Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 344, 2007 г.

А. Л. Чистов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ДОМИНАНТНОГО МОРФИЗМА В НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ. III

Введение

Данная статья продолжает работы [10] и [11] и является их третьей частью. Здесь основным результатом является теорема 1. Эта часть содержит леммы, которые необходимы для доказательства теоремы 1. Мы надеемся завершить данную статью в следующей, четвертой части. В обзоре результатов, приведенном в этом введении, имеются ссылки на леммы и разделы, отсутствующие здесь. Они относятся к следующей части статьи, которая уже подготовлена. В четвертой части мы продолжим нумерацию лемм и разделов из третьей части.

Для удобства читателя мы приводим бо́льшую часть введения из работы [11]. Мы исследуем общие рациональные морфизмы в нулевой характеристике с алгоритмической точки зрения. Все подготавливается для следующей статьи, где строится алгоритм для первой теоремы Бертини. Последний алгоритм будет использовать теорему 1, ее формулировку см. в конце введения.

В настоящей статье, аналогично работе [11], мы используем новый метод для решения систем полиномиальных уравнений и неравенств с квадратами абсолютных величин (см. [13]) в случае, когда эти системы содержат общие линейные формы (и даже общие однородные многочлены заданных степеней; но в этой статье нам требуется случай только линейных форм). Более подробное изложение см. во введении к работе [10]. В полной общности этот метод будет рассматриваться в статье, посвященной первой теореме Бертини.

Результаты настоящей работы фактически основываются на этом методе (хотя мы и не описываем его формально отдельно от рассматриваемых задач). Он применяется в разделах 3 и 4. Также мы хотели бы подчеркнуть здесь важность для настоящей статьи основной теоремы работы [6] и ее следствия – теоремы 2 работы [10]. Кроме того, теперь мы используем работы [9] (исправленную формулировку леммы 2 из работы [9] см. в [10]), [10] и другие наши предыдущие статьи.

Прежде чем переходить к точным формулировкам, отметим одно небольшое *исправление в доказательстве утверждения (с) теоремы 1 работы* [10]. Морфизм $p'_y : W' \to p_y(W')$ не обязательно является бирациональным, и следует удалить замечание 5 из [10]. Однако фактически оно и не нужно для доказательства п. (с) (замечание 5 из работы [10] нигде не применяется). Последнее доказательство остается справедливым без требования бирациональности морфизма p'_y (однако p'_y является конечным). Следует только показать, как найти $\deg W'$. Степень $\deg(p'_y) = \deg(p'_y \circ p')/\deg p'$, где $\deg p'$ известна и $\deg(p'_y \circ p')$ вычисляется аналогично $\deg p'$ с применением утверждения (b) теоремы 1 из работы [10] к морфизму $p'_y \circ p$ (вместо p). Мы имеем $\deg W' = \deg(p'_y) \deg p_y(W')$, поскольку $y \notin W'$, и $\deg p_y(W')$ вычисляется рекурсивно при помощи алгоритма из п. (с) (для $r-1$ вместо r). Таким образом, можно вычислить $\deg W'$ и доказать п. (с).

Пусть k – поле нулевой характеристики с алгебраическим замыканием $\overline{k}$. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ – независимые переменные над k. Обозначим через $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, $n \geqslant 0$, проективное пространство над полем $\overline{k}$ с координатами $X_0, \ldots, X_n$. Мы будем предполагать, что $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ определено над k. Для произвольных однородных многочленов $g_1, \ldots, g_m \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$ будем обозначать через $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_m)$ множество всех общих нулей многочленов $g_1, \ldots, g_m$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Аналогичные обозначения будут использоваться для множеств нулей идеалов и многочленов с другими полями коэффициентов в аффинных и проективных пространствах (это будет видно из контекста). Для поля k и семейства элементов $a' = \{a'_i\}_{i \in I}$ из расширения поля k мы будем обозначать через $k(a')$ (соответственно $k[a']$) поле (соответственно кольцо), порожденное над k всеми элементами a'_i, $i \in I$. Для двух (или более) семейств a', a'' обозначения $k(a', a'')$, $k[a', a'']$ имеют аналогичный смысл. Теперь предположим, что a' является семейством алгебраически независимых переменных над k и $f \in k[a']$. Предположим, что $b' = \{b'_i\}_{i \in I}$ – семейство элементов из k с теми же самыми индексами, что и a'. Тогда мы будем обозначать через $f(b')$ значение f при $a'_i = b'_i$, $i \in I$, а также использовать другие аналогичные обозначения.

В алгоритмической части статьи мы будем предполагать, что k является конечнопорожденным расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Поле k снабжено вещественной структурой, если задано вложение $k \to R[\sqrt{-1}]$, где R – вещественное упорядоченное поле.

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений от n переменных и фиксированного числа неравенств с квадратами абсолютных величин с коэффициентами из поля k. Пусть степени уравнений и неравенств меньше d (см. подробности в [13], а также в [10, раздел 1]). Тогда (см. [13, предложение 1]) можно построить вещественную структуру на k и выяснить за полиномиальное время от d^n и длины записи входных данных, имеет ли данная система решение в $\mathbb{A}^n(\overline{k})$ относительно этой вещественной структуры. Если такое решение существует, его можно построить за то же самое время. Координаты решения принадлежат конечному расширению поля k. Это конечное расширение строится и задается примитивным элементом и его минимальным многочленом. Мы будем использовать это предложение много раз без специальной ссылки на него.

Поскольку k – произвольное конечнопорожденное поле над $\mathbb{Q}$, этот результат справедлив также в случае, если заменить поле коэффициентов k на его конечное расширение $k_i = k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ для фиксированного i, где $\varepsilon_j > 0$ для $j \geqslant 1$ является бесконечно малой величиной относительно поля k_{j-1}, см. ниже. Теорема 2 работы [10], которая основывается на статье [6], усиливает этот результат. Фактически в этой статье большая часть систем полиномиальных уравнений и неравенств решается при помощи теоремы 2 работы [10].

Пусть $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – проективное алгебраическое многообразие, которое является множеством всех общих нулей семейства однородных многочленов от $n+1$ переменных степени меньше d с коэффициентами из поля k. Пусть W является определенной над k и неприводимой над k компонентой многообразия V и W задано своей точкой, которая принадлежит только одной неприводимой над k компоненте многообразия V (подробности см. в [9, теорема 1], а также ниже). Пусть $e_0, \dots, e_r \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены, такие, что $\deg e_i = d' \geqslant 1$ для всякого ненулевого e_i, $0 \leqslant i \leqslant r$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\dim W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) < \dim W$. Пусть

$$p : W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to \mathbb{P}^r, \quad (X_0 : \dots : X_n) \mapsto (e_0 : \dots : e_r), \qquad (1)$$

– регулярный морфизм. Положим $W' = \overline{p(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r))}$ (здесь и ниже в аналогичных ситуациях черта обозначает замыкание относительно топологии Зариского). Тогда W' – неприводимое над k замкнутое подмногообразие пространства $\mathbb{P}^r(\overline{k})$. Заметим, что можно рассматривать рациональный морфизм $W \to \mathbb{P}^r(\overline{k})$ проективных алгебраических многообразий, заданный по тому же самому правилу, но чтобы быть более точными, в дальнейшем мы будем иметь дело с регулярными морфизмами квазипроективных алгебраических многообразий. Обозначим через

$$p' : W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to W'$$

доминантный морфизм, индуцированный морфизмом p. Предположим, что $\dim W = n - s$ и $\dim W' = n - \sigma$ (можно вычислить s и σ, используя алгоритм из [5], см. ниже). Следовательно, $0 \leqslant s \leqslant \sigma \leqslant n$. Пусть $v_j = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} v_{j,i} X_i$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, – общие линейные формы относительно $X_0, \dots, X_n$, т.е. степень трансцендентности семейства всех коэффициентов $v_{j,i}$ над k равна $(n+2)(n+1)$. По определению $v = (v_{s+1}, \dots, v_\sigma)$, $\overline{v} = (v_0, \dots, v_{n+1})$ и k_v (соответственно $k_{\overline{v}}$) – поле, порожденное над k элементами $v_{j,i}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (соответственно $0 \leqslant j \leqslant n+1$, $0 \leqslant i \leqslant n$). Обозначим через $\widetilde{v}$ семейство коэффициентов $v_{j,i}$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, $0 \leqslant i \leqslant n$, так что $k_{\overline{v}} = k(\widetilde{v})$. Теперь p и p' индуцируют морфизмы

$$\begin{aligned} p_v &: (W \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma)) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to \mathbb{P}^r(\overline{k_v}), \\ p'_v &: (W \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma)) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to W'(k_v), \end{aligned}$$

определенные над k_v. Для удобства обозначений положим $q_v = p'_v$. Таким образом, q_v является доминантным морфизмом. Имеем $\dim W \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) = n - \sigma$. Мы вычисляем (см. теорему 1 ниже) степень $\deg p'_v$.

Применим теорему 1 из работы [10] к морфизму p'_v (вместо p'), заменяя в формулировке этой теоремы поле k на k_v. Обозначим через $\mathcal{V} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k_v})$ непустое открытое в топологии Зариского подмножество всех наборов из $(n - \sigma + 1)$ линейных форм из утверждения (d) теоремы 1 из[10], примененной к p'_v. *Положим* $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{V} \cap \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$. Тогда, очевидно, $\mathcal{U}'_0$ является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в

$\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$. Следовательно, $L' \in \mathcal{U}'_0$ в том и только в том случае, если выполняются условия (27)–(30) (см. раздел 3) с v и основным полем k_v вместо λ и k соответственно. Множество $\mathcal{U}'_0$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ и, следовательно, определено над k. Мы построим элемент из $\mathcal{U}'_0$. Более точно, ниже мы определим открытые в топологии Зарисского множества $\mathcal{U}'''_{n+1} \subset \mathcal{U}'''_0 \subset \mathcal{U}''_0 \subset \mathcal{U}'_0$, относящиеся к морфизму p, и построим элемент из $\mathcal{U}'''_0$ за полиномиальное время (см. теорему 1).

Пусть K – поле, содержащее алгебраически независимые над k элементы $u_{j,w}$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, $0 \leqslant w \leqslant r$, и такое, что K и $k_{\overline{v}}$ являются линейно раздельными над k. Обозначим через u семейство элементов $u_{j,w}$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, $0 \leqslant w \leqslant r$. Пусть $l'_{j,w} \in \overline{k}$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, $0 \leqslant w \leqslant r$. Пусть $L'_j = l'_{j,0}X_0 + \dots + l'_{j,r}X_r$ (соответственно $U_j = u_{j,0}X_0 + \dots + u_{j,r}X_r$), $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, – линейные формы из $\overline{k}[X_0, \dots, X_r]$ (соответственно $K[X_0, \dots, X_n]$). Положим $e'_j = L'_j(e_0, \dots, e_r)$ (соответственно $u_j = U_j(e_0, \dots, e_r)$), $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. Положим далее $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n)$ (соответственно $U = (U_0, U_{\sigma+1}, \dots, U_n)$). В дальнейшем мы будем определять некоторые объекты, соответствующие L'. Аналогичные объекты, соответствующие U, определяются при помощи замены поля k на K.

Пусть L' – произвольное, как выше (но, возможно, $L' \notin \mathcal{U}'_0$). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что линейные формы $L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n$ являются линейно независимыми. Мы будем рассматривать морфизмы

$$p_{L'} : W \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \dots, e'_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k}), \tag{2}$$

$$p_{v,L'} : W \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \dots, e'_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k_v}), \tag{3}$$

определенные над полями k и k_v соответственно и заданные одной и той же формулой

$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{\sigma+1} : \ldots : e'_n).$$

Для всякого $\sigma \leqslant i \leqslant n$ обозначим через

- $W_i(L')$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$, таких, что $\dim E = n - i + \sigma - s$ и ограничение $p_{L'}|_E : E \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \to$

$\mathcal{Z}(X_1, \dots, X_{i-\sigma})$ является доминантным (здесь $\mathcal{Z}(X_1, \dots, X_{i-\sigma}) \subset \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k})$ – линейное подпространство).

Следовательно, $E \not\subset \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n)$. Морфизм $p_{L'}|_{W_i(L')} : W_i(L') \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \to \mathcal{Z}(X_1, \dots, X_{i-\sigma})$ является доминантным, если $W_i(L') \neq \emptyset$ (здесь нельзя исключить, что $W_i(L')$ пусто для некоторого i). В частности, $W_\sigma(L') = W$ в том и только в том случае, если морфизм $p_{L'}$ является доминантным. Заметим, что $W_i(L')$ зависит только от $L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i$. Так что мы будем обозначать также $W_i(L') = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Морфизм $p_{L'}|_{W_i(L')}$ является доминантным или $W_i(L') = \emptyset$, для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно,

$$\dim W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i) \leqslant n - i + \sigma - s \tag{4}$$

и

$$\dim W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \cap \mathcal{Z}(e'_0) \leqslant \sigma - s - 1. \tag{5}$$

Обозначим для краткости $L'_{n+1} = L'_0$, $e'_{n+1} = e'_0$, $W_{n+1}(L') = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{n+1}) = \emptyset$. Тогда

$$W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i) = W_i(L') \cup W_i^{(1)}(L') \cup W_i^{(2)}(L') \cup W_i^{(3)}(L'), \qquad \sigma + 1 \leqslant i \leqslant n + 1,$$

где

- $W_i^{(1)}(L')$ – объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$, таких, что E является неприводимой компонентой $W \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \dots, e'_n)$;
- $W_i^{(2)}(L')$ – объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$, таких, что E содержится в $W_j^{(1)}(L')$ для некоторого $s \leqslant j < i$;
- $W_i^{(3)}(L')$ – объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$, таких, что $E \not\subset \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \dots, e'_n)$ и $\dim \overline{p_{L'}(E \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \dots, e'_n))} < n - i + \sigma - s$. Следовательно, $W_i^{(3)}(L') = \emptyset$ для $i = n, n + 1$.

Положим также $W^{(\beta)}(L') = W_\sigma^{(\beta)}(L') = \emptyset$, $W_0^{(\beta)}(L') = W_{n+1}^{(\beta)}(L')$, $\beta = 1, 2, 3$.

Заметим, что если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Согласно лемме 4, если $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) = \emptyset$, то

$W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r) = W \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_n)$ (фактически в этой лемме мы имеем более сильное утверждение). Следовательно, размерность всякой неприводимой компоненты многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$ не меньше, чем $\sigma - s - 1$. Отсюда для произвольного L' (может быть, $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) \neq \emptyset$) всякая неприводимая компонента многообразия $W^{(1)}_{n+1}(L')$ является неприводимой компонентой размерности $\sigma - s - 1$ многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$. Если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$ всякая неприводимая компонента многообразия $W^{(1)}_i(L')$ является неприводимой компонентой размерности $n - \sigma - s - i$ пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$. Если $L' \in \mathcal{U}'_0$ и $\bigcup_{\sigma+1 \leqslant j \leqslant i-1} W^{(3)}_j(L')$ не содержит никакую неприводимую компоненту E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$, такую, что $\dim E = n - \sigma + s - i$ (в частности, если $\bigcup_{\sigma+1 \leqslant j \leqslant i-1} W^{(3)}_j(L') = \emptyset$ или если $L' \in \mathcal{U}''_0$, см. ниже), то, обратно, всякая неприводимая компонента размерности $n - \sigma - s - i$ пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$ является неприводимой компонентой многообразия $W^{(1)}_i(L')$.

Далее, для всякого $z \in W'$ всякая неприводимая компонента E слоя $p^{-1}(z)$ является неприводимой компонентой $p^{-1}_{L'} p_{L'} p^{-1}(z)$, если $L' \in \mathcal{U}'_0$. Поэтому $\dim E \geqslant \sigma - s$. Последнее неравенство – это теорема о размерности слоев для морфизма p', ср. [1]. Кроме того, для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n + 1$

- если $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) = \emptyset$, то $W^{(1)}_i(L')$ является объединением всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$, таких, что E является неприводимой компонентой многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$;

- если $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) = \emptyset$, то $W^{(3)}_i(L')$ является объединением всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$, таких, что $E \not\subset \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$ и $\dim \overline{p(E \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r))} < n - i + \sigma - s$.

В дальнейшем во введении мы предполагаем, что $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) = \emptyset$. Представим $W_i(L')$ и $W^{(\beta)}_i(L')$, $\beta = 1, 2, 3$, как объединения попарно различных неприводимых над $\overline{k}$ алгебраических многообразий:

$$W_i(L') = \bigcup_{j\in J_i(L')} W_j, \quad \sigma \leqslant i \leqslant n,$$

$$W_i^{(\beta)}(L') = \bigcup_{j\in J_i^{(\beta)}(L')} W_j, \quad \sigma \leqslant i \leqslant n+1,\ \beta = 1,2,3$$

(в действительности $J_{\sigma+1}^{(2)}(L') = \emptyset$ и $W_{\sigma+1}^{(2)}(L') = \emptyset$). Обозначим через $W_i^{(1)}$ объединение всех неприводимых компонент размерности $n-i+\sigma-s$ многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$. Пусть W_j, $j \in J_i^{(1)}$, – семейство всех неприводимых компонент многообразия $W_i^{(1)}$. В дальнейшем мы будем предполагать без ограничения общности, что $J_i^{(1)}(L') \subset J_i^{(1)}$.

Обозначим через $\iota_j(L')$, $j \in J_{i+1}(L')$ (соответственно $\iota_j(L')$, $j \in J_{i+1}^{(\beta)}(L')$, $\beta = 1,2,3$), $\sigma \leqslant i \leqslant n$, индекс пересечения $i(W_i(L'),\mathcal{Z}(e'_{i+1});W_j)$ алгебраических многообразий $W_i(L')$ и $\mathcal{Z}(e'_{i+1})$ в W_j, см. [2]. Тогда по теореме Безу (см. [2])

$$d'\deg W_i(L') = \\ = \sum_{j\in J_{i+1}(L')} \iota_j(L')\deg W_j + \sum_{1\leqslant\beta\leqslant 3}\ \sum_{j\in J_i^{(\beta)}(L')} \iota_j(L')\deg W_j. \quad (6)$$

Положим

$$D_i(L') = \deg W_i(L') = \sum_{j\in J_i(L')} \deg W_j, \quad \sigma \leqslant i \leqslant n+1,$$

$$D_i^{(\beta)}(L') = \deg W_i^{(\beta)}(L') = \sum_{j\in J_i^{(\beta)}(L')} \deg W_j, \\ \sigma \leqslant i \leqslant n+1, \quad \beta = 1,2,3.$$

Мы будем обозначать также $D_\alpha(L') = D(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, $J_\alpha(L') = J(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, $W_\alpha(L') = W(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$ для $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n+1$; и $W_\alpha^{(\beta)}(L') = W^{(\beta)}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, $D_\alpha^{(\beta)}(L') = D^{(\beta)}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, $J_\alpha^{(\beta)}(L') = J^{(\beta)}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$ для $\sigma+1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$, $\beta = 1,2,3$.

Положим

$$D_i = D_i(U),\ J_i = J_i(U), \quad \sigma \leqslant i \leqslant n+1,$$

$$D_i^{(\beta)} = D_i^{(\beta)}(U),\ J_i^{(\beta)} = J_i^{(\beta)}(U), \quad \sigma \leqslant i \leqslant n+1, \quad \beta = 1,2,3,$$

$$\iota_j = \iota_j(U), \quad j \in J_i^{(\beta)}, \quad \sigma \leqslant i \leqslant n+1, \quad \beta = 1,2,3, \quad (7)$$

и $D_0 = D_{n+1}$, $D_0^{(\beta)} = D_{n+1}^{(\beta)}$, $J_0^{(\beta)} = J_{n+1}^{(\beta)}$, $\beta = 1,2,3$. Неравенство $D_i(L') \leqslant D_i$ справедливо для всякого $\sigma \leqslant i \leqslant n$, см. лемму 8. *Если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то по лемме 11 из* [10] *имеем $\iota_j(L') = 1$ для всякого $j \in J_i(L')$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n$.* В частности, $\iota_j = 1$ для всякого $j \in J_i$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n$. Далее, если $L' \in \mathcal{U}'_0$ и $J_i^{(1)}(L') = J_i^{(1)}$, то $\iota_j(L') \geqslant \iota_j$ для всякого $j \in J_i^{(1)}$, см. лемму 7 настоящей статьи (фактически последнее неравенство выполнено при более слабых условиях из этой леммы). Кроме того, если дополнительно $i = n{+}1$, то $\iota_j(L') = \iota_j$, см. лемму 8.

Обозначим через W''' замыкание в топологии Зариского множества всех точек $z \in W'$, таких, что $\dim p^{-1}(z) > s - \sigma$. Обозначим через $W^{(4)}$ замыкание относительно топологии Зариского объединения всех неприводимых компонент E обратного образа $p^{-1}(W''')$, таких, что $\dim \overline{p(E)} < \sigma - s + \dim E$. По теореме о размерности слоев (см. [1] или выше) для всякого $z \in W'''$ размерность всякой неприводимой компоненты (если она существует; $p^{-1}(z)$ может быть пустым) обратного образа $p^{-1}(z)$ не меньше $\sigma - s + 1$. Следовательно, квазипроективное алгебраическое многообразие $W^{(4)} \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ есть в точности множество всех точек $x \in W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$, таких, что для всякой неприводимой компоненты E слоя $p^{-1}p(x)$, если $x \in E$, то $\dim E > \sigma - s$. Следовательно, если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то $W_i^{(3)}(L') \subset W^{(4)}$, $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Пусть $\sigma \leqslant i \leqslant n$ – целое число. Нам потребуются также условия

$$\dim(W^{(4)} \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i) \leqslant n - i + \sigma - s - 1, \quad (8)$$

$$\dim W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) \cap (\overline{V \setminus W}) \leqslant n - i + \sigma - s - 1 \quad (9)$$

(здесь, если размерность отрицательна, то многообразие пусто).

По теореме 1 из работы [10], если $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'_0$, то выполняется условие (9) (напомним, что условия (4), (5) выполняются всегда), $W_n(L')$ является замыканием относительно топологии Зариского многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ и $D_n(L') = D_n = \deg p'_v \deg W'$. По лемме 11 из работы [10], если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то $W_i(L')$ есть в точности объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$, таких, что $E(\overline{k_v})$ содержит по крайней мере одну из $\deg p'_v \deg W'$ точек многообразия $W_v \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ (или, что эквивалентно, E содержит неприводимую компоненту многообразия $W_n(L'))$.

Далее, пусть $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n$ – целое число и $L' \in \mathcal{U}'_0$. Согласно лемме 11 из [10], условие (8) выполняется для всех $\sigma \leqslant i \leqslant \alpha$ тогда и только тогда, когда

$$W_i(L') = \overline{W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)} \qquad (10)$$

для всех $\sigma \leqslant i \leqslant \alpha$. В этом случае $W_i^{(3)}(L') = \emptyset$ для всех $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$ и, следовательно, в силу формул (4) и (5) алгебраическое многообразие $W_i^{(1)}(L')$, $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$, совпадает с объединением всех неприводимых компонент размерности $n-i+\sigma-s$ пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$. Следовательно, $W_i^{(1)}(L')$ и $J_i^{(1)}(L') = J_i^{(1)}$ не зависят от L' при рассматриваемых условиях.

Согласно лемме 21 из раздела 3, можно выяснить, верно ли, что $L' \in \mathcal{U}'_0$, за полиномиальное время от длины записи входных данных и $(dd')^n$, т.е. полиномиальное время от длины записи L' и от величин из оценки на время работы алгоритма из теоремы 1.

Пусть $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n+1$ – целое число. Отождествим множество всех $(\alpha - \sigma)$–наборов $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$ линейных форм $L'_j \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$ (соответственно $L'_j \in \overline{k_v}[X_0, \dots, X_r]$) с $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$ (соответственно $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k_v})$). Для удобства обозначений, если $\alpha = \sigma + 1$, то мы будем отождествлять 1-набор $(L'_{\sigma+1})$ с линейной формой $L'_{\sigma+1}$. Напомним, что $L'_0 = L'_{n+1}$. *Обозначим через* $\mathcal{U}'_\alpha$, $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n+1$, *образ множества* $\mathcal{U}'_0$ *относительно линейного отображения* $\pi_\alpha : \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$, $L' \mapsto (L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$. Тогда $\mathcal{U}'_\alpha$ – открытое в топологии Зариского множество, так как образ открытого множества относительно линейной проекции открыт. Кроме того, π_{n+1} является изоморфизмом.

Пусть $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n+1$ *– целое число. Обозначим через* $\mathcal{U}''_\alpha \subset \mathcal{U}'_\alpha$ *подмножество всех* $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$, *таких, что*

$$D(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = D_i \qquad (11)$$

для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$. *Положим также* $\mathcal{U}''_0 = \mathcal{U}'_0 \cap \pi_n^{-1}(\mathcal{U}''_n) = \pi_{n+1}^{-1}(\mathcal{U}''_{n+1})$. Если $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha$, то (см. лемму 8 из раздела 2) $\iota_j(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = \iota_j$ для всех $j \in J_i^{(1)}$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$, и, как мы отметили, $\iota_j = 1$ для всех $j \in J_i(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Далее, $\mathcal{U}''_\alpha$ – непустое открытое в топологии Зариского подмножество в

$\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$, см. лемму 9 раздела 2. По лемме 14 из работы [10], примененной к W_v, p'_v, α вместо W, p', $i+1$, если $D_i(L') = D_i$ для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$, то $W_i^{(3)}(L') = \emptyset$ для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Следовательно, если $L' \in \mathcal{U}_0''$, то выполняются условия (8) и (10) для всех $\sigma \leqslant i \leqslant n-1$.

Если расширить основное поле, то $U \in \mathcal{U}_0''$. Поэтому из формулы (6) следует, что

$$(d')^{n-\sigma+1} \deg W = \\ = \sum_{\sigma+1 \leqslant i \leqslant n+1} \Big(\sum_{j \in J_i^{(1)}} (d')^{n-i+1} \iota_j \deg W_j + \sum_{j \in J_i^{(2)}} (d')^{n-i+1} \iota_j \deg W_j \Big). \tag{12}$$

Пусть $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n+1$ – целое число. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha''' \subset \mathcal{U}_\alpha''$ подмножество всех $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$, таких, что

$$D^{(2)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = D_i^{(2)} \tag{13}$$

для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Положим также $\mathcal{U}_0''' = \mathcal{U}_0'' \cap \pi_n^{-1}(\mathcal{U}_n''')$, т.е. $\mathcal{U}_0'''$ – множество всех $L' \in \mathcal{U}_0''$, таких, что $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}_n'''$. Тогда $\mathcal{U}_\alpha'''$ – непустое открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$, см. лемму 12 раздела 2. Далее, $U \in \mathcal{U}_{n+1}'''(\overline{K})$. Очевидно, $\pi_{n+1}(\mathcal{U}_0''') \supset \mathcal{U}_{n+1}'''$ и, если $s = \sigma$, то последнее включение становится равенством.

Обозначим для краткости $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_{\sigma+1}$ (соответственно $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}''_{\sigma+1}$, $\mathcal{U}''' = \mathcal{U}'''_{\sigma+1}$).

Чтобы сформулировать теорему 1 без всяких ограничений на s и σ, нам требуется рассмотреть также случай, когда W является объединением некоторых определенных над k и неприводимых над k компонент многообразия V (т.е. W не обязательно неприводимо над k) и $\dim W = n - s = 0$ (фактически для $n = s$ теорема 1 тривиальна). В рассматриваемом случае p, p', W' определяются, как и выше. Мы имеем $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) = \emptyset$, $\dim W' = n - \sigma = 0$. Пусть $L' = (L'_0)$, где L'_0 – линейная форма из $\overline{k}[X_0, \dots, X_r]$. Элемент $L' = (L'_0)$ принадлежит $\mathcal{U}'_0$ тогда и только тогда, когда $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^r(\overline{k})$. Морфизм p' – доминантный в том и только в том случае, если $L' \in \mathcal{U}'_0$. Для произвольного $L' \in \mathcal{U}'_0$ положим $W_n(L') = W$, $W_{n+1}(L') = \emptyset$, $W_n^{(j)}(L') = \emptyset$, $W_{n+1}^{(j)}(L') = \emptyset$ для $j = 1, 2, 3$. Положим $\mathcal{U}_0''' = \mathcal{U}_0'' = \mathcal{U}_0' = \mathcal{U}_{n+1}''' = \mathcal{U}_{n+1}'' = \mathcal{U}_{n+1}'$. Все другие объекты, определенные выше для неприводимого W, определяются в рассматриваемом случае аналогичным образом.

Замечание 1. Из теоремы Безу вытекает, что если $L' \in \mathcal{U}'_0$, $J_i^{(2)}(L') = \emptyset$ для всех $s+2 \leqslant i \leqslant n$ и выполняется условие (10) для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n-1$, то для всякого $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n+1$ имеем $D_i(L') = D_i$ и $\iota_j(L') = \iota_j$ для всякого $j \in J_i^{(1)}$.

Замечание 2. Пусть K_1 – алгебраически замкнутое поле, $K_1 \supset k$ и K_1 линейно раздельно с $k(W)$ над k. Выберем такое расширение $K_2 \supset k$, что W неприводимо над K_2 и $\overline{K_2} = K_1$ (например, K_2 может быть произвольным чисто трансцендентным расширением поля k, таким, что $\overline{K_2} = K_1$). Определим множества $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$ для основного поля K_1 (а также K_2), заменяя в определениях этих множеств основное поле k на K_2. Для краткости обозначим полученные множества через $\mathcal{U}'_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}''_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}'''_{K_1,\alpha}$ (мы используем эти более подробные обозначения только в этом замечании). Тогда, очевидно, $\mathcal{U}'_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}''_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}'''_{K_1,\alpha}$ не зависят от выбора поля K_2, такого, как выше. В частности, первоначальные $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$, определенные для основного поля k, зависят только от $\overline{k}$. Далее, очевидно, $\mathcal{U}'_\alpha = \mathcal{U}'_{K_1,\alpha}(\overline{k})$, $\mathcal{U}''_\alpha = \mathcal{U}''_{K_1,\alpha}(\overline{k})$, $\mathcal{U}'''_\alpha = \mathcal{U}'''_{K_1,\alpha}(\overline{k})$ для всех α. С другой стороны, вероятно также $\mathcal{U}'_\alpha(K_1) = \mathcal{U}'_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}''_\alpha(K_1) = \mathcal{U}''_{K_1,\alpha}$, $\mathcal{U}'''_\alpha(K_1) = \mathcal{U}'''_{K_1,\alpha}$. Мы оставляем доказательство последних трех равенств читателю. В этой статье они нам не потребуются. Аналогично читатель может доказать, что если V и W определены над подполем k' поля k (расширение $k \supset k'$ может быть трансцендентным), то $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$ также определены над k'.

Напомним некоторые детали из [9]. Пусть $\overline{\lambda} = (L_0, \dots, L_{n+1})$, и все $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, являются линейными формами. Предположим, что $\overline{\lambda}$ (т.е. линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$) удовлетворяют утверждению теоремы 1 работы [9] для алгебраического многообразия V. Тогда (см. [9, раздел 2]) для всякого $1 \leqslant j \leqslant n-2$, такого, что V имеет неприводимую компоненту размерности $n-j$, справедливо равенство $v_j(\overline{\lambda}) = u_j(\overline{\lambda})$, где $v_j(\overline{\lambda}), u_j(\overline{\lambda}) \leqslant d^j(d^j-1)$ – целые числа, определенные в [9]. Однако сейчас обозначения v_j и u_j уже используются в другом смысле. Так что в настоящей статье мы будем обозначать эти числа через $b_j(\overline{\lambda}), a_j(\overline{\lambda})$ вместо $v_j(\overline{\lambda}), u_j(\overline{\lambda})$ из [9] соответственно. Более точно, в разделе 1 работы [11] для произвольных $\overline{\lambda}$ и V, удовлетворяющих свойству (B) (см. [11, начало раздела 1]), мы определяем целые числа $b_j(\overline{\lambda}) = b_j(\overline{\lambda}, V)$, $a_j(\overline{\lambda}) = a_j(\overline{\lambda}, V)$ для всех $0 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, где все $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, являются линейными формами. Рассмотрим следующее свойство.

(A) Для λ задан элемент $\overline{\lambda}$ (следовательно, линейные формы L_w, $s+1 \leqslant w \leqslant \sigma$, из λ и $\overline{\lambda}$ совпадают); справедливы утверждения теоремы 1 работы [9] для алгебраического многообразия V и линейных форм $L_0, \dots, L_{n+1}$; и для всякого $0 \leqslant j \leqslant n$, такого, что V имеет неприводимую компоненту размерности $n-j$, целое число $b_j(\overline{\lambda}) = a_j(\overline{\lambda})$ является максимально возможным (если варьировать $\overline{\lambda}$; подробности см. [11, раздел 1]).

В этом случае для краткости мы будем говорить, что λ удовлетворяет условию (A) для V или что условие (A) выполняется для λ и V.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\dim W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) = n - \sigma$; последнее пересечение трансверсально; если $n - \sigma > 0$, то алгебраическое многообразие $W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ неприводимо над k. Обозначим $W_\lambda = W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $V_\lambda = V \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$. В дальнейшем мы будем считать, что $\dim(W_\lambda \cap (\overline{V_\lambda \setminus W_\lambda})) < \dim W_\lambda$. Заметим, что, если для λ справедливо условие (A), то все эти свойства выполняются. Обозначим через

$$p_\lambda : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to \mathbb{P}^r(\overline{k}), \tag{14}$$

$$p'_\lambda : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to W' \tag{15}$$

морфизмы, индуцированные p и p'. Предположим, что

$$\dim W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) < \dim W_\lambda \tag{16}$$

и морфизм p'_λ – доминантный. Отметим, что если $n - \sigma > 0$, то W_λ неприводимо над k согласно нашему предположению. Следовательно, если $n - \sigma > 0$ и морфизм p'_λ доминантный, то выполнено условие (16). Заменим (V, W, p, p') на $(V_\lambda, W_\lambda, p_\lambda, p'_\lambda)$ во всех определениях всех $W_i(L')$, $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L_n)$, $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$, $p_{L'}$ и т. д. Мы будем обозначать полученные объекты через $W_{\lambda,i}(L')$, $W_\lambda(L'_{\sigma+1}, \dots, L_n)$, $\mathcal{U}'_{\lambda,\alpha}$, $\mathcal{U}''_{\lambda,\alpha}$, $\mathcal{U}'''_{\lambda,\alpha}$, $p_{\lambda,L'}$ и т. д. Отметим, что $k_{v_\lambda} = k$ и $p_{\lambda, v_\lambda, L'} = p_{\lambda,L'}$, так как $s_\lambda = \sigma_\lambda = \sigma$. Нам будет удобно также рассматривать морфизм p'_λ (положим $q_\lambda = p'_\lambda$) вместе с p'_v, см. теорему 1 ниже. Определим V_v, W_v и т. д., расширяя основное поле k до k_v. Заметим, что условие (A) выполняется для v и V, если расширить k до $k_{\overline{v}}$.

Пусть даны однородные многочлены $f_1, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$. Рассмотрим замкнутое алгебраическое множество или алгебраическое многообразие (в этой статье мы не различаем эти понятия)

$$V = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) : f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \\ x_i \in \overline{k},\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Это множество всех общих нулей многочленов $f_1, \ldots, f_m$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Следовательно, $V = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m)$. Пусть $e_0, \ldots, e_r \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, причем $\deg_{X_0, \ldots, X_n} e_j = d'$, если $e_j \neq 0$, для всякого $0 \leqslant j \leqslant r$.

Пусть теперь $k = \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_l, \theta)$, где $t_1, \ldots, t_l$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$ и θ – алгебраический над $\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_l)$ элемент с минимальным многочленом $F \in \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_l, Z]$. Старший коэффициент $\mathrm{lc}_Z F$ многочлена F равен 1. Каждый многочлен $f = f_i$ (и аналогично e_j) будем представлять в форме

$$f = \frac{1}{a_0} \sum_{i_0, \ldots, i_n} \sum_{0 \leq j < \deg_Z F} a_{i_0, \ldots, i_n, j} \theta^j X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n},$$

где $a_0, a_{i_0, \ldots, i_n, j} \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_l]$, $\mathrm{GCD}_{i_0, \ldots, i_n, j}(a_0, a_{i_0, \ldots, i_n, j}) = 1$. Определим длину записи $\mathrm{l}(a)$ целого числа a формулой $\mathrm{l}(a) = \min\{s \in \mathbb{Z} : |a| < 2^{s-1}\}$. Длина записи коэффициентов $\mathrm{l}(f)$ многочлена f определяется как максимум длин записи целых коэффициентов многочленов $a_0, a_{i_0, \ldots, i_n, j}$, а степень задается формулой

$$\deg_{t_\gamma}(f) = \max_{i_0, \ldots, i_n, j} \{\deg_{t_\gamma}(a_0), \deg_{t_\gamma}(a_{i_0, \ldots, i_n, j})\},$$

где $1 \leq \gamma \leq l$. Аналогичным образом определяются $\deg_{t_\gamma} F$ и $\mathrm{l}(F)$. Мы будем предполагать, что имеются следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\deg_{X_0, \ldots, X_n}(f_i) < d,\ \deg_{t_\gamma}(f_i) < d_2,\ \mathrm{l}(f_i) < M, \\ &\deg_{X_0, \ldots, X_n}(e_j) = d' \quad \text{или} \quad e_j = 0,\ \deg_{t_\gamma}(e_j) < d_2',\ \mathrm{l}(e_j) < M', \\ &\deg_Z(F) < d_1,\ \deg_{t_\gamma}(F) < d_1,\ \mathrm{l}(F) < M_1 \end{aligned}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant \gamma \leqslant l$. Размер (или длина записи) $\mathrm{L}(f)$ многочлена f определяется как произведение $\mathrm{l}(f)$ на число всех целых коэффициентов многочлена f в плотном представлении. Имеем

$$\mathrm{L}(f_i) < \left(\binom{d+n}{n} d_1 + 1\right) d_2^l M.$$

Аналогично, $\mathrm{L}(F) < d_1^{l+1} M_1$.

Замечание 3. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что l фиксировано. Время работы алгоритма из теоремы 1 (см. ниже) является по существу тем же самым, что и при решении систем полиномиальных уравнений с конечным множеством решений в проективном пространстве. Так что эта теорема может быть сформулирована также в случае, когда l не является фиксированным, см. [4]. Заметим, что константы $O(\dots)$ (см. теорему 1 и леммы ниже) в оценках длин записи целых коэффициентов линейных форм L'_j, L_j являются абсолютными; они не зависят от l.

Мы будем представлять точку $z \in V$ с координатами из конечного расширения поля k следующим образом. Известен индекс $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, такой, что $X_{i_0}(z) \neq 0$, и задан изоморфизм полей

$$k(z) = k((X_1/X_{i_0})(z), \dots, (X_n/X_{i_0})(z)) \simeq k[\eta] = k[Z]/(\Phi), \qquad (17)$$

причем $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} c_i (X_i/X_{i_0})(z)$ переходит в η под действием изоморфизма (17), коэффициенты $c_i \in \mathbb{Z}$ заданы и $\Phi \in k[Z]$ – минимальный многочлен элемента η над полем k со старшим коэффициентом $\mathrm{lc}_Z \Phi = 1$. Таким образом, точка z определена с точностью до сопряжения над k. Более точно, представление (17) задает определенное над k и неприводимое над k алгебраическое многообразие размерности 0.

Пусть $g \in k[\eta]$ – произвольный элемент. Тогда $g = G(\eta)$ для однозначно определенного многочлена $G \in k[Z]$, такого, что $\deg_Z G < \deg_Z \Phi$. Длина записи целых коэффициентов $\mathrm{l}(g)$, длины записи $\mathrm{L}(g)$ и степени $\deg_{t_\alpha} g$, $1 \leqslant \alpha \leqslant l$, элемента g определены формулами

$$\mathrm{l}(g) = \mathrm{l}(G), \quad \mathrm{L}(g) = \mathrm{L}(G), \quad \deg_{t_\alpha} g = \deg_{t_\alpha} G.$$

Определим длину записи $\mathrm{L}(z)$ точки z как $\mathrm{L}(\Phi) + \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{L}(X_i/X_{i_0})$.

Пусть $W_1, W_2 \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – два квазипроективных алгебраических многообразия, определенных над k. Пусть W_3 – произвольная определенная над k и неприводимая над k компонента пересечения $W_1 \cap W_2$. Мы будем говорить, что пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально в W_3 тогда и только тогда, когда существует такая точка $x \in W_3$, что x – гладкая точка каждого W_i, $i = 1, 2$, и пересечение касательных пространств $T_{x,W_1} \cap T_{x,W_2}$ многообразий W_1 и W_2 в точке x трансверсально, то есть $\dim(T_{x,W_1} \cap T_{x,W_2}) = n - \dim(T_{x,W_1}) - \dim(T_{x,W_2})$. Мы будем говорить, что пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально тогда и только тогда, когда оно трансверсально в каждой своей определенной над k и неприводимой над k компоненте. Аналогичным образом определяется трансверсальность для пересечения конечного числа алгебраических многообразий.

Согласно лемме 17, если пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально и y – произвольная гладкая точка многообразия $W_1 \cap W_2$, то y является гладкой точкой каждого W_i, $i = 1, 2$, и пересечение касательных пространств $T_{y,W_1} \cap T_{y,W_2}$ многообразий W_1 и W_2 в точке y трансверсально.

Теорема 1. *Пусть заданы, как и выше, поле k, алгебраическое многообразие V и многочлены F, $f_1, \dots, f_m$ и $e_0, \dots, e_r$. Пусть дана точка $x^{(0)} \in V$ и $x^{(0)}$ принадлежит только одной неприводимой над k компоненте W многообразия V. Пусть W' – такое же, как и выше, см.* (1). *Тогда можно вычислить $\dim W$ и $\dim W'$. Предположим, что $\dim W = n - s$ и $\dim W' = n - \sigma$. Следовательно, определено открытое в топологии Зариского подмножество $\mathcal{U}_0''' \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$, см. выше.*

(a) *Можно построить элемент $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}_0'''$, такой, что линейные формы L'_j имеют целые коэффициенты с длинами записи $O(n \log d + (n - \sigma) \log d')$ для всех $j \in \{0, \sigma + 1, \dots, n\}$. Следовательно, выполняются условия* (4), (5), (8)–(13) *для $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$. Можно вычислить степени D_i, $D_i^{(1)}$, $D_i^{(2)}$, $\sigma \leqslant i \leqslant n$.*

(b) *Для заданного $L' \in \mathcal{U}_0'''$, удовлетворяющего условию из п.* (a) *(но не обязательно вычисленного в п.* (a); *можно проверить, что $L' \in \mathcal{U}_0'''$ по замечаниям, приведенным в конце введения), можно построить $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, где все $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ – линейные формы с целыми коэффициентами с длиной записи $O(n \log d + (n - \sigma) \log d')$, такие, что выполняются следующие утверждения* (c) *и* (d).

(c) λ *удовлетворяет условиям* (A) *и* (16), *см. выше; морфизм* p'_λ, *(см.* (15)*) является доминантным;* $\deg p'_\lambda = \deg p'_v$; $D_{\lambda,i} = D_i$, $D^{(1)}_{\lambda,i} = D^{(1)}_i$, $D^{(2)}_{\lambda,i} = D^{(2)}_i$ *для всех* $\sigma \leqslant i \leqslant n$.

(d) $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda,0} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$.

(e) *Пусть* λ *и* L' *удовлетворяют утверждениям* (c) *и* (d). *Тогда* $L' \in \mathcal{U}'''_0$. *Далее,* $W_{\lambda,i}(L') = W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $W^{(1)}_{\lambda,i} = W^{(1)}_i \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $W^{(2)}_{\lambda,i}(L') = W^{(2)}_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ *для всех* $\sigma \leqslant i \leqslant n$, *и все эти пересечения трансверсальны. Следовательно,* $D_{\lambda,i} = D_{\lambda,i}(L') = D_i(L') = D_i$, $D^{(1)}_{\lambda,i} = D^{(1)}_i$, $D^{(2)}_{\lambda,i} = D^{(2)}_{\lambda,i}(L') = D^{(2)}_i(L') = D^{(2)}_i$ *для всех* $\sigma \leqslant i \leqslant n$.

(f) *Пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ – *произвольный (т.е. не обязательно построенный алгоритмом из этой теоремы) элемент, причем все линейные формы* L'_j *лежат в* $\overline{k}[X_0, \dots, X_r]$. *Пусть* $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \in \mathbb{A}^{(n+1)(\sigma-s)}(k)$ – *произвольный (не обязательно построенный в п.* (b)*) элемент, причем все* L_j *лежат в* $k[X_0, \dots, X_n]$. *Положим* $\nu_0 = (r+1)(n-\sigma+1) + (n+1)(\sigma-s)$. *Рассмотрим пару* (λ, L') *как элемент из* $\mathbb{A}^{\nu_0}(\overline{k})$. *Предположим, что выполняются утверждения* (c)*) и* (d)*) для* (λ, L'). *Отождествим* $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ *с* $\overline{k}$ *при помощи координатной функции на* $\mathbb{A}^1(\overline{k})$, *определенной над* k. *Пусть* $\iota_0 : \mathbb{A}^1(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{\nu_0}(\overline{k})$ – *аффинное линейное вложение. Для всякого* $y \in \overline{k}$ *представим* $\iota_0(y) = (\lambda_0, L^{(0)})$, *где* $\lambda_0 = (L_{0,s+1}, \dots, L_{0,\sigma})$, $L^{(0)} = (L^{(0)}_0, L^{(0)}_{\sigma+1}, \dots, L^{(0)}_n)$, *все* $L_{0,j} \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$, $L^{(0)}_w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$ – *линейные формы. Предположим, что для всякого* $y \in k$ *все* $L_{0,j}$ *имеют коэффициенты из* k. *Пусть* $\iota_0(0) = (\lambda, L')$. *Тогда для всех* $y \in k$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,* $\iota_0(y) = (\lambda_0, L^{(0)})$ *удовлетворяет утверждениям* (c) *и* (d) *вместо* (λ, L'). *Кроме того (см. условие* (A)*), для* $\alpha \in \{0, \dots, s, \sigma+1, \dots, n+1\}$ *линейные формы* L_α *из* $\overline{\lambda}$ *и* $L_{0,\alpha}$ *из* $\overline{\lambda_0}$ *совпадают.*

Время работы алгоритма из п. (a) *полиномиально от* d^n, $(d')^n$, d_1, d_2, d'_2, M, M', M_1, m, r *и длины записи* $\mathrm{L}(x^{(0)})$ *точки* $x^{(0)}$. *Время работы алгоритма из п.* (b) *полиномиально от тех же самых величин и длины записи* $\mathrm{L}(L')$ *элемента* L'.

Эта теорема будет доказана в разделе 5. Заметим, что если заменить k на k_v, то v (вместо λ) удовлетворяет утверждениям

(c) и (d). Более детальная информация содержится в алгоритмах из раздела 3 и [11, раздел 2]. Именно, для заданного элемента $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$, где $L'_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ при всех j, можно выяснить, верно ли, что $L' \in \mathcal{U}'_0$, используя лемму 21. Применяя алгоритмы из теоремы 1 работы [11], можно узнать, выполняется ли каждое равенство $D_i(L') = D_i$, $D_i^{(2)}(L') = D_i^{(2)}$, $\sigma \leqslant i \leqslant n$, и, следовательно, выяснить, верно ли, что $L' \in \mathcal{U}''_0$ и $L' \in \mathcal{U}'''_0$. Подробности, относящиеся к утверждению (f), см. также в леммах 15, 14, 16.

Замечание 4. Фактически в разделе 4 мы строим элемент $L' \in \mathcal{U}'''_0$ из утверждения (a) теоремы 1, такой, что $\pi_{n+1}(L') \in \mathcal{U}'''_{n+1}$.

Замечание 5. В дальнейшем во многих случаях, когда мы говорим, что $a_1, \dots, a_\mu$ (здесь может быть любое другое семейство переменных или коэффициентов некоторых многочленов, может быть только одна переменная) являются бесконечно малыми величинами, удобно понимать под этим, допуская вольность речи, что каждый из них является бесконечно малой величиной или нулем. Обычно мы явно оговариваем, что $a_1, \dots, a_\mu$ могут быть равны нулю. Но даже если где-либо мы забыли оговорить равенство нулю явно, читатель легко увидит это из контекста. Это не приведет к двусмысленности. Например, допуская вольность речи, удобнее сказать, что все коэффициенты линейной формы $\widetilde{L}_0$ являются бесконечно малыми величинами, но все же в этом случае мы говорим, что все ненулевые коэффициенты линейной формы $\widetilde{L}_0$ являются бесконечно малыми величинами.

1. Стандартные части алгебраических многообразий и их пересечений

Пусть K' – произвольное расширение поля $\overline{k}$ бесконечно малыми величинами и алгебраическое замыкание $\overline{K'}$ снабжено вещественной структурой (см. [13]). Обозначим через $\mathrm{st} : \mathbb{P}^n(\overline{K'}) \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$ отображение стандартной части (см., например, [13]; стандартная часть элемента $x' \in \mathbb{P}^n(\overline{K'})$ есть элемент $x \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$, который бесконечно близок к x'). Отождествим $\mathbb{A}^n(\overline{K'}) \subset \mathbb{P}^n(\overline{K'}) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Тогда для всякого $x' \in \mathbb{A}^n(\overline{K'})$ имеем $\mathrm{st}(x') \in \mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Определим для всякого подмножества $S \subset \mathbb{A}^n(\overline{K'})$ аффинную стандартная часть $\mathrm{sta}(E) = \mathrm{st}(E) \cap \mathbb{A}^n(\overline{K'}) = \mathrm{st}(E) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. В следующих трех общих леммах W не обязательно является многообразием из введения.

Лемма 1. *Пусть* $\widetilde{W} \subset \mathbb{P}^n(\overline{K'})$ *(соответственно* $\widetilde{W} \subset \mathbb{A}^n(\overline{K'})$*) – произвольное неприводимое над* $\overline{K'}$ *проективное алгебраическое многообразие (соответственно аффинное алгебраическое многообразие, такое, что* $\mathrm{sta}(\widetilde{W}) \neq \emptyset$*). Пусть* $W = \mathrm{st}(\widetilde{W})$ *(соответственно* $W = \mathrm{sta}(\widetilde{W})$*). Тогда* W *является непустым проективным (соответственно аффинным) алгебраическим многообразием в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ *(соответственно* $\mathbb{A}^n(\overline{k})$*), для всякой неприводимой компоненты* W_1 *многообразия* W *имеет место равенство* $\dim W_1 = \dim \widetilde{W}$ *и* $\deg \widetilde{W} \geqslant \deg W$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{W} \subset \mathbb{A}^n(\overline{K'})$ – произвольное алгебраическое многообразие. Обозначим через $\widetilde{W}_1$ замыкание относительно топологии Зариского многообразия $\widetilde{W}$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Тогда, очевидно, $\mathrm{st}(\widetilde{W}) = \mathrm{st}(\widetilde{W}_1)$ и, следовательно, утверждения, относящиеся к аффинным алгебраическим многообразиям, следуют из соответствующих утверждений о проективных алгебраических многообразиях. Поэтому в доказательстве мы будем предполагать, что $\widetilde{W} \subset \mathbb{P}^n(\overline{K})$ является проективным алгебраическим многообразием.

Для $n = 0$ утверждение леммы тривиально. Используя индукцию по n, мы будем предполагать, что это утверждение доказано для проективных алгебраических многообразий в $\mathbb{P}^{n-1}(\overline{K'})$.

Мы можем предполагать без ограничения общности, что $\widetilde{W} \neq \mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Тогда существует неприводимый многочлен $\Phi \in \overline{K'}[X_0, \ldots, X_n]$, такой, что $\widetilde{W} \subset \mathcal{Z}(\Phi)$. Умножая Φ на ненулевой множитель из K', мы будем предполагать, не умаляя общности, что каждый коэффициент многочлена Φ не является бесконечно большим относительно поля k и существует коэффициент, который не является бесконечно малым относительно поля k. Пусть $\mathrm{st}(\Phi) \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$ – такой многочлен, что все ненулевые коэффициенты многочлена $\Phi - \mathrm{st}(\Phi)$ являются бесконечно малыми величинами относительно поля k. Тогда $\mathrm{st}(\Phi) \neq 0$ и $W \subset \mathcal{Z}(\mathrm{st}(\Phi))$.

Предположим, что $\dim \widetilde{W} = n - 1$. Тогда $\deg \Phi = \deg \mathrm{st}(\Phi)$, $\widetilde{W} = \mathcal{Z}(\Phi)$ и $W \subset \mathcal{Z}(\mathrm{st}(\Phi))$. Пусть $x \in \mathcal{Z}(\mathrm{st}(\Phi))$. Покажем, что $x \in W$ и, следовательно, $W = \mathrm{st}(\mathcal{Z}(\Phi))$. Если $n \geqslant 2$, то, пересекая $\widetilde{W}$ и W с гиперплоскостью в общем положении, проходящей через точку x, и применяя индукционное предположение, мы получаем, что $x \in W$. Если $n = 1$, то можно доказать, что $x \in W$, непосредственно или используя вложение Веронезе (см. [2]) $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{\deg \Phi}$ степени $\deg \Phi$ и применяя предложение 6 работы [13]. Следовательно, $\deg \widetilde{W} = \deg \Phi = \deg \operatorname{st}(\Phi) \geqslant \deg W$. Лемма доказана для $\dim \widetilde{W} = n - 1$.

Предположим, что $\dim \widetilde{W} \leqslant n - 2$ (следовательно, $n \geqslant 2$). Множество W непустое, так как для всякой точки $z \in \widetilde{W}$ имеем $\operatorname{st}(z) \in W$. Обозначим через $\overline{W}$ замыкание в топологии Зарисского многообразия W.

Пусть $x \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – некоторая точка. Обозначим через $\pi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ линейную проекцию с центром x. Выберем точку x, такую, что $\operatorname{st}(\Phi)(x) \neq 0$ и $\deg \widetilde{W} = \deg \pi(\widetilde{W})$ (это условия общего положения для x). Тогда $x \notin \overline{W}$ и, следовательно, $\pi(\widetilde{W})$ и $\pi(\overline{W})$ являются замкнутыми относительно топологии Зарисского в $\mathbb{P}^{n-1}(\overline{K'})$ и $\mathbb{P}^{n-1}(\overline{k})$ соответственно.

Далее, для всякой точки $z \in \widetilde{W}$ выполняется равенство $\operatorname{st}(\pi(z)) = \pi(\operatorname{st}(z))$, так как морфизм $\widetilde{W} \to \pi(\widetilde{W})$ конечный согласно выбору точки x. Следовательно, $\operatorname{st}(\pi(\widetilde{W})) = \pi(W)$. Теперь по индукции $\pi(W)$ является проективным алгебраическим многообразием и $\dim \pi(W) = \dim \pi(\widetilde{W})$. Рассматривая конечный морфизм $\overline{W} \to \pi(\overline{W})$, индуцированный π, мы получаем $\pi(\overline{W}) = \pi(W)$. Но $\dim \pi(\overline{W}) = \dim \overline{W}$ и $\dim \pi(\widetilde{W}) = \dim \widetilde{W}$ согласно выбору точки x. Следовательно, $\dim \overline{W} \leqslant n - 2$.

Пусть $y \in \overline{W}$. Мы фиксируем эту точку на некоторое время. Поскольку $\dim \overline{W} \leqslant n - 2$, можно выбрать заранее такую точку x, что, дополнительно, для всякой неприводимой компоненты W_1 многообразия $\overline{W}$ морфизм $W_1 \to \pi(W_1)$, индуцированный π, является доминантным; $\deg \pi(W_1) = \deg W_1$; неприводимые компоненты многообразий $\overline{W}$ и $\pi(\overline{W})$ находятся во взаимно однозначном соответствии по правилу $W_1 \mapsto \pi(W_1)$; число элементов $\#\pi^{-1}\pi(y) \cap \overline{W}$ равно 1 (это условия общего положения для x). Как доказано, существует точка $\widetilde{y} \in \widetilde{W}$, такая, что $\operatorname{st}(\pi(\widetilde{y})) = \pi(y)$. Теперь $\operatorname{st}(\widetilde{y}) \in W$ и $\pi(\operatorname{st}(\widetilde{y})) = \pi(y)$. Следовательно, $\operatorname{st}(\widetilde{y}) = y \in W$. Поскольку точка $y \in \overline{W}$ произвольная, $\overline{W} = W$.

В заключение, по индукционному предположению $\dim \pi(\widetilde{W}) = \dim \pi(W_1)$ и $\deg \pi(\widetilde{W}) \geqslant \deg \pi(W)$. С другой стороны, $\dim W_1 =$

$\dim \pi(W_1)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 пусть* $g \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$ *– многочлен и* E *– неприводимая над* $\overline{k}$ *компонента многообразия* W, *такие, что* $E \cap \mathcal{Z}(g)$ *является объединением некоторых неприводимых компонент многообразия* $W \cap \mathcal{Z}(g)$ *и* $\dim(E \cap \mathcal{Z}(g)) = \dim(W) - 1$. *Тогда* $\dim(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) = \dim(\widetilde{W}) - 1$ *и* $\mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) \supset E$ *в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ *(соответственно* $\mathrm{sta}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) \supset E$ *в* $\mathbb{A}^n(\overline{k})$*). В частности, если* $\dim(W \cap \mathcal{Z}(g)) = \dim(W) - 1$, *то* $\mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) = W \cap \mathcal{Z}(g)$ *в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ *(соответственно* $\mathrm{sta}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) = W \cap \mathcal{Z}(g)$ *в* $\mathbb{A}^n(\overline{k})$*).*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 случай аффинных алгебраических многообразий сводится к случаю проективных многообразий. Так что в доказательстве мы будем предполагать, что $\widetilde{W}$ и W являются проективными многообразиями.

Многочлен g не обращается в нуль тождественно на $\widetilde{W}$, поскольку иначе по лемме 1 он обращается в нуль тождественно на любой неприводимой компоненте многообразия W. Следовательно, $\dim(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) = \dim(\widetilde{W}) - 1$. Мы будем предполагать без ограничения общности, что $\widetilde{W} \neq \mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Применяя изоморфизм Веронезе (см. [2]), мы можем считать, не умаляя общности, что g – линейная форма.

Сначала предположим, что $\dim W \cap \mathcal{Z}(g) = \dim W - 1$. В этом случае мы докажем, что $\mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) \supset E$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, используя индукцию по $n - \dim \widetilde{W}$. База индукции – случай $\dim \widetilde{W} = n - 1$. В этом случае $\widetilde{W} = \mathcal{Z}(\Phi)$ и $W = \mathcal{Z}(\mathrm{st}(\Phi))$, см. доказательство леммы 1. Очевидно, что $\mathrm{st}(\mathcal{Z}(\Phi, g)) = \mathcal{Z}(\mathrm{st}(\Phi), g)$, и база требуемого утверждения доказана.

Пусть $\dim W \cap \mathcal{Z}(g) = \dim W - 1$ и $\dim W < n - 1$. Пусть $x \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – произвольная точка и $\pi : \mathbb{P}^n(\overline{k}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\overline{k})$ – линейная проекция с центром x. Пусть $y \in W \cap \mathcal{Z}(g)$. Согласно лемме 1, достаточно доказать, что $y \in \mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g))$. Пусть $\mathfrak{l} \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – прямая, такая, что $y \in \mathfrak{l}$. Если мы выберем $\mathfrak{l}$ в общем положении, то $\mathfrak{l} \cap W = \{y\}$. Следовательно, можно найти x так, что $x \in \mathcal{Z}(g) \setminus (W \cup \widetilde{W})$. В дальнейшем мы считаем, что x удовлетворяет этим свойствам. Тогда морфизмы $W \to \pi(W)$ и $\widetilde{W} \to \pi(\widetilde{W})$, индуцированные π, конечны и доминантны. Имеем $\mathrm{st}(\pi(\widetilde{y})) = \pi(\mathrm{st}(\widetilde{y}))$ для произвольного $\widetilde{y} \in \widetilde{W}$, так как морфизм $\widetilde{W} \to \pi(\widetilde{W})$, индуцированный π, конечен. Согласно индукционному предположению, примененному к $\pi(\widetilde{W}) \subset \mathbb{P}^{n-1}(\overline{K'})$, мы имеем $\mathrm{st}(\pi(\widetilde{W}) \cap \mathcal{Z}(g)) = \pi(W) \cap \mathcal{Z}(g)$. Но $\pi(W) \cap \mathcal{Z}(g) = \pi(W \cap \mathcal{Z}(g))$, $\pi(\widetilde{W}) \cap \mathcal{Z}(g) = \pi(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g))$, поскольку $x \in \mathcal{Z}(g)$. Следовательно, существует $\widetilde{y} \in \widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)$, такой, что $\mathrm{st}(\pi(\widetilde{y})) = \pi(y)$. Отсюда $\pi(\mathrm{st}(\widetilde{y})) = \pi(y)$. Очевидно, $\mathrm{st}(\widetilde{y}) \in W$. Наконец, $\widetilde{y} = y$, поскольку $\#(\pi^{-1}\pi(y) \cap W) = 1$. Требуемые утверждения доказаны для случая $\dim W \cap \mathcal{Z}(g) = \dim W - 1$.

Рассмотрим общий случай. Нам требуется доказать, что $\mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g)) \supset E$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть $y \in W \cap \mathcal{Z}(g) \setminus \overline{W \setminus E}$. Согласно лемме 1, достаточно показать, что $y \in \mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(g))$. Существует линейное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$, такое, что $y \in \mathcal{L}$, $\dim \mathcal{L} + \dim W - 1 = n$, y является изолированной точкой пересечения $\mathcal{W} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{Z}(g)$, $\dim \widetilde{W} \cap \mathcal{L} = 1$, $\dim W \cap \mathcal{L} = 1$. Обозначим $\widetilde{C} = \widetilde{W} \cap \mathcal{L}$, $C = W \cap \mathcal{L}$. Согласно доказанному, $\mathrm{st}(\widetilde{C}) = C$. Поэтому достаточно показать, что $y \in \mathrm{st}(\widetilde{C} \cap \mathcal{Z}(g))$.

Представим C в виде $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 (соответственно C_2) – объединение всех неприводимых компонент C' кривой C, таких, что $C' \not\subset \mathcal{Z}(g)$ (соответственно $C' \subset \mathcal{Z}(g)$). Осуществляя линейное преобразование координат, мы будем предполагать без ограничения общности, что $(\widetilde{C} \cup C_1) \cap \mathcal{Z}(X_0, g) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Рассмотрим конечные доминантные морфизмы $\widetilde{\tau} : \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1(\overline{K'})$ и $\tau_1 : C_1(\overline{K'}) \to \mathbb{P}^1(\overline{K'})$, заданные одной и той же формулой $(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (X_0 : g)$. Тогда для всех $a \in \overline{K'}$, за исключением конечного числа, $\#\widetilde{\tau}^{-1}((1 : a)) = \deg \widetilde{\tau}$ и $\#\tau_1^{-1}((1 : a)) = \deg \tau_1$. Пусть $\overline{K'} = R + R\sqrt{-1}$, где R является вещественно замкнутым и вещественным упорядоченным полем. Для произвольных двух точек $z', z'' \in \mathbb{P}^n(\overline{K'}) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$ определим расстояние $0 \leqslant d(z', z'') = (\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |(X_i/X_0)(z') - (X_i/X_0)(z'')|^2)^{1/2} \in R$. Таким образом, если $z', z'' \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$, то $d(z', z'') \in R \cap \overline{k}$.

Поскольку y – изолированная точка пересечения $C \cap \mathcal{Z}(g)$, существует число $0 < m_2 \in R \cap \overline{k}$, такое, что для всякой точки $y \neq z' \in C \cap \mathcal{Z}(g)$ выполнено неравенство $d(y, z') \geqslant m_2$. Существует число $0 < m_1 \in R \cap \overline{k}$ столь малое, что для всех $a \in R$, удовлетворяющих неравенствам $-m_1 \leqslant a \leqslant m_1$, $a \neq 0$, выполнены условия

- $\#\widetilde{\tau}^{-1}((1 : a)) = \deg \widetilde{\tau}$ и $\#\tau_1^{-1}((1 : a)) = \deg \tau_1$,
- для всякой точки $z' \in \tau_1^{-1}((1 : a))$ существует точка $z'' \in$

$\tau_1^{-1}((1:0))$, такая, что $d(z',z'')\leqslant m_2/8$, и, обратно, для всякой точки $z''\in\tau_1^{-1}((1:0))$ существует точка $z'\in\tau_1^{-1}((1:a))$, такая, что $d(z',z'')\leqslant m_2/8$.

Обозначим через c_1 полуалгебраически связную компоненту (см. [12]) множества $C\cap\{x\in\mathbb{P}^n(\overline{K'})\setminus\mathcal{Z}(X_0)\ :\ |(g/X_0)(x)|^2\leqslant m_1\}=S_{m_1}$, такую, что $y\in c_1$. Обозначим через c_2 объединение всех полуалгебраически связных компонент c' множества S_{m_1}, таких, что $c'\neq c_1$. Тогда, очевидно, $c_1\subset C_1$, для всех $z'\in c_1$, $z''\in c_2$ выполнено неравенство $d(z',z'')\geqslant(3/4)m_2$ и $c_1\cap\mathcal{Z}(g)=\{y\}$.

Для всякого полуалгебраического множества $A\subset\mathbb{P}^n(\overline{K'})\setminus\mathcal{Z}(X_0)$ и $z'\in\mathbb{P}^n(\overline{K'})\setminus\mathcal{Z}(X_0)$ расстояние $d(z',A)=\inf\{d(z',z'')\ :\ z''\in A\}$ является непрерывной функцией от z' относительно топологии вещественно замкнутого поля R, (см. [12]). Положим для всякого $0\neq a\in R$, $|a|\leqslant m_1$

$$\psi(a)=\sum_{z\in\widetilde{\tau}^{-1}(a)}d(z,c_2)\in R. \tag{18}$$

Тогда по теореме о неявной функции ψ – непрерывная функция от a относительно топологии вещественно замкнутого поля R (мы оставляем детали читателю).

Пусть $\varepsilon>0$ – бесконечно малая величина относительно поля $\overline{K'}$ и $\widetilde{R(\varepsilon)}$ – вещественное замыкание поля $R(\varepsilon)$. Тогда $\widetilde{R(\varepsilon)}$ – вещественное упорядоченное поле и определено отображение стандартной части $\mathrm{st}_\varepsilon\ :\mathbb{P}^n(\overline{K'(\varepsilon)})\to\mathbb{P}^n(\overline{K'})$. Очевидно, $\mathrm{st}_\varepsilon(\widetilde{C}(\overline{K'(\varepsilon)})=\widetilde{C}$. Поэтому $\mathrm{st}(\mathrm{st}_\varepsilon(\widetilde{C}(\overline{K'(\varepsilon)}))=C$. Мы расширяем основное поле K' до $K'(\varepsilon)$. Следовательно, сейчас $\psi\ :\{a\in\widetilde{R(\varepsilon)}\ :\ |a|\leqslant m_1\ \&\ a\neq 0\}\to\widetilde{R(\varepsilon)}$ является непрерывной функцией.

Покажем, что существует точка $\widetilde{y}_\varepsilon\in\widetilde{C}(\overline{K'(\varepsilon)})\cap\mathcal{Z}(g-\varepsilon X_0)$, такая, что $\widetilde{y}_\varepsilon$ бесконечно близка к y относительно поля k, т.е. $\mathrm{st}(\mathrm{st}_\varepsilon(\widetilde{y}_\varepsilon))=y$. Действительно, предположим противное. Тогда $\mathrm{st}(\mathrm{st}_\varepsilon(z))\in c_2$ для всякого $z\in\widetilde{\tau}^{-1}(\varepsilon)$ и, следовательно, $|\psi(\varepsilon)|\leqslant m_2/3$. С другой стороны, $C\cap\mathcal{Z}(g-m_1X_0)$ – конечное множество. Поэтому, как мы доказали, $\mathrm{st}(\widetilde{C}\cap\mathcal{Z}(g-m_1X_0))=C\cap\mathcal{Z}(g-m_1X_0)$. Мы имеем $c_1\cap\mathcal{Z}(g-m_1X_0)\setminus\mathcal{Z}(X_0)\neq\emptyset$ согласно выбору m_1 и m_2. Отсюда $\psi(m_1)\geqslant 2m_2/3$. Теперь образ интервала $\psi([\varepsilon,m_1])$ является полуалгебраически связным множеством в $\widetilde{R(\varepsilon)}$, см. [12]. Следовательно, $\psi([\varepsilon,m_1])$ содержит интервал $[\psi(\varepsilon),\psi(m_1)]\supset[m_2/3,2m_2/3]$, см. [12]. Поэтому существует $a\in[\varepsilon,m_1]$, такое, что $m_2/3 < \psi(a) < 2m_2/3$. Но $\psi(a) \geqslant 2m_2/3$, если $\mathrm{st}(\mathrm{st}_\varepsilon(z)) \in c_1$ по крайней мере для одного $z \in \widetilde{\tau}^{-1}(a)$, и в противном случае $\psi(a) \leqslant m_2/3$. Это противоречие доказывает существование $\widetilde{y}_\varepsilon$. Теперь положим $\widetilde{y} = \mathrm{st}_\varepsilon(\widetilde{y}_\varepsilon)$. Тогда, очевидно, $\widetilde{y} \in \widetilde{C} \cap \mathcal{Z}(g)$ и $\mathrm{st}(\widetilde{y}) = y$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть поле K' – такое же, как и выше. Пусть $\widetilde{W_i} \subset \mathbb{P}^n(\overline{K'})$ (соответственно $\widetilde{W_i} \subset \mathbb{A}^n(\overline{K'})$), $i = 1, 2$, – проективные (соответственно аффинные) алгебраические многообразия. Предположим, что все неприводимые компоненты многообразия $\widetilde{W_i}$ имеют одну и ту же размерность $n - s_i$, $i = 1, 2$. Положим $W_i = \mathrm{st}(\widetilde{W_i}) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ (соответственно $W_i = \mathrm{sta}(\widetilde{W_i}) \subset \mathbb{A}^n(\overline{k})$), $i = 1, 2$ (следовательно, размерность всякой неприводимой компоненты многообразия W_i равна $n - s_i$ по лемме 1). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пусть E – неприводимая над $\overline{k}$ компонента многообразия $W_1 \cap W_2$. Предположим, что $\dim E = n - s_1 - s_2 \geqslant 0$. Тогда существует неприводимая над $\overline{K'}$ компонента $\widetilde{E}$ многообразия $\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2}$, такая, что $\dim \widetilde{E} = n - s_1 - s_2$ и $\mathrm{st}(\widetilde{E}) \supset E$ (соответственно $\mathrm{sta}(\widetilde{E}) \supset E$).*

(b) *Предположим, что $\dim(W_1 \cap W_2) = n - s_1 - s_2$ (если $n - s_1 - s_2 < 0$, то пересечение пусто). Тогда $\mathrm{st}(\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2}) = W_1 \cap W_2$ (соответственно $\mathrm{sta}(\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2}) = W_1 \cap W_2$) и, следовательно, $\dim(\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2}) = n - s_1 - s_2$ (соответственно размерность всякой неприводимой компоненты $\widetilde{E}$ многообразия $\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2}$, такой, что $\mathrm{sta}(\widetilde{E}) \neq \emptyset$, равна $n - s_1 - s_2$) по лемме 1.*

Доказательство. Докажем утверждение (a). Согласно лемме 1, достаточно рассмотреть случай аффинных многообразий. Положим $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{A}^{2n}(\overline{k}) : x \in \mathbb{A}^n(\overline{k})\}$. Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ – координатные функции на $\mathbb{A}^{2n}(\overline{k})$, такие, что $\Delta = \mathcal{Z}(X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n)$. Положим $\delta_i = X_i - Y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Можно отождествить $W_1 \cap W_2 = (W_1 \times W_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ в $\mathbb{A}^{2n}(\overline{k})$ и $\widetilde{W_1} \cap \widetilde{W_2} = (\widetilde{W_1} \times \widetilde{W_2}) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ в $\mathbb{A}^{2n}(\overline{K'})$. Существуют неприводимые над $\overline{k}$ алгебраические многообразия $E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_n = E$, такие, что E_i является неприводимой компонентой пересечения $(W_1 \times W_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_i)$ и $\dim E_i = (n - s_1) + (n - s_2) - i$ для всякого $0 \leqslant i \leqslant n$.

Покажем, что существуют неприводимые над $\overline{K'}$ алгебраические многообразия $\widetilde{E}_0 \supset \widetilde{E}_1 \supset \ldots \supset \widetilde{E}_n = \widetilde{E}$, такие, что $\widetilde{E}_i$ является неприводимой компонентой пересечения $(\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_i)$, $\dim \widetilde{E}_i = (n - s_1) + (n - s_2) - i$ и $\mathrm{sta}(\widetilde{E}_i) \supset E_i$ для всякого $1 \leqslant i \leqslant n$. Мы используем индукцию по i. База индукции (случай $i = 0$) следует из равенства $\mathrm{sta}(\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) = W_1 \times W_2$ и леммы 1. Предположим, что мы доказали, что существуют $\widetilde{E}_0, \ldots, \widetilde{E}_i$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Тогда, очевидно,

$$E_{i+1} \subset \mathrm{sta}(\widetilde{E}_i) \cap \mathcal{Z}(\delta_{i+1}) \subset (W_1 \times W_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1}).$$

Следовательно, E_{i+1} является неприводимой компонентой пересечения $\mathrm{sta}(\widetilde{E}_i) \ \cap \mathcal{Z}(\delta_{i+1})$. Отсюда следует, что E_{i+1} – неприводимая компонента многообразия $\mathrm{sta}(\widetilde{E}_i \cap \mathcal{Z}(\delta_{i+1}))$ по лемме 2. Согласно лемме 1, существует неприводимая над $\overline{K'}$ компонента E' многообразия $\widetilde{E}_i \cap \mathcal{Z}(\delta_{i+1})$, такая, что $\mathrm{sta}(E') \supset E_{i+1}$. Тогда $\dim E' = \dim \widetilde{E}_i \cap \mathcal{Z}(\delta_{i+1}) = (n - s_1) + (n - s_2) - i - 1$ по лемме 1 и поскольку $\widetilde{E}_i$ неприводимо над $\overline{K'}$. Теперь

$$\begin{aligned} &E_{i+1} \subset \mathrm{sta}(E') \subset \mathrm{sta}((\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1})) \subset \\ &\subset (W_1 \times W_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, E_{i+1} – неприводимая компонента многообразия $\mathrm{sta}((\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1}))$. Мы имеем $E' \subset (\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1})$ и $\mathrm{sta}(E') \supset E_{i+1}$. Поэтому E' является неприводимой компонентой пересечения $(\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2) \cap \mathcal{Z}(\delta_1, \ldots, \delta_{i+1})$ по лемме 1. Теперь можно положить $\widetilde{E}_{i+1} = E'$. Существование $\widetilde{E}_0, \ldots, \widetilde{E}_n$ доказано по индукции. Утверждение (a) доказано.

Докажем утверждение (b). Очевидно, $\mathrm{st}(\widetilde{W}_1 \cap \widetilde{W}_2) \subset W_1 \cap W_2$ (соответственно $\mathrm{sta}(\widetilde{W}_1 \cap \widetilde{W}_2) \subset W_1 \cap W_2$). Так что можно предполагать без ограничения общности, что $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Теперь утверждение (b) немедленно следует из утверждения (a). Лемма доказана.

Несколько лемм

В пункте (d) теоремы 1 работы [10] мы утверждаем, что $\mathcal{U}'_0$ – непустое открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(r+1)(n-s+1)}(\overline{k})$ (напомним, что там $s = \sigma$). В следующей лемме мы рассматриваем аналогичную, но более общую ситуацию.

Ниже мы не используем лемму 4 и лемму 6. Но все же мы решили оставить их здесь для полноты.

Лемма 4. *Пусть $E \subset W$ – произвольное замкнутое в топологии Зариского подмногообразие и E' – замыкание в W' образа $p(E \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r))$. Предположим, что $\dim E' \leqslant n - i$, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Пусть $L'_0, L'_{i+1}, \ldots, L'_n \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_r]$ – линейные формы и $e'_w = L'_w(e_0, \ldots, e_r)$ для всех w. Обозначим через $p_{E,L'}$: $E \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{i+1}, \ldots, e'_n) \to \mathbb{P}^{n-i}(\overline{k})$, $(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{i+1}, \ldots, e'_n)$, регулярный морфизм. Пусть E_1 – произвольная неприводимая над $\overline{k}$ компонента многообразия E. Обозначим через E'_1 (соответственно E''_1) замыкание относительно топологии Зариского образа $p(E_1 \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r))$ (соответственно $p_{E,L'}(E_1 \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{i+1}, \ldots, e'_n))$). Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(a) *$E \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{i+1}, \ldots, e'_n) = E \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, и для всякой неприводимой компоненты E_1 многообразия E выполнено равенство $\dim E''_1 = \dim E'_1$.*

(b) *$(E \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{i+1}, \ldots, e'_n) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, и для всякой неприводимой компоненты E_1 многообразия E выполнено равенство $\dim E''_1 = \dim E'_1$.*

(c) *$E' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{i+1}, \ldots, L'_n) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^r(\overline{k})$.*

Далее, обозначим через $\mathcal{U}_{E,i}$ подмножество всех $(n-i+1)$–наборов $(L'_0, L'_{i+1}, \ldots, L'_n) \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-i+1)}(\overline{k})$, удовлетворяющих условиям (a), (b) *и* (c). *Тогда $\mathcal{U}_{E,i}$ является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathbb{A}^{(r+1)(n-i+1)}(\overline{k})$.*

Доказательство. Очевидно, утверждения (a) и (b) эквивалентны, и (c) влечет (a). Покажем, что (a) влечет (c). Мы используем индукцию по $j = n - i$. Если $j = 0$, то утверждение леммы тривиально. Случай $j = 1$ будет рассмотрен отдельно. Если $j > 1$, то на индукционном шаге случай j сводится к случаю $j - 1$. Для произвольного i мы будем предполагать без ограничения общности, что E неприводимо над $\overline{k}$. Пересекая E с подходящим линейным подпространством коразмерности $\dim E - \dim E'$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, мы будем предполагать без ограничения общности, что $\dim E = \dim E' = n - i_1$ (здесь мы оставляем детали читателю). Заменяя $L'_0, L'_{i+1}, \ldots, L'_n$ на $n - i_1 + 1$ подходящих линейных комбинаций этих линейных форм, мы будем считать, не умаляя общности, что выполняется условие (a) с i_1 вместо i. Так что без ограничения общности в начале индукционного шага (а также для $j = 1$) мы предполагаем, что $i_1 = i$ и E неприводимо над $\overline{k}$. Следовательно, морфизм $p_{E,L'}$ – доминантный. В конце индукционного шага снова может получиться общий случай, когда E не обязательно неприводимо над $\overline{k}$.

Предположим, что $j = 1$. Пусть $\xi' \in E' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_n)$. Мы будем предполагать, не умаляя общности, что $X_0(\xi) \neq 0$. Пусть $\widetilde{E}$ – нормализация многообразия E. Тогда (см. [2]) мы имеем регулярный морфизм $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to E'$, который является композитом естественной проекции $\pi : \widetilde{E} \to E$ и морфизма $E \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to E'$, индуцированного p. Так как $\widetilde{E}$ и E являются полными многообразиями, $\widetilde{p}(\widetilde{E}) = E'$. Следовательно, существует $\widetilde{\xi} \in \widetilde{E}$, такое, что $\widetilde{p}(\widetilde{\xi}) = \xi'$. Положим $\xi = \pi(\widetilde{\xi})$. Тогда, очевидно, $\xi \in E \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_n) \setminus \mathcal{Z}(e_0)$. Это противоречие доказывает лемму для $j = n - i = 1$.

Предположим, что $j > 1$ и $E' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n) = F \neq \emptyset$. Предположим, что $\dim F < n - i - 1$ (соответственно $\dim F = n-i-1$). Пусть L''_{i+1} – линейная комбинация форм $L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n$ (соответственно $X_0, \dots, X_r$) с коэффициентами из $\overline{k}$. Обозначим $e''_{i+1} = L''_{i+1}(e_0, \dots, e_r)$. Выберем L''_{i+1} так, что $\dim E' \cap \mathcal{Z}(L''_{i+1}) = \dim E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1}) = n - i - 1$, морфизм $E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1}) \to E' \cap \mathcal{Z}(L''_{i+1})$, индуцированный p, является доминантным; морфизм $E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1}) \to \mathcal{Z}(L''_{i+1}) = \mathbb{P}^{n-i-1}(\overline{k})$, индуцированный $p_{E,L'}$, является доминантным; и, если $\dim F = n-i-1$, то $\dim F \cap \mathcal{Z}(L''_{i+1}) = n-i-2$ (это все – условия общего положения для L''_{s+1} в обоих рассматриваемых случаях). Заметим, что $E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1}) \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) = E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1}) \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{i+1}, \dots, e'_n)$ и $E' \cap \mathcal{Z}(L''_{i+1}) \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n) \neq \emptyset$. Существуют подходящие линейные комбинации $L''_0, L''_{i+2}, \dots, L''_n$ линейных форм $L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n$, такие, что выполняется условие (a) с $i+1$, $E \cap \mathcal{Z}(e''_{i+1})$ и $L''_0, L''_{i+2}, \dots, L''_n$ вместо i, E и $L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n$. Далее, $E' \cap \mathcal{Z}(L''_{i+1}) \cap \mathcal{Z}(L''_0, L''_{i+2}, \dots, L''_n) \neq \emptyset$. Таким образом, по индукции мы получаем противоречие. Следовательно, (a) влечет (c). Эквивалентность утверждений (a), (b) и (c) доказана.

Теперь последнее утверждение леммы следует из работы [3] (а также [7, раздел 7]). Лемма доказана.

Лемма 5 (Критерий доминантности морфизма). *Пусть $\pi : V_1 \to V_2$ – определенный над k морфизм определенных над k алгебраических многообразий. Предположим, что все неприводимые компоненты многообразия V_1 имеют одну и ту же размерность n_1, и*

V_2 – неприводимое над k алгебраическое многообразие размерности n_2. Пусть $n_1 \geqslant n_2$. Пусть $z \in V_2$. Предположим, что для всякой неприводимой над k компоненты E многообразия V_1 существует неприводимая над k (или, что эквивалентно, неприводимая над $\overline{k}$) компонента E_1 слоя $\pi^{-1}(z)$, такая, что $E_1 \subset E$ и $\dim E_1 = n_1 - n_2$. Тогда морфизм π – доминантный. В частности, если V_1 неприводимо над k и $\dim \pi^{-1}(z) = n_1 - n_2$, то морфизм π – доминантный.

Доказательство. Это следует из теоремы о размерности слоев, см. [1], а также введение.

Лемма 6. *Пусть $\sigma + 1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$. Тогда множество всех $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}'_\alpha$, таких, что $J^{(1)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = J_i^{(1)}$ для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$ является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathcal{U}'_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}'_\alpha$. Расширим основное поле k до $k_{\overline{v}}$, см. введение. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_{n-\alpha+\sigma+1}) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k_{\overline{v}}})$ – общее линейное подпространство. Следовательно, пересечение $\mathcal{L}$ и

$$W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \cup (W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r))$$

трансверсально. В частности, по теореме 1 работы [10] число элементов $\#(W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \cap \mathcal{L})$ конечно. Далее, e'_α не обращается в нуль ни в какой точке из $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \cap \mathcal{L}$.

Положим $E = W \cap \mathcal{L}$. Размерность всякой неприводимой компоненты многообразия E равна $\alpha - \sigma - 1$. Как легкое следствие теоремы 1 работы [10], алгебраическое многообразие $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1})$ имеет непустое пересечение с каждой неприводимой над $\overline{k}$ компонентой многообразия W. Следовательно, то же самое справедливо для алгебраического многообразия $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \cap \mathcal{L}$. Поэтому по лемме 5 морфизм $E \setminus \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_\alpha) \to \mathbb{P}^{\alpha-\sigma-1}(\overline{k_{\overline{v}}})$, $(X_0 : \dots : X_n) \mapsto (e'_{\sigma+1} : \dots : e'_\alpha)$, является доминантным. Заменим в формулировке леммы 4 элемент $(L'_0, L'_{i+1}, \dots, L'_n)$ на $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$ (следовательно, $n - i + 1$ заменяется на $\alpha - \sigma - 1$). Тогда условие (a) леммы 4 выполняется с такой заменой в том и только в том случае, если для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$ для всякого $j \in J_i^{(1)}$ алгебраическое многообразие W_j является неприводимой компонентой пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_\alpha)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из леммы 4. Лемма доказана.

Лемма 7. *В обозначениях из введения пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1} \dots, L'_n)$, *где все* $L'_j \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$ *– линейные формы. Пусть* $j \in J_i^{(1)}(L') \cap J_i^{(1)}$ *(т.е.* W_j *– неприводимая компонента многообразий* $W_i^{(1)}(L')$ *и* $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ *одновременно) для некоторого* $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n+1$. *Тогда* $\iota_j(L') \geqslant \iota_j$, *см. формулу (7) из введения. Далее, пусть* $\sigma+1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$ *– целое число. Обозначим через* $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})} \subset \mathcal{U}'_\alpha$ *подмножество всех* $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha)$, *таких, что* $J_i^{(1)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) = J_i^{(1)}$ *для всех* $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$ *и* $\iota_j(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = \iota_j$ *для всех* $j \in J_i^{(1)}$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. *Тогда* $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$ *– определенное над* k *непустое открытое в топологии Зариского подмножество в* $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$. *Наконец, для любой прямой* $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$, *такой, что* $\mathfrak{l} \cap \mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})} \neq \emptyset$, *число элементов* $\#(l \setminus \mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})})$ *ограничено сверху полиномом от* $d^n(d')^{n-\sigma}$.

Доказательство. Положим $L'_{n+1} = L'_0$ и $l'_{n+1,\nu} = l'_{0,\nu}$ для всех $0 \leqslant \nu \leqslant r$, см. введение.

Пусть $\mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})$ имеет координатные функции $Z_{\beta,\nu}$, $\sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i$, $0 \leqslant \nu \leqslant r$. Пусть $z'_i \in \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})$ (соответственно $z_i \in \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K})$) – точка с координатами $Z_{\beta,\nu} = l'_{\beta,\nu}$ (соответственно $Z_{\beta,\nu} = u_{\beta,\nu}$) для всех β, ν, где $l'_{\beta,\nu}$ (соответственно $u_{\beta,\nu}$) – коэффициенты линейных форм L'_ν (соответственно U_ν), см. введение. Рассмотрим следующие алгебраические подмногообразия в $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K})$:

$$
\begin{aligned}
E^{(1)} &= W \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k}),\\
E^{(2)} &= \mathcal{Z}\Big(\sum_{0\leqslant\nu\leqslant r} Z_{\beta,\nu} e_\nu, \quad \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i\Big),\\
E^{(3)} &= \mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - l'_{\beta,\nu}, \quad \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i,\ 0 \leqslant \nu \leqslant r),\\
E^{(4)} &= \mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - u_{\beta,\nu}, \quad \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i,\ 0 \leqslant \nu \leqslant r).
\end{aligned}
$$

Заметим, что $E^{(\gamma)}$ для $\gamma = 1, 2, 3$ определены над $\overline{k}$. Многообразие $W_j \times \{z'_i\}$, $j \in J_i^{(1)}(L')$, является неприводимой компонентой пересечения $E^{(1)} \cap E^{(2)} \cap E^{(3)}$, и коразмерность многообразия $W_j \times \{z'_i\}$ равна сумме коразмерностей многообразий $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ (все коразмерности рассматриваются в $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K})$), т.е. последнее пересечение является собственным в $W_j \times \{z'_i\}$.

Для произвольных алгебраических многообразий V', V'' пусть $i(V', V''; V''')$ – индекс пересечения алгебраических многообразий

V' и V'' в неприводимой компоненте V''' многообразия $V' \cap V''$, когда этот индекс определен (см. [2]). Обозначим через W_γ, $\gamma \in \Gamma_i$, семейство всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент пересечения $E^{(1)} \cap E^{(2)}$. Пусть $\Gamma_j \subset \Gamma_i$ – подмножество всех γ, таких, что $W_\gamma \supset W_j \times \{z_i'\}$. Существует $\gamma_j \in \Gamma_j$, такое, что $W_{\gamma_j} = W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})$. Обозначим через W_γ, $\gamma \in \Gamma_j'$ семейство всех неприводимых компонент многообразия $\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$, таких, что $W_\gamma \supset W_j$. Далее, поскольку z_i – общая точка $\mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})$, алгебраическое многообразие $W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K})$ является единственной неприводимой компонентой E многообразия $E^{(1)} \cap E^{(2)}$, такой, что E содержит $W_j \times \{z_i\}$.

Теперь (см. [2]), согласно свойствам индексов пересечения (главным образом по свойству, соответствующему ассоциативности пересечения), мы имеем

$$
\begin{aligned}
&i(W, \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i); W_j) = i(E^{(1)}, \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i) \times \{z_i'\}; W_j \times \{z_i'\}) = \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_j'} i(E^{(1)}, W_\gamma \times \{z_i'\}; W_j \times \{z_i'\}) i(E^{(2)}, E^{(3)}; W_\gamma \times \{z_i'\}) = \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_j} i(E^{(1)}, E^{(2)}; W_\gamma) i(W_\gamma, E^{(3)}; W_j \times \{z_i'\}) \geqslant \\
&\geqslant i(E^{(1)}, E^{(2)}; W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})) \times \\
&\times i(W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k}), E^{(3)}; W_j \times \{z_i'\}) = \\
&= i(E^{(1)}, E^{(2)}; W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{k})) = \\
&= i(E^{(1)}, E^{(2)}; W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K})) \times \\
&\times i(W_j \times \mathbb{A}^{(r+1)(i-\sigma)}(\overline{K}), E^{(4)}; W_j \times \{z_i\}) = \\
&= i(E^{(1)}, \mathcal{Z}(u_{\sigma+1}, \dots, u_i) \times \{z_i\}; W_j \times \{z_i\}) = \\
&= i(W, \mathcal{Z}(u_{\sigma+1}, \dots, u_i); W_j).
\end{aligned}
$$

Пусть $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$ (соответственно $L' \in \mathcal{U}_{n+1}^{(\mathrm{IV})}$) и $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Тогда $\Gamma_j = \{\gamma_j\}$ для всех $j \in J_i^{(1)}$ и $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Следовательно, для всякого $j \in J_i^{(1)}$ для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$ существует $w_j \in W_j$, такое, что $(w_j, z_i') \notin W_\gamma$ для всякого $\gamma \in \Gamma_i \backslash \{\gamma_j\}$. Обозначим через $p_{\alpha,i} : \mathcal{U}'_\alpha \to \mathcal{U}'_i$ естественную проекцию. Множество $z \in \mathcal{U}'_\alpha$, таких, что $(w_j, p_{\alpha,i}(z)) \notin W_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma_i \setminus \{\gamma_j\}$, $j \in J_i^{(1)}$, $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant \alpha$, является окрестностью относительно топологии Зариского точки z'_α. Эта окрестность содержится в $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$. Если расширить основное поле k до K, то $(U_{\sigma+1}, \dots, U_\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$. Следовательно, $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})} \neq \emptyset$. Очевидно, $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ и, следовательно, определено над k.

Чтобы доказать последнее утверждение, мы будем предполагать, что $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \ell \cap \mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$. По теореме Безу $\sum_{\gamma\in\Gamma_i} \deg W_\gamma \leqslant d^s(d')^{i-\sigma}$ для $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Следовательно, по теореме 1(d) работы [10] существует не более чем полиномиальное от $d^n(d')^{n-\sigma}$ число точек $z \in \ell$, таких, что $z \notin \mathcal{U}'_\alpha$ или $(w_j, p_{\alpha,i}(z)) \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma_i\setminus\{\gamma_j\}} W_\gamma$ для некоторых $j \in J_i^{(1)}$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Лемма доказана.

Лемма 8. *В обозначениях из введения пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1} \dots, L'_n)$, *где все* $L'_j \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$ *– линейные формы. Тогда* $D_i(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) \leqslant D_i$ *для* $i \leqslant n$ *и* $\iota_j(L') = \iota_j$ *для всякого* $j \in J_{n+1}^{(1)}$ *(напомним, что* $D_{n+1}(L') = D_{n+1} = 0$ *и* $J_{n+1}^{(1)}(L') \subset J_{n+1}^{(1)}$, *см. введение). Предположим, что* $j \in J_i^{(1)}(L') \cap J_i^{(1)}$ *(т.е.* W_j *– неприводимая компонента многообразий* $W_i^{(1)}(L')$ *и* $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ *одновременно) для некоторого* $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n$ *и* $\iota_j(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) > \iota_j$. *Тогда* $D(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) < D_i$.

Доказательство. Мы будем предполагать без ограничения общности, что коэффициенты линейных форм $U_{\sigma+1}, \dots, U_\alpha$ принадлежат полю с вещественной структурой (т.е. поле $\overline{K}$ снабжено вещественной структурой) и бесконечно близки к соответствующим коэффициентам форм $L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha$. Очевидно, условие (8) из введения выполняется для U и K (вместо L' и k) и поэтому справедливо условие (10) из введения для U и K. Теперь, согласно определениям и лемме 3, справедливо включение $\mathrm{st}(W_i(U_{\sigma+1}, \dots, U_i)) \supset W_i(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Следовательно, по лемме 1 имеем $D_i \geqslant D_i(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$.

Далее, пусть $j \in J_i^{(1)}$ и $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n+1$. Предположим, что $\iota_j(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) > \iota_j$, если $i \leqslant n$, и $\iota_j(L') > \iota_j$, если $i = n+1$. Мы будем использовать обозначения из доказательства леммы 7. Существует $\gamma \in \Gamma_j \setminus \{\gamma_j\}$, см. доказательство леммы 7. Положим $\widetilde{W} \times \{z_i\} = W_\gamma \cap \mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - u_{\beta,\nu},\ 0 \leqslant \nu \leqslant r, \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i)$, где $\widetilde{W} \subset \mathbb{P}^n(\overline{K})$. Тогда $\widetilde{W} \neq W_j$, так как иначе $\gamma = \gamma_j$. Очевидно, $\widetilde{W}$ неприводимо над $\overline{k}(u)$ и $\dim \widetilde{W} = n - i + \sigma - s$.

Положим $\iota = i-\sigma+s$. Выберем линейные формы $L_0, L_{\iota+1}, \dots, L_n \in k[X_0, \dots, X_n]$ (это семейство линейных форм зависит от i, что не приведет к двусмысленности) так, что пересечение многообразий $W_\gamma \cap \mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - l'_{\beta,\nu},\ 0 \leqslant \nu \leqslant r,\ \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i)$ и $\mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$ трансверсально,

$$\mathrm{st}(\widetilde{W}) \cap \mathcal{Z}(L_0, L_{\iota+1}, \dots, L_n) = \emptyset, \tag{19}$$

$$W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i) \cap \mathcal{Z}(L_0, L_{\iota+1}, \dots, L_n) = \emptyset, \tag{20}$$

$$\begin{gathered} W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n) \cap \\ \cap\, (\mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \cup (\,\overline{V \setminus W}\,)) = \emptyset, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \#(W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)) = \\ = \deg(W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i)) \end{gathered} \tag{22}$$

(это – условия общего положения для линейных форм $L_0, L_{\iota+1}, \dots, L_n$; некоторые из этих условий будут использованы позже в доказательстве следующих лемм).

Применим леммы 3 и 1 к алгебраическим многообразиям $W_\gamma \setminus \mathcal{Z}(L_0)$ и $\mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - u_{\beta,\nu},\ 0 \leqslant \nu \leqslant r,\ \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i) \setminus \mathcal{Z}(L_0)$. Мы получаем $\mathrm{st}(\widetilde{W}) \times \{z'_i\} = W_\gamma \cap \mathcal{Z}(Z_{\beta,\nu} - l'_{\beta,\nu},\ 0 \leqslant \nu \leqslant r,\ \sigma+1 \leqslant \beta \leqslant i) \supset W_j \times \{z'_i\}$. Следовательно, $\mathrm{st}(\widetilde{W}) \supset W_j$. Далее, $\mathrm{st}(\widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)) = \mathrm{st}(\widetilde{W}) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n) \supset W_j \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$ согласно лемме 3 и равенству (19). Выберем точки $\xi_j \in W_j \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$ и $\widetilde{\xi}_j \in \widetilde{W} \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$, такие, что $\mathrm{st}(\widetilde{\xi}_j) = \xi_j$.

Теперь $\mathrm{st}(\widetilde{W}) \supset W_j$, $\widetilde{W} \neq W_j$, $\dim \widetilde{W} = \dim W_j$, см. выше. Следовательно, $\widetilde{W} \not\subset \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$, так как W_j – неприводимая компонента многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$. Поэтому, если $i = n+1$, то мы получаем противоречие, из которого следует, что $\iota_j(L') = \iota_j$. В оставшейся части доказательства $i \leqslant n$. Так как условие (10) из введения справедливо для U и K, то $\widetilde{W}$ является объединением некоторых компонент многообразия $W(U_{\sigma+1}, \dots, U_i)$, неприводимых над $\overline{K}$.

Мы доказали, что $\mathrm{st}(W(U_{\sigma+1}, \dots, U_i)) \supset W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(W(U_{\sigma+1}, \dots, U_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)) \supset \\ \supset W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n) \end{aligned}$$

по леммам 1 и 3. Поэтому для всякой точки $\xi \in W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$ существует такая точка $\widetilde{\xi} \in W(U_{\sigma+1}, \dots, U_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$, что $\widetilde{\xi}$ бесконечно близка к ξ. Заметим, что $\mathrm{st}(\widetilde{\xi}_j) = \xi_j \notin W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ согласно соотношению (21). Следовательно, по теореме Безу $D_i > D(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$, если $i \leqslant n$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $\sigma + 1 \leqslant \alpha \leqslant n + 1$ – целое число, $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$ – множество из формулировки леммы 7 и $\mathcal{U}''_\alpha$ – множество, определенное во введении. Тогда $\mathcal{U}''_\alpha$ является определенным над k непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{IV})}$. Далее, пусть $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-s)}(\overline{k})$ – прямая, такая, что $\mathfrak{l} \cap \mathcal{U}''_\alpha \neq \emptyset$. Тогда число элементов $\#(\mathfrak{l} \setminus \mathcal{U}''_\alpha)$ ограничено сверху полиномом от $d^n(d')^{n-\sigma}$.*

Доказательство. Напомним, что $D_n = D_n(L')$ для всякого $L' \in \mathcal{U}'_0$ и $D_{n+1}(L') = D_{n+1} = 0$, см. введение. Следовательно, достаточно доказать лемму для $\alpha \leqslant n-1$. Напомним, что V_v и W_v определены, см. введение. Заменяя при необходимости (V, W, k) на (V_v, W_v, k_v), в оставшейся части доказательства мы будем предполагать без ограничения общности, что $s = \sigma$.

Теперь существуют линейные формы $L_0, L_{s+2}, \dots, L_n \in k[X_0, \dots, X_r]$, такие, что для всякого $s+1 \leqslant i \leqslant \alpha$ выполнены условия (20)–(22) и дополнительно

- пересечение $W \cap \mathcal{Z}(L_{i+1}, \dots, L_n)$ трансверсально и является определенным над k и неприводимым над k алгебраическим многообразием.

Множество U''_α непусто, так как, если расширить основное поле k до K, то $(U_{s+1}, \dots, U_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha(\overline{K})$. Теперь два последних утверждения леммы следуют из теоремы 1(d) работы [10], примененной к морфизмам

$$W \cap \mathcal{Z}(L_{i+1}, \dots, L_n) \to \mathbb{P}^r(\overline{k}),$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e_0 : \ldots : e_r), \quad s+1 \leqslant i \leqslant \alpha,$$

где $W \cap \mathcal{Z}(L_{i+1}, \dots, L_n)$ рассматривается как неприводимая компонента алгебраического многообразия $V \cap \mathcal{Z}(L_{i+1}, \dots, L_n)$ (вместо компоненты W многообразия V). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\sigma + 1 \leqslant \alpha \leqslant n + 1$ – целое число. Пусть $(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'_0$ и $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \in \mathcal{U}''_{\alpha-1}$. Пусть $\mathfrak{l} \subset$*

$\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ – *прямая, такая, что* $(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathfrak{l}$. *Тогда существует не более чем полиномиальное от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *число элементов* $L'' = (L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n) \in \mathfrak{l}$, *таких, что не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

- $(L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n) \in \mathcal{U}'_0$,
- $(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{\alpha-1}) \in \mathcal{U}''_{\alpha-1}$,
- $D_\alpha(L'') \geqslant D_\alpha(L')$.

Доказательство. Мы будем считать, не умаляя общности, что $\alpha \leqslant n$. Аналогично доказательству леммы 9, мы будем предполагать без ограничения общности, что $s = \sigma$. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 9, утверждения (d) теоремы 1 из работы [10] и леммы 13 из работы [10]. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\sigma+1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$ – *целое число и* $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha$. *Пусть поле* K' *и отображение стандартной части* st – *из раздела 1. Расширим основное поле* k *до* K'. *Пусть* $L''_{\sigma+1}, \dots, L''_\alpha \in \overline{K'}[X_0, \dots, X_r]$ – *линейные формы, такие, что все ненулевые коэффициенты линейных форм* $L''_j - L'_j$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant \alpha$, *являются бесконечно малыми величинами относительно поля* k. *Положим* $L''_0 = L''_{n+1}$ *и* $L'' = (L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n)$, *если* $\alpha = n+1$. *Тогда для всех* $\sigma \leqslant i \leqslant \alpha$

$$\mathrm{st}(W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i)) = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i), \tag{23}$$
$$\mathrm{st}(W^{(2)}(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i)) = W^{(2)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i). \tag{24}$$

Доказательство. Согласно лемме 9 и принципу переноса, $(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha$. Следовательно,

$$\deg W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i) = \deg W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = D_i$$

для всех $\sigma \leqslant i \leqslant \alpha$.

Согласно леммам 1 и 3, справедливо включение $\mathrm{st}(W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i)) \supset W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Поэтому равенство (23) выполняется по лемме 1, так как $\deg W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i) = \deg W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$.

В частности, мы имеем

$$\mathrm{st}(W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{i-1}, L'_i)) = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$$

и

$$\mathrm{st}(W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{i-1}) = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}).$$

Далее, $W^{(1)}(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{i-1}, L'_i) = W^{(1)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$, см. введение. Всякая неприводимая компонента E многообразия $W^{(2)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ (соответственно $W^{(2)}(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_i)$) является неприводимой компонентой пересечения $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i)$ (соответственно $W(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i)$), такой, что $E \subset W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ и E не является неприводимой компонентой пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$. Теперь равенство (24) следует из леммы 2 и предыдущих замечаний. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть* $\sigma + 1 \leqslant \alpha \leqslant n + 1$ *– целое число. Пусть* $(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}''_0$ *и* $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \in \mathcal{U}'''_{\alpha-1}$. *Пусть* $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ *– прямая, такая, что* $(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathfrak{l}$. *Тогда существует не более чем полиномиальное от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *число элементов* $L'' = (L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n) \in \mathfrak{l}$, *таких, что не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

- $(L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n) \in \mathcal{U}''_0$,
- $(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_{\alpha-1}) \in \mathcal{U}'''_{\alpha-1}$,
- $D^{(2)}_\alpha(L'') \geqslant D^{(2)}_\alpha(L')$.

В частности, $D^{(2)}_\alpha(L') \leqslant D^{(2)}_\alpha$. *Множество* $\mathcal{U}'''_\alpha$ *является определенным над* k *непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в* $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$.

Доказательство. Пусть поле K' и отображение st – такие же, как и выше. Расширим основное поле k до K'. Предположим сначала, что $(L''_{\sigma+1}, \dots, L''_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha$ и все ненулевые коэффициенты линейных форм $L''_j - L'_j$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant \alpha$, являются бесконечно малыми величинами относительно поля k. Тогда в силу леммы 11, леммы 1 и равенства (24) имеем $D^{(2)}_\alpha(L') \leqslant D^{(2)}_\alpha(L'')$.

Теперь предположим, что $K' = K$ и семейство всех коэффициентов линейных форм L''_j, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant \alpha$, алгебраически независимо над k, Мы получаем, что $D^{(2)}_\alpha(L') \leqslant D^{(2)}_\alpha$. Далее, множество $\mathcal{U}'''_\alpha$ непусто, поскольку $(U_{\sigma+1}, \dots, U_\alpha) \in \mathcal{U}'''_\alpha(\overline{K})$, если $\alpha \leqslant n$ (соответственно $U \in \mathcal{U}'''_\alpha$, если $\alpha = n+1$).

Нетрудно доказать, что можно задать $\mathcal{U}'''_\alpha$ формулой с кванторами теории первого порядка алгебраически замкнутых полей (мы оставляем детали читателю). Следовательно, $\mathcal{U}'''_\alpha$ является конструктивным множеством (см. определение в [2]). Как мы доказали, всякая точка $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_\alpha) \in \mathcal{U}'''_\alpha$ имеет бесконечно малую относительно k окрестность $\mathcal{W}_0$ в $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{K})$, такую, что

$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{U}'''_\alpha$. Очевидно, что для основного поля $\mathbb{C}$ любое конструктивное множество $\mathcal{W}$ аффинного пространства открыто в топологии Зариского этого аффинного пространства при условии, что $\mathcal{W}$ содержит окрестность в классической топологии произвольной его точки. Теперь из принципа переноса (см. [12]) следует, что в нашей ситуации $\mathcal{U}'''_\alpha$ – открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$.

Остается доказать первое утверждение леммы. Пусть $\varepsilon > 0$ – бесконечно малая величина относительно поля k. Теперь предположим, что $K' = \overline{k(\varepsilon)}$. Используя индукцию по α и лемму 10, достаточно доказать, что $D^{(2)}_\alpha(L'') < D^{(2)}_\alpha(L')$ для не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа точек $L'' \in \mathfrak{l}$. Пусть $L' = (L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathfrak{l}$ и $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{\alpha-1}) \in \mathcal{U}'''_{\alpha-1}$. Предположим, что $\widetilde{L} = (\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n) \in \mathfrak{l}(\overline{k(\varepsilon)})$ и $\widetilde{L}_j = L'_j + \varepsilon L'''_j$, где $L'''_j \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$ – линейные формы для всех $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. Тогда $\widetilde{L}$ – общая точка прямой $\mathfrak{l}$.

Пусть линейные формы $L_{\alpha+1}, \dots, L_n$ – такие же, как выше, и $i = \alpha$, $\iota = \alpha - \sigma + s$. Тогда выполняется равенство (22) с $i = \alpha$. Поэтому, согласно равенству (22) и лемме 2, примененной $n - \alpha$ раз, имеем

$$+\infty > \#(W^{(2)}_\alpha(\widetilde{L}) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)) \geqslant D^{(2)}_\alpha(L').$$

Пусть ξ – произвольная точка из $W^{(2)}_\alpha(\widetilde{L}) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)$ и, скажем, $X_0(\xi) \neq 0$. Применяя, например, алгоритм из работы [4] или непосредственно получаем, что неоднородные координаты $(X_w/X_0)(\xi) = P_w(\varepsilon, \theta)/P(\varepsilon, \theta)$, $1 \leqslant w \leqslant n$, где θ – алгебраический над $\overline{k}(\varepsilon)$ элемент с минимальным многочленом $0 \neq g \in \overline{k}[\varepsilon, Z]$, $g(\varepsilon, \theta) = 0$, и $P_w, P \in k[\varepsilon, Z]$. Далее, степени относительно ε, Z всех многочленов P_w, P, g ограничены сверху полиномом от $d^s(d')^{i-\sigma}$. Следовательно, рассматривая специализации общей точки, мы получаем по теореме 1 из [10] (или непосредственно), что число элементов $L'' \in \mathfrak{l}$, таких, что $D^{(2)}_\alpha(L'') < D^{(2)}_\alpha(L')$, ограничено сверху полиномом от $d^n(d')^{n-\sigma}$. Лемма доказана.

Литература

1. Л. Мамфорд, *Алгебраическая геометрия.* I. *Комплексные проективные многообразия.* — М.: Мир (1979).
2. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* — М.: Мир (1981).

3. В. Ходж, Д. Пидо, *Методы алгебраической геометрии*, т. 1. — М.: Изд-во иностранной литературы (1954).
4. А. Л. Чистов, *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **137** (1984), 124–188.
5. А. Л. Чистов, *Вычисление степеней алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики за полиномиальное время и его приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **258** (1999), 7–59.
6. А. Л. Чистов, *Сильная версия основного разрешающего алгоритма для экзистенциональной теории первого порядка вещественно замкнутых полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **256** (1999), 168–211.
7. А. Л. Чистов, *Эффективная конструкция локальных параметров неприводимых компонент алгебраического многообразия.* — Труды Санкт-Петербургского мат. общества **7** (1999), 230–266.
8. А. Л. Чистов, *Эффективная гладкая стратификация алгебраического многообразия в нулевой характеристике и ее приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 254–311.
9. А. Л. Чистов, *Монодромия и критерии неприводимости с алгоритмическими приложениями в нулевой характеристике.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 130–152.
10. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 189–235.
11. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 181–224.
12. J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie Algébrique Réelle.* — Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1987).
13. A. L. Chistov, *Polynomial-time computation of the dimensions of components of algebraic varieties in zero-characteristic.* — J. Pure Appl. Algebra **117, 118** (1997), 145–175.

Chistov A. L. Polynomial-time computation of the degree of a dominant morphism in zero characteristic. III.

Consider a projective algebraic variety W which is an irreducible component of the set of all common zeros of a family of homogeneous polynomials of degrees less than d in $n+1$ variables in zero characteristic. Consider a dominant rational morphism from W to W' given by homogeneous polynomials of degree d'. We suggest algorithms for constructing objects in general position related to this morphism. These algorithms are deterministic and polynomial in $(dd')^n$ and the size of the input.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: alch@pdmi.ras.ru

Поступило 18 марта 2007 г.