконечно делимых законов.* — Теория вероятн. и ее примен. **3**, No. 2 (1958), 153–165.
13. S. Kwapień and W.A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple.* Birkhäuser (1992).
14. Е. Лукач, *Характеристические функции.* Наука, М. (1964).
15. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2, Мир, М. (1984).
16. А. А. Боровков, *Теория вероятностей.* Наука, М. (1976).
17. В. М. Круглов, С. Н. Антонов, *Еще раз об асимптотическом поведении бесконечно делимых распределений в банаховом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **27**, No. 4 (1982), 625–642.
18. N. L. Carothers and S. J. Dilworth, *Inequalities for sums of independent random variables.* — Proc. Amer. Math. Soc. **194** (1988), 221–226.
19. E. M. Stein, *Topics on harmonic analysis related to the Littlewood–Paley theory.* — Ann. Math. Studies, No. 63, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1970).
20. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах.* Наука, М. (1985).

Astashkin S. V., Sukochev F. A. Series of independent mean zero random variables in rearrangement invariant spaces with the Kruglov property.

This paper compares sequences of independent mean zero random variables in a rearrangement invariant space X on $[0,1]$ with sequences of disjoint copies of individual terms in the corresponding rearrangement invariant space Z_X^2 on $[0,\infty)$. Principal results of the paper show that these sequences are equivalent in X and Z_X^2 respectively if and only if X possesses the (so-called) Kruglov property. We also apply our technique to complement well-known results concerning isomorphism between rearrangement invariant spaces on $[0,1]$ and $[0,\infty)$.

Самарский госуниверситет, г. Самара
Поступило 9 марта 2007 г.
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

School of Informatics and Engineering
Flinders University, Australia
E-mail: sukochev@infoeng.flinders.edu.au