Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 345, 2007 г.

А. Б. Александров

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА $L^P(\mathbb{R}^N)$, $0 < P < 1$, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ И РАСТЯЖЕНИЙ

1. Введение

В этой статье все подпространства предполагаются замкнутыми. Пусть X – подпространство (комплексного) пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Подпространство X называется *собственным*, если $X \neq L^p(\mathbb{R}^n)$. Мы говорим, что X *инвариантно относительно сдвигов* (или T*-инвариантно*), если $f(x+a) \in X$ для всех $f \in X$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Мы говорим, что X *инвариантно относительно растяжений* (или D*-инвариантно*), если $f(tx) \in X$ для всех $f \in X$ и $t > 0$. Наконец, подпространство X называется *инвариантным относительно сдвигов и растяжений (или TD-инвариантным)*, если оно является одновременно T-инвариантным и D-инвариантным, т.е. $f(tx+a) \in X$ для всех $f \in X$, $t > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Спектром функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ будем называть замыкание множества $\{\mathcal{F}f \neq 0\}$, где $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье,

$$(\mathcal{F}f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i\,(t,x)}\,dt.$$

Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ множества всех функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, спектр которых является компактным подмножеством множества Ω. Ясно, что $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ – инвариантное относительно сдвигов подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Если $t\Omega = \Omega$ при всех $t > 0$, то $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ является TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Пространство $L^p_{(0,+\infty)}(\mathbb{R})$ мы отождествляем естественным образом с классом Харди H^p в полуплоскости при $p \in (0,+\infty)$. Пространство $\overline{H^p}$ отождествляется естественным образом с пространством $L^p_{(-\infty,0)}(\mathbb{R})$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 05-01-00924.

Пусть X – собственное TD-инвариантно подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Подпространство X называется *максимальным* TD-инвариантным подпространством, если для любого TD-инвариантного подпространства Y пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ включение $X \subset Y$ возможно только в двух следующих случаях: $Y = X$, $Y = L^p(\mathbb{R}^n)$.

В §2 мы докажем, что каждое собственное TD-инвариантно подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ содержится в максимальном TD-инвариантном подпространстве, если $p \leqslant 1$. Результат легко вытекает из одного наблюдения Вольфа [6]. Если $p = 1$, то этом результат может быть получен также стандартными методами, например, при помощи преобразования Фурье. Впрочем, можно обойтись и без преобразования Фурье, см. доказательство теоремы 2.3 в случае $p \geqslant 1$. При $p < 1$ эти методы не работают. Этот случай ещё интересен и тем, что множество всех максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет мощность континуума (теорема 3.3), что резко контрастирует со случаем $p = 1$ (следствие 2.4).

В §3 мы строим шкалу TD-инвариантных подпространств $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ пространства $L^p(\mathbb{R})$ и изучаем её свойства. Свойства этой шкалы позволяют получить основной результат этого параграфа – теорему 3.3.

В §4 и §5 исследуются свойства p-циклических функций, т.е. функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, не принадлежащих никакому собственному TD-инвариантному подпространству пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. В частности, мы доказываем в §4, что при $p \in (0, 1]$ множество всех p-циклических функций образует всюду плотное открытое подмножество пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ (теорема 4.1).

Будем говорить, что TD-инвариантное подпространство X пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ является TD_s-инвариантным, если $f(-x) \in X$ для любой функции $f \in X$. Заметим, что класс Харди H^p не является TD_s-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$. Пространство $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ является TD_s-инвариантным подпространством пространства $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$, если $t\Omega = \Omega$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Из теоремы 1.9.1 статьи [1] следует, что если $p < 1$, пространство $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ является TD_s-инвариантным и $\Omega \neq \varnothing$, то $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Простейшим примером нетривиального TD_s-инвариантного подпространства пространства $L^p(\mathbb{R})$ при $p < 1$ является пересечение $H^p \cap \overline{H^p}$.

В §6 мы изучаем TD_s-инвариантные подпространства пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. В частности, мы доказываем в этом параграфе теорему 6.2, которая является аналогом теоремы 3.3 для TD_s-инвариантных подпространств. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3, но вместо шкалы $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ мы используем другую шкалу подпространств пространства $L^p(\mathbb{R})$. Это связано с тем, что пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ не обязано быть TD_s-инвариантным при $\lambda \neq 0$. Чтобы доказать теорему 6.2, мы сначала изучаем шкалу TD_s-инвариантных подпространств $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R})$ пространства $L^p(\mathbb{R})$.

2. Теорема Вольфа и её приложения

Большинство результатов этой статьи основаны на следующем утверждении, принадлежащем Вольфу [6], см. также [3].

Теорема 2.1. *Пусть X – собственное TD-инвариантно подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p \leqslant 1$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1 - f(x)|^p - 1)\, dx \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех $f \in X$.

Пусть X – собственное TD-инвариантно подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Подпространство X называется *максимальным* TD-инвариантным подпространством, если для любого TD-инвариантного подпространства Y пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ включение $X \subset Y$ возможно только в двух следующих случаях: $Y = X$, $Y = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.2. *Пусть $0 < p \leqslant 1$. Тогда каждое собственное TD-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ содержится в максимальном TD-инвариантном подпространстве пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\{X_j\}_{j\in J}$ – линейно упорядоченное по включению семейство собственных TD-инвариантных подпространств. Тогда из теоремы 2.1 следует, что неравенство (1) имеет место для всех функций $f \in \bigcup\limits_{j\in J} X_j$. Теперь ясно, что замыкание множества $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$ является *собственным* TD-инвариантным пространством пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Остаётся сослаться на лемму Цорна. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть X – собственное TD-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $p \in (0,+\infty)$. Тогда $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0$ для всех $f \in X \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Предположим, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \neq 0$ для некоторой функции $f \in X \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Можно считать, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$.

Рассмотрим сначала случай $p \in [1,+\infty)$. С каждой функцией $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и положительным числом ε свяжем функцию

$$h_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(t) f\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)\,dt,$$

где интеграл понимается как интеграл Бохнера X-значной функции. Таким образом, $h_\varepsilon \in X$ при всех $\varepsilon > 0$. Заметим, что $h = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, откуда $h \in X$. Следовательно, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, и мы приходим к противоречию.

Пусть теперь $p \in (0,1]$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1 - tf(x)|^p - 1)\,dx \leqslant p\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1 - tf(x)| - 1)\,dx = -p\,t + o(t) \quad \text{при } t \to 0,$$

поэтому функция tf не удовлетворяет условию (1) при достаточно маленьких положительных t, что противоречит теореме 2.1. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть*

$$L^1_0(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0\}.$$

Тогда $L^1_0(\mathbb{R}^n)$ является единственным максимальным TD-инвариантным подпространством пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть X и Y – собственные T-инвариантные подпространства пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p \leqslant 1$. Предположим, что $X + Y = L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $X \cap Y \neq \{0\}$.*

Доказательство. Предположим, что $X \cap Y = \{0\}$. Тогда мы можем определить непрерывный линейный оператор $R : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ такой, что $R(f + g) = f$ при $f \in X$ и $g \in Y$. Заметим, что оператор R коммутирует со сдвигами. Отсюда следует, что существует конечная мера μ на пространстве $\mathbb{R}^n$ такая, что $Rf = \mu * f$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. Случай $p = 1$ хорошо известен, см., например, [4, §5.11.3]. Случай $p < 1$ был исследован Оберлином [5]. Равенство $R^2 = R$ влечёт $\mu * \mu = \mu$, откуда при помощи преобразования Фурье получаем, что либо $\mu = \delta_0$, либо $\mu = 0$, где δ_0 обозначает δ-меру, сосредоточенную в начале координат. Следовательно, либо $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, либо $Y = L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Следствие 2.6. *Пусть X и Y – собственные TD-инвариантные подпространства пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p \leqslant 1$. Предположим, что множество $X + Y$ плотно в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $X + Y = L^p(\mathbb{R}^n)$ и $X \cap Y \neq \{0\}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу следствия 3.5 статьи [3] плотность множества $X + Y$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ влечёт равенство $X + Y = L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Как показывает следующая теорема, в одномерном случае множество всех TD-инвариантных подпространств в $L^p(\mathbb{R}^n)$ крайне бедно при $p \in [1, +\infty)$.

Теорема 2.7. *Пусть X – ненулевое собственное TD-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R})$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда*

а) *$X = H^p$ или $X = \overline{H^p}$ в случае $p > 1$,*

б) *$X = H^1$, или $X = \overline{H^1}$, или $X = L^1_0(\mathbb{R})$ в случае $p = 1$.*

Схема доказательства. Сначала мы докажем, что $X \not\subset \overline{H^p} \Longrightarrow X \supset H^p$.

Шаг 1. Существует ненулевая функция $f \in X$ такая, что $\operatorname{supp} \mathcal{F}f$ является компактным подмножеством интервала $(0, +\infty)$.

Пусть $g \in X \setminus \overline{H^p}$. Тогда $g * \varphi \neq 0$ для некоторой функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi$ – компактное подмножество интервала $(0, +\infty)$. В качестве f мы можем взять функцию $g * \varphi$.

Шаг 2. Существует ненулевая функция $f \in X$ такая, что $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\mathcal{F}f$ – компактное подмножество интервала $(0,+\infty)$.

Возьмём функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем такую, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Пусть f – функция, существование которой утверждается в первом шаге доказательства. Используя аппроксимативную единицу $\{\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\log x}{\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ для мультипликативной группы $(0,+\infty)$, получим семейство $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ функций в пространстве X,

$$f_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{+\infty} f\Big(\frac{x}{t}\Big)\varphi\Big(\frac{\log t}{\varepsilon}\Big)\frac{dt}{t}.$$

Ясно, что $f_\varepsilon \neq 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} f_\varepsilon = f$ в пространстве $L^p(\mathbb{R})$. Положим $\tilde{f}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f_\varepsilon(-x)}$ и $g_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_\varepsilon * f_\varepsilon$. Тогда

$$g_\varepsilon \in X, \quad \mathcal{F}g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}g_\varepsilon = |\mathcal{F}f_\varepsilon|^2 \geqslant 0,$$

множество $\operatorname{supp}\mathcal{F}g_\varepsilon$ компактно, $\operatorname{supp}\mathcal{F}g_\varepsilon \subset (0,+\infty)$ и $g_\varepsilon \neq 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Шаг 3. $X \supset H^p$.

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ множество всех функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f^{(n)}(x) = 0$ при все целых неотрицательных n и k. Пусть $\mathcal{S}_{(0,+\infty)}(\mathbb{R})$ обозначает множество всех функций $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{supp}\mathcal{F}f$ – компактное подмножество интервала $(0,+\infty)$. Достаточно доказать, что $X \supset \mathcal{S}_{(0,+\infty)}(\mathbb{R})$. Пусть f – функция, существование которой утверждается во втором шаге доказательства. Тогда пространство X содержит линейную оболочку семейства $\{f(tx)*\varphi\}_{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),t>0}$, которая в свою очередь содержит множество $\mathcal{S}_{(0,+\infty)}(\mathbb{R})$.

Аналогично можно доказать, что $X \not\subset H^p \Longrightarrow X \supset \overline{H^p}$.

Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что $H^p \cap \overline{H^p} = \{0\}$ и

$$\operatorname{clos}_{L^p}(H^p + \overline{H^p}) = \begin{cases} L^p(\mathbb{R}), & \text{если } 1 < p < +\infty, \\ L^1_0(\mathbb{R}), & \text{если } p = 1. \end{cases}$$

□

Следствие 2.8. *Класс Харди H^p является максимальным TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$ при $p \in (1, +\infty)$.* $\square$

Автору неизвестно, является ли пространство H^p максимальным TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$ при $p \in (0, 1)$.

Легко видеть, что при $n \geqslant 2$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ нет максимальных TD-инвариантных подпространств. Мы увидим в следующем параграфе, что при $p < 1$ существует континуальное семейство максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.9. Результаты этого параграфа, относящиеся к случаю $p \geqslant 1$, должно быть, хорошо известны.

3. Пространства $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ и максимальные TD-инвариантные подпростнарства

Положим $h_{\alpha,\lambda}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{x}{|x|^{\alpha+1}} + \dfrac{\lambda}{|x|^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим через $\mathfrak{Y}_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ линейную оболочку семейства функций $\{h_{\alpha,\lambda}(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}}$. Пусть $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ обозначает замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ множества $\mathfrak{Y}_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Ясно, что пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ является TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$. Легко видеть, что $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ в том и только в том случае, когда $\alpha p < 1$. В частности, $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = \{0\}$ при $p \geqslant 1$. Положим $Y^p_{\alpha}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} Y^p_{\alpha,0}(\mathbb{R})$. В [2] доказано, что $Y^p_{\alpha}(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$.

Определим оператор $T_\alpha : \mathfrak{Y}_{\alpha,0}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ формулой

$$T_\alpha \left(\sum_{\kappa=1}^{N} \mu_\kappa \frac{x - a_\kappa}{|x - a_\kappa|^{\alpha+1}} \right) = \sum_{\kappa=1}^{N} \mu_\kappa \frac{1}{|x - a_\kappa|^{\alpha}}.$$

В [2] доказано, что оператор T_α продолжается до непрерывного оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ в пространство $L^p(\mathbb{R})$, если $\alpha \neq 2k+1$ при $k = 1, 2, \dots$. Этот продолженный оператор мы будем обозначать тем же символом T_α. Пусть J_α обозначает оператор тождественного вложения пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ в пространство $L^p(\mathbb{R})$.

Ясно, что пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ совпадает с замыканием в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ множества $(J_\alpha + \lambda T_\alpha)(Y^p_\alpha(\mathbb{R}))$, если $\alpha \neq 2k+1$ при $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 1$ и $\alpha \neq 2k+1$ при $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$, если число $|\lambda|$ достаточно мало.*

Доказательство. Можно считать, что $p < 1$, поскольку $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = \{0\}$ при $p \geqslant 1$. Положим

$$\|T_\alpha\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|T_\alpha f\|_{L^p} : f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}), \|f\|_{L^p} \leqslant 1\}.$$

Заметим, что если $|\lambda|\|T_\alpha\|_p < 1$, то множество $(J_\alpha + \lambda T_\alpha)(Y^p_\alpha(\mathbb{R}))$ замкнуто в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = (J_\alpha + \lambda T_\alpha)(Y^p_\alpha(\mathbb{R}))$ и пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ изоморфно пространству $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$, если $|\lambda| < \|T_\alpha\|_p^{-1}$. Согласно теореме 2.7 статьи [2] линейные непрерывные функционалы разделяют точки пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. Таким образом, пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ не может быть даже изоморфным пространству $L^p(\mathbb{R})$ при $|\lambda| < \|T_\alpha\|_p^{-1}$. □

Теорема 3.2. *Пусть $1 < \alpha < \frac{2}{1+p}$. Тогда $Y_{\alpha,\lambda_1}(\mathbb{R}) + Y_{\alpha,\lambda_2}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Кроме того, $Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$, если число $|\lambda|$ достаточно велико.*

Доказательство. Из теоремы 8.1 статьи [3] следует, что множество $T_\alpha(Y^p_\alpha(\mathbb{R}))$ всюду плотно в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, см. также [2]. Положим

$$\|T_\alpha f\|^*_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|g\|_{L^p} : T_\alpha g = T_\alpha f\}.$$

Применив теорему 3.7 статьи [3] к пространству $T_\alpha(Y^p_\alpha(\mathbb{R}))$ с p-нормой $\| \ \|^*_{L^p}$, получим равенство $T_\alpha(Y^p_\alpha(\mathbb{R})) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$Y_{\alpha,\lambda_1}(\mathbb{R}) + Y_{\alpha,\lambda_2}(\mathbb{R}) \supset T_\alpha(Y^p_\alpha(\mathbb{R})) = L^p(\mathbb{R}).$$

Докажем теперь второе утверждение. Возьмём функцию $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, не удовлетворяющую условию (1). Например, в качестве такой функции φ можно взять характеристическую функцию промежутка $[0, 1]$. Тогда существует функция $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ такая, что $T_\alpha f = \varphi$. Ясно, что функция $\lambda^{-1}(J_\alpha + \lambda T_\alpha)f = \lambda^{-1}f + \varphi$ не удовлетворяет условию (1) при достаточно больших $|\lambda|$. Следовательно, $Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ при достаточно больших $|\lambda|$ в силу теоремы 2.1. □

Теорема 3.3. *Пусть $0<p<1$. Тогда множество всех максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. Достаточно доказать, что мощность этого множества не меньше мощности континуума. Рассмотрим сначала одномерный случай. Зафиксируем число α такое, что $1 < \alpha < \frac{2}{1+p}$. В силу теоремы 3.1 найдётся положительное число $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, p)$ такое, что $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$, если $|\lambda| < \varepsilon$. Из теоремы 2.2 следует, что пространство $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ содержится в некотором максимальном TD-инвариантном подпространстве W_λ пространства $L^p(\mathbb{R})$. Докажем, что $W_{\lambda_1} \neq W_{\lambda_2}$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $|\lambda_1|, |\lambda_2| < \varepsilon$. Предположим, что $W_{\lambda_1} = W_{\lambda_2}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $|\lambda_1|, |\lambda_2| < \varepsilon$. Тогда $Y_{\alpha,\lambda_1}(\mathbb{R}) + Y_{\alpha,\lambda_2}(\mathbb{R}) \subset W_{\lambda_1} + W_{\lambda_2} = W_{\lambda_1} \neq L^p(\mathbb{R})$, что противоречит теореме 3.2.

Случай $n \geqslant 2$ сведём к случаю $n = 1$. Для этого рассмотрим пространство $Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ таких, что $f(\,\cdot\,, x_2, \ldots, x_n) \in Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$ при почти всех $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ясно, что $Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ является собственным TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, если $|\lambda| < \varepsilon$. Кроме того, $Y_{\alpha,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) + Y_{\alpha,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $|\lambda_1|, |\lambda_2| < \varepsilon$. Теперь мы можем почти дословно повторить заключительные рассуждения первой части доказательства. □

4. Циклические функции

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Функцию f будем называть *p-циклической*, если порождённое этой функцией TD-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L^p(\mathbb{R}^n)$. Множество всех p-циклических функций обозначим через $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Положим $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что множество $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ совпадает с объединением всех собственных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. В частности, $\mathcal{N}_1(\mathbb{R}^n) = L^1_0(\mathbb{R}^n)$, см. следствие 2.4.

Теорема 4.1. *Множество $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p \in (0, +\infty)$ и $n \geqslant 1$. Кроме того, если $p \leqslant 1$ или $n = 1$, то множество $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ открыто в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Плотность множества $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ вытекает из теоремы 2.3. Докажем, что множество $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ есть множество типа G_δ. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\mathcal{L}_f$ линейную оболочку семейства функций $\{f(tx+a)\}_{a\in\mathbb{R}^n,\, t>0}$. Пусть φ обозначает характеристическую функцию единичного куба $Q \stackrel{\text{def}}{=} [0,1]^n$. Легко видеть, что $\varphi \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Положим $G_k \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in L^p(\mathbb{R}^n) : \operatorname{dist}_{L^p}(\varphi, \mathcal{L}_g) < k^{-1}\}$. Ясно, что G_k – открытое подмножество пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $k \geqslant 1$ и

$$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Следовательно, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ – множество типа G_δ. Докажем теперь, что $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) = G_1$ при $p \leqslant 1$. Пусть $g \in G_1$. Тогда $\|\varphi - f\|_{L^p} < 1$ для некоторой функция $f \in \mathcal{L}_g$, откуда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1-f(x)|^p - 1)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1-\varphi(x)|^p - 1)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) - f(x)|^p\,dx \\ = -1 + \|\varphi - f\|_{L^p}^p < 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1 множество $\mathcal{L}_g$ всюду плотно в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, т.е. $g \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, множество $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ открыто, если $p \leqslant 1$.

Остаётся доказать открытость множества $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ при $p \in (1,+\infty)$. Это мгновенно вытекает из теоремы 2.7. □

Следствие 4.2. *Имеет место равенство* $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) \cap (f - \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)) \neq \varnothing$ в силу теоремы Бэра о категориях. □

Следствие 4.3. *Множество* $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ *есть множество первой категории в пространстве* $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Кроме того, если* $p \leqslant 1$ *или* $n = 1$, *то множество* $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ *замкнуто.* □

Теорема 4.4. *Пусть* $p \in (0,1) \cap (1,+\infty)$. *Тогда* $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Положим

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}, \quad \Omega_- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\}.$$

Ясно, что $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ и $L^p_{\Omega_-}(\mathbb{R}^n)$ – собственные TD-инвариантные подпространства пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ и $L^p_{\Omega_-}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$. При $p \neq 1$ имеет место равенство $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) + L^p_{\Omega_-}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. В случае $p > 1$ это равенство следует из непрерывности проектора Рисса в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ при $p \in (1, +\infty)$. Случай $p < 1$ может быть найден в [1, теорема 9.1 главы 1]. Остаётся заметить, что $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) \supset L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) + L^p_{\Omega_-}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \neq 1$. □

Заметим, что $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) \not\ni 0$. Автору неизвестно, когда имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Из теоремы 2.7 следует, что это равенство справедливо, если $n = 1$ и $p \in (1, +\infty)$. Нетрудно также доказать, что оно имеет место при $p = 2$ и $n \geqslant 1$. С другой стороны, из следствия 2.4 вытекает, что при $p = 1$ равенство (2) не выполняется ни при каком $n \geqslant 1$.

Пусть $p \leqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$ пересечение всех максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.5. *Пусть $p \leqslant 1$. Тогда*

$$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$. В силу теоремы 2.2 функция g принадлежит некоторому максимальному TD-инвариантному подпространству X. Ясно, что $f + g \notin X$. Следовательно, $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$. Итак, мы доказали, что $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $h \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует максимальное TD-инвариантное подпространство X, не содержащее функцию h. Пусть $\mathcal{L}_h$ обозначает то же, что в доказательстве теоремы 4.1. Из максимальности пространства X вытекает, что $(\mathcal{L}_h + X) \cap \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) \neq \varnothing$. Следовательно, существуют функция $\varphi \in X$, последовательность $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ ненулевых комплексных чисел, последовательность $\{t_j\}_{j=1}^N$ положительных чисел и последовательность $\{a_j\}_{j=1}^N$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что

$\varphi(x) + \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j h(t_j x + a_j) \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$. Уменьшив, если необходимо, число N, мы можем считать, что $\varphi(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j h(t_j x + a_j) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $m < N$. Из равенства

$$\lambda_N h(t_N x + a_N) = \Big(\varphi(x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j h(t_j x + a_j)\Big) + \Big(-\varphi(x) - \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j h(t_j x + a_j)\Big)$$

следует, что $\lambda_N h(t_N x + a_N) \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$, откуда $h \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Из теоремы 4.5 следует, что при $p \leqslant 1$ равенство (2) равносильно равенству $\mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Ясно, что $\mathcal{R}_1(\mathbb{R}^n) = L^1_0(\mathbb{R}^n)$. Автору неизвестно, выполняется ли равенство $\mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ при $p < 1$.

Отметим, что пересечение конечного семейства максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ заведомо состоит не только из нуля, если $p \leqslant 1$.

Теорема 4.6. *Пусть $\{X_j\}_{j=1}^N$ – конечная последовательность максимальных TD-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p < 1$. Тогда $Y \cap \bigcap\limits_{j=1}^{N} X_j \neq \{0\}$ для любого ненулевого TD-инвариантного подпространства пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по N. Случай $N = 0$ тривиален. Предположим, что требуемое утверждение доказано для $N - 1$. Положим $Z \overset{\text{def}}{=} Y \cap \bigcap\limits_{j=1}^{N-1} X_j$. Тогда $Z \neq \{0\}$ по индукционному предположения. Докажем, что $Z \cap X_N \neq \{0\}$. Если $Z \subset X_N$, то доказываемое утверждение очевидно. Если же $Z \not\subset X_N$, то множество $Z + X_N$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$, и остаётся сослаться на следствие 2.6. $\square$

5. О множествах уровня нециклических функций

Мы говорим, что функция $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ имеет нетривиальное множество уровня, если существует ненулевое комплексное число c такое, что мера Лебега множества $[f = c] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ положительна. Заметим, что из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{0<p<p_0} L^p(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что функция* f *имеет нетривиальное множество уровня. Тогда* $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ *при всех достаточно малых* p.

Доказательство. Ясно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \log|1-f(x)|\,dx = \lim_{p\to 0+} \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|1-f(x)|^p - 1)\,dx. \tag{3}$$

Не умаляя общности, можно считать, что множество $[f=1]$ имеет положительную меру Лебега. Тогда левая часть равенства (3) есть $-\infty$. Следовательно, функция f не удовлетворяет условию (1) при достаточно малых $p>0$. Остаётся сослаться на теорему 2.1. □

Замечание 5.2. Автору неизвестно, обязана ли функция f в условиях теоремы 5.1 принадлежать множеству $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p \in (0, \min(p_0, 1))$.

Замечание 5.3. Нетрудно убедиться в том, что любая функция f вида $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$, где $g \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R})$, $h \in L^p(\mathbb{R})$, принадлежит множеству $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, при $n=2$ (а значит, и при $n>2$) существует ненулевая функция $f \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ такая, что множество $[f=0]$ имеет бесконечную меру Лебега. Автору неизвестно, возможно ли такое при $n=1$. Неизвестно также, существует ли функция $f \in \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n)$ такая, что мера Лебега множества $[f=0]$ конечна и не равна нулю.

Пусть $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\mathcal{L}_f$ линейную оболочку семейства функций $\{f(tx+a)\}_{a\in\mathbb{R}^n,\,t>0}$. Обозначим через $L^p[f]$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ множества $\mathcal{L}_f \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что пространство $L^p[f]$ является TD-инвариантным. Заметим, что $Y_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}) = L^p[h_{\alpha,\lambda}]$.

Теперь мы можем расширить понятие p-циклической функции. Функцию $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ будем называть *p-циклической*, если $L^p[f] = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Оставшаяся часть параграфа посвящена некоторым усилениям теоремы 5.1, которые связаны с этим обобщением понятия p-циклической функции.

Обозначим через $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^n)$ множество всех полиномов от n переменных степени не выше N. Пусть $M^0(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество всех дискретных мер в пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющих конечное число нагрузок. Обозначим через $M^0_N(\mathbb{R}^n)$ множество всех мер из пространства $M^0(\mathbb{R}^n)$, ортогональных пространству $\mathcal{P}_{N-1}(\mathbb{R}^n)$. Легко видеть, что мера $\mu \in M^0(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $M^0_N(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, когда $(\mathcal{F}\mu)(x) = \mathcal{O}(|x|^N)$. Отсюда следует, что $\mu * \nu \in M^0_{k+l}(\mathbb{R}^n)$, если $\mu \in M^0_k(\mathbb{R}^n)$ и $\nu \in M^0_l(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $p \in (0,1)$. Функцию $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ будем называть p-регулярной, если $f \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$ и существует целое положительное число N такое, что $f * \mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для любой меры $\mu \in M^0_N(\mathbb{R}^n)$. Функцию $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ будем называть регулярной, если существует показатель $p_0 \in (0,1)$ такой, что f является p-регулярной при всех $p \in (0, p_0)$.

Теорема 5.4. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p < 1$. Предположим, что функция f является p-регулярной и не удовлетворяет условию* (1). *Тогда $L^p[f] = L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 5.5. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $p \in (0,1]$. Тогда $||1+a|^p - 1| \leqslant \min(|a|, |a|^p)$.*

Доказательство. Неравенство $||1+a|^p-1| \leqslant |a|^p$ очевидно. Остаётся доказать, что $||1+a|^p-1| \leqslant |a|$. Имеем $|1+a|^p-1 \leqslant (1+|a|)^p-1 \leqslant |a|$ и $1-|1+a|^p \leqslant 1-(1-|a|)^p \leqslant |a|$, если $|a| \leqslant 1$. □

Следствие 5.6. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (0,1)$. Тогда*[1]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big||1+f(x)|^p - 1\big|\,dx \leqslant \int\limits_{[|f|\leqslant 1]} |f(x)|\,dx + \int\limits_{[|f|>1]} |f(x)|^p\,dx.$$

Лемма 5.7. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\int\limits_{[|f|>\varepsilon]} |f(x)|^p\,dx = o(\varepsilon^{p-1}) \quad \text{при } \varepsilon \to 0+$$

при всех $p \in (0,1)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\operatorname{mes}[|f| > \varepsilon] = o(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0+$ и воспользоваться неравенством Гёльдера. □

[1]Здесь и далее символами $[h \leqslant c]$ и $[h > c]$ мы обозначаем соответствующие множества Лебега вещественной измеримой функции h

Лемма 5.8. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ *при* $p \in (0,1)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big||1 + Nf(x)|^p - 1\big|\, dx = 0.$$

Доказательство. В силу следствия 5.6 достаточно доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{[N|f|\leqslant 1]} N|f(x)|\, dx = 0$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{[N|f|>1]} N^p|f(x)|^p\, dx = 0.$$

Первое равенство очевидно, поскольку $\int\limits_{[|f|\leqslant 1]} |f(x)|\, dx < +\infty$. Из леммы 5.7 следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{[N\geqslant N|f|>1]} N^p|f(x)|^p\, dx = 0.$$

Остаётся заметить, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{[|f|>1]} N^p|f(x)|^p\, dx = 0,$$

поскольку $\int\limits_{[|f|>1]} |f(x)|^p\, dx < +\infty$. □

Лемма 5.9. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$, *где* $0 < p < 1$. *Предположим, что функция* f *является* p*-регулярной и не удовлетворяет условию* (1). *Тогда существует мера* $\mu \in M_1^0(\mathbb{R}^n)$ *такая, что функция* $\mu * f$ *тоже не удовлетворяет условию* (1).

Доказательство. Лемма 5.8 позволяет нам провести доказательство аналогично доказательству следствия 8.6 статьи [3]. □

Следствие 5.10. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда для каждого натурального числа* N *найдётся мера* $\mu \in M_N^0(\mathbb{R}^n)$ *такая, что функция* $\mu * f$ *не удовлетворяет условию* (1).

Доказательство легко получается индукцией по N, поскольку $\mu * \nu \in M_{N+1}^0$ всякий раз, когда $\mu \in M_N^0$ и $\nu \in M_1^0$. □

Доказательство теоремы 5.4. В силу следствия 5.10 теорема сводится к случаю $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, что позволяет применить теорему 2.1. □

Из теоремы 5.4 легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.11. *Пусть f – регулярная функция в пространстве $L^0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \log|1 - f(x)|\,dx < 0.$$

Тогда $L^p[f] = L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех достаточно малых $p > 0$.

Доказательство. Ясно, что для функции f имеет место равенство (3). Следовательно, функция f не удовлетворяет условию (1) при всех достаточно малых $p > 0$. Остаётся воспользоваться теоремой 5.4. □

Следствие 5.12. *Пусть f – регулярная функция в пространстве $L^0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что f имеет нетривиальное множество уровня. Тогда $L^p[f] = L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех достаточно малых $p > 0$.*

Доказательство. Пусть $f = c$ на множестве положительной меры Лебега, где $c \neq 0$. Можно считать, что $c = 1$. Тогда результат вытекает из теоремы 5.11. □

6. Пространства $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R})$ и максимальные TD_s-инвариантные подпространства

Напомним, что TD-инвариантное подпространство X пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ называется TD_s-инвариантным, если $f(-x) \in X$ для любой функции $f \in X$. Большинство полученных выше результатов, относящихся к TD-инвариантным подпространствам, легко переносятся на случай TD_s-инвариантных подпространств. В этом параграфе мы кратко остановимся только на отличиях.

Из результатов §2 только теорема 2.7 не переносится дословно на случай TD_s-инвариантных подпространств. Из теоремы 2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть X – собственное TD_s-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R})$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда*

a) $X = \{0\}$ *в случае* $p > 1$,

б) $X = \{0\}$ *или* $X = L^1_0(\mathbb{R})$ *в случае* $p = 1$.

Перейдём теперь к аналогу теоремы 3.3 для TD_s-инвариантных подпространств.

Теорема 6.2. *Пусть* $0 < p < 1$. *Тогда множество всех максимальных* TD_s*-инвариантных подпространств пространства* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *имеет мощность континуума.*

Доказательство теоремы 3.3 опиралось на некоторые свойства шкалы пространств $Y^p_{\alpha,\lambda}(\mathbb{R})$. Чтобы доказать теорему 6.2, мы определим другую шкалу подпространств пространства $L^p(\mathbb{R})$.

Положим

$$g_{\alpha,n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x(\log|x|)^n}{|x|^{\alpha+1}}, \quad \text{где} \quad \alpha > 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{и} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Легко видеть, что функция $g_{\alpha,n}$ является p-регулярной, если $0 < p < 1/\alpha$. Положим $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} L^p[g_{\alpha,n}]$. Ясно, что пространство $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R})$ является TD_s-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$. Отметим ещё, что $Z^p_{\alpha,0}(\mathbb{R}) = Y^p_\alpha(\mathbb{R})$.

Лемма 6.3. *Имеет место включение* $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R}) \subset Z^p_{\alpha,n+1}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Возьмём меру $\mu \in M^0(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp}\mu \subset (0,+\infty)$ и

$$\int_{\mathbb{R}} (\log t)^k \, d\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad k \neq 1, \\ 1, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Требуемое включение следует из тождества $(n+1)g_{\alpha,n}(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha g_{\alpha,n+1}(tx)\, d\mu(t)$. □

Лемма 6.4. *Пусть* $\alpha > 1$ *и* $0 < p < 1/\alpha$. *Тогда существует неотрицательное целое число* n *такое, что* $Z^p_{\alpha,n}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$.

Схема доказательства. Зафиксируем число δ такое, что $\alpha - 1 < \delta < p^{-1} - 1$. Положим $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min(1, |x|^\delta)$. Рассмотрим весовое L^1-пространство $L^1(\mathbb{R},\omega)$. Заметим, что $L^1(\mathbb{R},\omega) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^p(\mathbb{R})$. Замыкание в пространстве $L^1(\mathbb{R},\omega)$ линейной оболочки семейства $\{g_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ совпадает с множеством всех нечётных функций, принадлежащих пространству $L^1(\mathbb{R},\omega)$. В частности, этому замыканию принадлежит функция $\xi \stackrel{\text{def}}{=} 1\!\!1_{[0,1]} - 1\!\!1_{[-1,0]}$, где $1\!\!1_E$ обозначает характеристическую функцию множества E. Заметим, что условие (1) не выполняется для функции $f=\xi$ Следовательно, оно не будет выполняться также для некоторой функции f, принадлежащей линейной оболочке семейства $\{g_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Это позволяет сослаться на теорему 5.4. □

Пусть A – подмножество интервала $(1,1/p)$. Обозначим через $Y^p_A(\mathbb{R})$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ линейной оболочки семейства подпространств $\{Y^p_\alpha(\mathbb{R})\}_{\alpha\in A}$. Ясно, что $Y^p_A(\mathbb{R})$ является TD-инвариантным подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$.

Лемма 6.5. *Пусть $A\subset(1,1/p)$. Предположим, что множество A имеет предельную точку, принадлежащую интервалу $(1,1/p)$. Тогда множество A содержит конечное множество A_0 такое, что $Y^p_{A_0}(\mathbb{R})=\sum\limits_{\alpha\in A_0}Y^p_\alpha(\mathbb{R})=L^p(\mathbb{R})$.*

Схема доказательства. В силу замечания 3.4 статьи [3] достаточно доказать, что $Y^p_A(\mathbb{R})=L^p(\mathbb{R})$. Пусть α_0 – предельная точка множества A, принадлежащая интервалу $(1,1/p)$. Нетрудно доказать, что $Y^p_A(\mathbb{R})\supset Z^p_{\alpha_0,n}(\mathbb{R})$ при всех $n\in\mathbb{Z}_+$. Остаётся воспользоваться леммой 6.4. □

Зафиксируем невырожденный замкнутый промежуток $Q\subset(1,1/p)$. Обозначим через $\mathcal{A}^p(Q)$ множество всех конечных подмножеств A промежутка Q таких, что $Y^p_A(\mathbb{R})\neq L^p(\mathbb{R}^n)$. Как уже отмечалось в §3, $Y^p_\alpha(\mathbb{R})\neq L^p(\mathbb{R}^n)$ при любом $\alpha>1$. Отсюда следует, что каждое одноэлементное подмножества множества Q принадлежит множеству $\mathcal{A}^p(Q)$. Введём в множестве $A\in\mathcal{A}^p(Q)$ порядок, положив $A\leqslant B$, если $A\subset B$. Обозначим через $\mathcal{A}^p_M(Q)$ множество всех максимальных элементов упорядоченного множества $\mathcal{A}^p(Q)$.

Лемма 6.6. *Множество $\mathcal{A}^p_M(Q)$ имеет мощность континуума. Для любых множеств $A,B\in\mathcal{A}^p_M(Q)$ имеет место равенство $Y^p_A(\mathbb{R})+Y^p_B(\mathbb{R})=L^p(\mathbb{R})$, если $A\neq B$.*

Доказательство. Докажем, что каждая точка $\alpha\in Q$ принадлежит хотя бы одному множеству $A\in\mathcal{A}^p_M(Q)$. Действительно, в противном случае нашлась бы последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ различных точек множества Q такая, что $Y^p_{A_n}\neq L^p(\mathbb{R})$ при всех натуральных n, где $A_n=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$. Но этого не может быть в силу леммы 6.5. Следовательно, $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}^p_M(Q)} A = Q$, откуда вытекает континуальность множества $\mathcal{A}^p_M(Q)$.

Пусть $A, B \in \mathcal{A}^p_M(Q)$, причём $A \neq B$. Ясно, что замыкание множества $Y^p_A(\mathbb{R}) + Y^p_B(\mathbb{R})$ совпадает с пространством $Y^p_{A\cup B}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$. Равенство $Y^p_A(\mathbb{R}) + Y^p_B(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ получается теперь из следствия 2.6. □

Лемма 6.6 позволяет нам провести доказательство теоремы 6.2 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.3.

Доказательство теоремы 6.2. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть $A \in \mathcal{A}^p_M(Q)$. Обозначим через W_A какое-нибудь максимальное TD_s-инвариантное подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, содержащее Y^p_A. Тогда $\{W_A\}_{A\in\mathcal{A}^p_M(Q)}$ – континуальное семейство попарно различных максимальных TD_s-инвариантных подпространств. Многомерный случай сводится к одномерному так же, как и в доказательстве теоремы 3.3. □

Рассмотрим теперь аналог теоремы 4.4 для TD_s-инвариантных подпространств. Пусть $\mathcal{N}^s_p(\mathbb{R}^n)$ обозначает объединение всех собственных TD_s-инвариантных подпространств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.7. *Если $p \in (0,1)$, то $\mathcal{N}^s_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}^s_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех $n \geqslant 1$. Если $p \in (1,+\infty)$, то $\mathcal{N}^s_p(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}^s_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ при всех $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть $p \in (0,1)$. Рассмотрим сначала одномерный случай. Возьмём множество $A \in \mathcal{A}^p_M(Q)$ и число $\alpha \in Q\setminus A$. Тогда $Y^p_A(\mathbb{R}) + Y^p_\alpha(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$. Остаётся заметить, что $Y^p_A(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}^s_p(\mathbb{R})$ и $Y^p_\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}^s_p(\mathbb{R})$. Перейти к многомерному случаю можно точно так же, как в доказательстве теоремы 3.3. Пусть $p \in (1,+\infty)$. Положим $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1x_2 > 0\}$, $\Omega_- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1x_2 < 0\}$. Требуемое утверждение вытекает теперь из тождества $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) + L^p_{\Omega_-}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Пусть X – подпространство пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Подпространство X будем называть *TD^*-инвариантным*, если оно TD-инвариантно и $\overline{f} \in X$ для любой функции $f \in X$. Подпространство X будем называть *TD^*_s-инвариантным*, если оно одновременно TD_s-инвариантно и TD^*-инвариантно.

Все результаты статьи, касающиеся TD-инвариантных и TD_s-инвариантных подпространств, переносятся естественным образом на TD^*-инвариантные и TD_s^*-инвариантные подпространства.

Литература

1. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* — Lect. Notes Math. **864** (1981), 1–89.
2. А. Б. Александров, *Аппроксимация ядрами М. Рисса в пространстве L^p при $p < 1$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **315** (2004), 5–38.
3. А. Б. Александров, П. П. Каргаев, *Классы Харди гармонических в полупространстве фукнций.* — Алгебра и анализ **5** (1993), no. 2, 1–73.
4. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ.* Мир, Москва (1969).
5. D. M. Oberlin, *Translation-invariant operators on $L^p(G)$, $0 < p < 1$. II.* — Canad. J. Math. **29** (1977), no. 3, 626–630.
6. Th. H. Wolff, *Counterexamples with harmonic gradients in R^3.* — Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein (Princeton, NJ, 1991), 321–384, Princeton Math. Ser., 42, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995).

Aleksandrov A. B. On translation and dilation invariant subspaces of $L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$.

We prove that each translation and dilation invariant subspace $X \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $X \neq L^p(\mathbb{R}^n)$, is contained in a maximal translation and dilation invariant subspace of $L^p(\mathbb{R}^n)$. Moreover, we prove that the set of all maximal translation and dilation invariant subspaces of $L^p(\mathbb{R}^n)$ has the power of the continuum.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 2 апреля 2007 г.,