Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 344, 2007 г.

Ф. В. Петров

ОЦЕНКИ ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЯХ

Введение

Обозначим через L_n множество узлов решетки $\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right)^d$. Положим $\mathcal{L}_n = \cup_{m=1}^{n} L_m$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ через $k_n(A)$ обозначим количество элементов множества $A \cap L_n$, а через $K_n(A)$ – количество элементов множества $A \cap \mathcal{L}_n$.

Для двух величин u, v будем писать $u \leqslant_d v$, если $u \leqslant C_d \cdot v$ для некоторой константы $C_d > 0$, зависящей только от размерности d.

В работах Вершика [2] и Барани [3] обнаружена связь асимптотики целочисленных многогранников и понятия аффинной площади поверхности (на плоскости – аффинной длины кривой). Развивая эту связь, мы дадим (окончательный начиная с размерности 5) ответ на вопрос, заданный автору С. В. Конягиным, о поведении $k_n(\gamma)$ и $K_n(\Gamma)$ не при *сколь угодно больших* значениях n, а при *всех достаточно больших* n. Оказывается, что $\liminf k_n(\gamma)/\log n < \infty$ при $d = 2$ и $\liminf k_n(\gamma)/n^{d-2} < \infty$ при $d \geqslant 3$.

Я глубоко признателен А. М. Вершику за введение в этот круг вопросов и многочисленные полезные обсуждения. Я также признателен С. В. Конягину за постановку вопроса о поведении $k_n(\Gamma)$ "в нижнем пределе" и другие полезные обсуждения и Э. Лютваку за ценные консультации по аффинной геометрии. Кроме того, я благодарен Н. В. Цилевич за тщательное редактирование рукописи.

1. Предварительные сведения: аффинная площадь поверхности

Если $K \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый компакт с достаточно гладкой границей, то его аффинная площадь поверхности $as(K)$ определяется как

$$as(K) = \int\limits_{\partial K} \kappa^{1/(d+1)} d\mu,$$

где κ – гауссова кривизна, а μ – мера Лебега ($(d-1)$-мерная мера Хаусдорфа) на ∂K.

Название обусловлено тем, что аффинная площадь поверхности не меняется при аффинных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^d$ с определителем 1 (а при гомотетии с коэффициентом λ умножается на $\lambda^{d(d-1)/(d+1)}$).

Нам понадобится следующее простое неравенство:

$$as(K) \leqslant_d V(K)^{\frac{d-1}{d+1}} \tag{1.1}$$

Доказательство основано на аффинной инвариантности as. Не умаляя общности, $V(K) = 1$ (обе части имеют одинаковую степень однородности). Как известно, любое тело объема 1 можно заключить в симплекс объема не больше чем C_d (константа C_d зависит только от d). Переводя этот симплекс в правильный аффинным преобразованием с определителем 1, мы получим компакт с площадью поверхности не более C_d и той же аффинной площадью поверхности. Теперь применим очевидное неравенство $\kappa^{\frac{1}{d+1}} \leqslant \kappa + 1$ и получим, что

$$\int\limits_{\partial K} \kappa^{\frac{1}{d+1}} \leqslant \int\limits_{\partial K} \kappa + \int\limits_{\partial K} 1 \leqslant_d 1$$

(первый интеграл не зависит от K по теореме Гаусса–Бонне, второй есть площадь поверхности K, которую мы уже оценили). Неравенство доказано.

Заметим, что если поверхность K гладкая лишь в нескольких местах, то аналогичное неравенство верно для интеграла от $\kappa^{1/(d+1)}$, взятого "по этим местам".

Имеется много (апостериори совпадающих) обобщений этого понятия на произвольные выпуклые компакты. См., например, работу Вернер [5] и приведенную там библиографию.

Введем несколько понятий. Если K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$, будем называть K-шапкой пересечение K и некоторого (аффинного) полупространства в $\mathbb{R}^d$. Дном $bottom(H)$ шапки H будем называть пересечение K с границей определяющей H гиперплоскости. Если два полупространства отличаются параллельным переносом, соответствующие шапки будем называть похожими. Одна из двух похожих шапок содержится в другой, соответственно будем называть их меньшей и большей похожими шапками.

Нам понадобится следующее определение аффинной площади поверхности произвольного выпуклого тела [5].

Для $t > 0$ определим плавающее тело K_t как множество точек $x \in K$, не принадлежащих ни одной шапочке объема меньшего чем t. Это есть выпуклый компакт, непустой при достаточно малых t. Предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{V(K)-V(K_t)}{t^{\frac{2}{d+1}}}$$

будем называть аффинной площадью поверхности $as(K)$ выпуклого тела K. Оказывается, что этот предел существует для всех выпуклых тел. Для гладких тел он совпадает (с точностью до множителя, зависящего только от размерности) с аффинной площадью поверхности (см. [5]).

Нам понадобится также следующая лемма о покрытии шапочками ([7, лемма 4]).

Лемма 1.1. *Для достаточно малого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0(d)$ существует такое покрытие границы ∂K выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ шапочками $H_1, H_2, \dots, H_n$, что*

(i) *объем $V(H_i)$ каждой шапочки не больше ε;*

(ii) *найдутся такие попарно непересекающиеся подмножества $C_i \subset H_i$, что $V(C_i) \geqslant_d \varepsilon$.*

Пусть сначала $as(K) > 0$. Выберем $\varepsilon < \varepsilon_0(d)$ таким, что $V(K) - V(K_\varepsilon) < 2as(K)\varepsilon^{\frac{2}{d+1}}$. Затем выберем покрытие, удовлетворяющее условиям леммы. Тогда из условия (ii) имеем

$$n\varepsilon \leqslant_d V(K) - V(K_t) \leqslant_d as(K)\varepsilon^{\frac{2}{d+1}}.$$

Значит,

$$\sum V(H_i)^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d n\varepsilon^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d as(K).$$

Аналогично, если $as(K) = 0$, то можно найти шапочки H_i, покрывающие границу K, такие, что

$$\sum V(H_i)^{\frac{d-1}{d+1}} = o(1).$$

Мы доказали следующее предложение.

Предложение 1.2. *Поверхность выпуклого тела K можно покрыть конечным числом шапочек H_i так, что*

$$\sum V(H_i)^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d as'(K),$$

где $as'(K) = as(K)$, если $as(K) > 0$, и $as'(K)$ – любое положительное число, если $as(K) = 0$.

Замечание. Как указал автору Э. Лютвак, множество строго выпуклых тел с положительной аффинной площадью поверхности имеет первую категорию Бэра (в смысле метрики Хаусдорфа) [6].

2. Оценка объема выпуклой оболочки "сильно непересекающихся" множеств

Сильно непересекающимися назовем несколько выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, ни одно из которых не пересекается с выпуклой оболочкой остальных. Здесь мы докажем ключевое для последующего неравенство, связывающее объемы сильно непересекающихся выпуклых множеств и объем их выпуклой оболочки

Нам потребуется следующее техническое утверждение.

Лемма 2.1. *Если H – некоторая шапка, то найдется меньшая похожая шапка H_1 и выпуклая поверхность $\Gamma \subset H_1$, такая, что $\Gamma \cup bottom(H_1)$ есть замкнутая выпуклая поверхность и $as(\Gamma) \geqslant_d V(H)^{\frac{d-1}{d+1}}$. Здесь под as понимается интеграл от $\kappa^{1/(d+1)}$, взятый по какому-то гладкому куску поверхности Γ. В действительности $as(\Gamma)$ будет разве что больше.*

Доказательство. Пусть дно шапки H лежит в гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_d = 0\}$, $H \subset \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_d \geqslant 0\}$. Пусть h – высота шапки H (наибольшая x_d-координата точек шапки H), пусть она достигается в точке A, и пусть S – наибольший $(d-1)$-мерный объем горизонтальных (параллельных дну) сечений H. Тогда $V(H) \leqslant S \cdot h$. Заметим, что найдется сечение T шапки H объемом $\geqslant_d S$ на высоте не большей $h/2$. Это следует из выпуклости вверх корня $(d-1)$-ой степени из объема сечения как функции высоты (последнее равносильно неравенству Брунна–Минковского). Заменим H на похожую шапку, дно которой есть T. Объем этой новой шапки, очевидно, не меньше чем $C_d \cdot V(H)$. Обозначим за H эту новую шапку и будем доказывать лемму для нее.

Впишем в T симплекс X наибольшего объема. Не умаляя общности, можно считать, что центроид этого симплекса есть начало координат, и тогда T содержится в симплексе $X' := -(d-1)X$:

$$X \subset T \subset X' := -(d-1)X.$$

Рассмотрим d-мерный симплекс $Y = \mathrm{conv}(X, A)$ и больший симплекс $Y' = \mathrm{conv}(X', A)$. Поскольку условие леммы инвариантно относительно действия аффинных преобразований, можно считать симплекс Y' правильным с расстоянием между вершинами 1 (или другим фиксированным симплексом). Объем шапки H будет порядка константы. Рассмотрим выпуклую поверхность Γ_0 внутри Y', образующую вместе с X' замкнутую выпуклую поверхность. Выберем Γ_0 так, чтобы гауссова кривизна в тех ее точках, которые лежат внутри Y, существовала и была положительной. Рассмотрим выпуклый компакт K_1, являющийся выпуклой оболочкой $\Gamma_0 \cap Y$ и T. В качестве Γ возьмем $\partial K_1 \setminus T$. По построению поверхность Γ содержит некоторый гладкий кусок Γ_0 с положительной гауссовой кривизной, поэтому она удовлетворяет требуемой оценке на аффинную площадь.

Пусть H_i, $i = 1, \ldots, n$, – непересекающиеся K-шапки, $V_i = V(H_i)$.

Докажем следующее неравенство:

$$\sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d V^{\frac{d-1}{d+1}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Впишем в каждую шапку H_i поверхность Γ_i так, чтобы выполнялись условия леммы. Тогда левая часть будет не больше аффинной площади поверхности выпуклой оболочки $\mathrm{conv}\, \cup_i \Gamma_i$, которая в свою очередь не больше чем $C_d \cdot V^{\frac{d-1}{d+1}}$ согласно неравенству (1.1).

Основным утверждением этого параграфа является следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый компакт, выпуклые компакты $F_i \subset K$, $i = 1, \ldots, n$, таковы, что ни один компакт F_i не пересекается с выпуклой оболочкой остальных. Обозначим $V_i =$*

$V(F_i)$, $V = V(K)$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d V^{\frac{d-1}{d+1}}.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $K = \operatorname{conv} \cup F_i$. Для каждого множества F_i рассмотрим гиперплоскость, отделяющую его от всех остальных множеств. Эта гиперплоскость отделяет некоторую K-шапку H_i, содержащую F_i. Пусть A_i – самая высокая (в смысле расстояния до плоскости дна) точка шапки H_i. Ясно, что $A_i \in F_i$. Обозначим через H_i' похожую на H_i меньшую шапку, дно которой втрое ближе к точке A_i, чем дно шапки H_i. Поскольку H_i' содержит гомотетичный с коэффициентом $1/3$ образ множества F_i, имеем оценку $V(H_i') \geqslant_d V(F_i)$. Докажем, что шапки H_i' не пересекаются. Предположим противное – некоторая точка x смогла попасть в шапки H_1' и H_2'. Проведем в точке A_1 гиперплоскость, параллельную дну шапки H_1, и обозначим за $f(\cdot)$ функцию расстояний до этой гиперплоскости. Пусть $f(x) = 1$; тогда вне шапки H_1 имеем $f \geqslant 3$. Точка x лежит в выпуклой оболочке множеств F_i. Значит, найдутся неотрицательные числа λ_i с суммой 1 и точки $x_i \in F_i$, такие, что $x = \sum \lambda_i x_i$. Применяя к этому равенству функцию f, получаем

$$1 = f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \sum_{i \geqslant 2} f(x_i) \geqslant 3(\lambda_2 + \lambda_3 + \dots),$$

откуда $\lambda_1 \geqslant 2/3$. Аналогично, $\lambda_2 \geqslant 2/3$, и мы получаем противоречие. Осталось применить неравенство (2.1) к шапкам H_i'.

3. Оценки количества рациональных точек на поверхности

Теорема 3.1. *Пусть K – выпуклый многогранник с N вершинами в $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$V(K) \geqslant_d N^{\frac{d+1}{d-1}} \cdot \min V_i,$$

где V_i – объемы всевозможных симплексов с вершинами в вершинах многогранника K.

Доказательство. Для каждой вершины A_i рассмотрим многогранник K_i, являющийся выпуклой оболочкой остальных вершин. Пусть X_i – грань многогранника K_i, такая, что A_i и K_i лежат по разные стороны от X_i. Обозначим через Y_i выпуклую оболочку

$\mathrm{conv}(A_i, K_i)$. Рассмотрим для каждого i многогранник Y_i', гомотетичный Y_i с центром A_i и коэффициентом $1/3$. Заметим, что каждая точка многогранника Y_i представима как линейная комбинация точек A_i, причем коэффициент при A_i не меньше чем $2/3$. Докажем, что Y_i' не пересекается с выпуклой оболочкой остальных Y_j'. Пусть $i = 1$. В выпуклой оболочке множеств Y_2, Y_3, … каждая точка x представима как выпуклая комбинация вершин A_i многогранника K, причем коэффициент при вершине A_1 не больше чем $1/3$ (это верно для каждого из множеств X_2, X_3, … по отдельности, а стало быть, и для их выпуклой оболочки.) Значит, расстояние от x до плоскости X_1 не больше трети расстояния до этой плоскости от точки A_1 (расстояние считаем со знаком так, чтобы в точке A_1 оно было положительным, а в остальных вершинах неположительным). А в многограннике Y_1 расстояние до этой плоскости не меньше двух третей расстояния до нее от точки A_1. Осталось применить лемму 2.2.

Следствие 1 (Эндрюс [4]). *Пусть K – выпуклый многогранник с N целыми вершинами в $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$V(K) \geqslant_d N^{\frac{d+1}{d-1}}.$$

Доказательство сразу следует из теоремы и того факта, что объем d-мерного симплекса кратен $1/d!$.

Следствие 2. *Пусть K – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$ с N вершинами, координаты которых рациональны и не превосходят m. Тогда*

$$V(K) \geqslant_d N^{\frac{d+1}{d-1}} \cdot m^{-(d+1)}.$$

Доказательство. Для некоторого d-мерного симплекса X рассмотрим $d+1$ векторов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_d, 1)$, сопоставленных вершинам $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ симплекса. Определитель, составленный из этих векторов, равен $\pm V(X)/d!$. Если все вершины рациональны, то этот определитель есть целое число, деленное на произведение знаменателей. Если все знаменатели не больше m, то определитель не меньше чем $m^{-(d+1)}$. Осталось воспользоваться теоремой 3.1.

Замечание. По существу, теорема 3.1 была доказана в [4], хотя там она не была явно сформулирована и использовалась лишь в случае следствия 1.

Теорема 3.2. *Пусть V есть объем выпуклой оболочки поверхности Γ. При $d \geqslant 2$ для достаточно больших $n > N(\Gamma)$ выполняется оценка*

$$K_n(\Gamma) \leqslant_d n^{d-1} \cdot V^{\frac{d-1}{d+1}}; \tag{3.1}$$

при $d \geqslant 3$ найдется сколь угодно большое n, такое, что

$$k_n(\Gamma) \leqslant_d n^{d-2} \cdot V^{\frac{d-1}{d+1}}. \tag{3.2}$$

При $d = 2$ для ограниченной строго выпуклой кривой γ, площадь выпуклой оболочки которой равна S, найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$k_n(\gamma) \leqslant_2 \log n \cdot S^{1/3}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из следствия 2 теоремы 3.1 (если соответствующие рациональные точки не образуют многогранника, то действуем индукцией по размерности). Второе утверждение следует из первого и формулы включений и исключений:

$$\sum_{m=1}^{n} k_m(\Gamma) = K_n(\Gamma) + K_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\Gamma) + K_{\left[\frac{n}{3}\right]}(\Gamma) + \dots + K_1(\Gamma) \leqslant_d U_d(n) \cdot V^{\frac{d-1}{d+1}}, \tag{3.4}$$

где $U_2(n) = n \log n$, $U_d(n) = n^{d-1}$ при $d \geqslant 3$.

Действительно, обозначая через $k_n^*(\Gamma)$ количество точек множества $(\Gamma \cap L_n) \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, несложно видеть, что обе (первая и вторая) части формулы (3.4) равны следующему выражению: $\sum\limits_{s=1}^{n} k_s^*(\Gamma) \left[\frac{n}{s}\right]$.

Осталось заметить, что при $d \geqslant 3$ ряд $\sum k^{-(d-1)}$ сходится, а при $d = 2$ его частичные суммы растут логарифмически.

Из неравенства (3.4) имеем

$$\frac{n}{2} \cdot \min_{n/2 \leqslant m \leqslant n} k_m(\gamma) \leqslant_d U_d(n),$$

откуда следуют оценки (3.2), (3.3).

С помощью леммы 1.1 можно усилить теорему 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть as есть аффинная площадь поверхности выпуклой оболочки ограниченной строго выпуклой поверхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. В случае $d = 2$ обозначим за al аффинную длину данной ограниченной строго выпуклой кривой γ. При $d \geqslant 2$ для достаточно больших $n > N(\Gamma)$ выполняется оценка*

$$K_n(\Gamma) \leqslant_d n^{d-1} \cdot as';$$

для $d \geqslant 3$ при достаточно больших n выполняется оценка

$$k_n(\Gamma) \leqslant_d n^{d-2} \cdot as'.$$

При $d = 2$ при достаточно больших n для ограниченной строго выпуклой кривой γ, площадь выпуклой оболочки которой равна S, имеем

$$k_n(\gamma) \leqslant_2 \log n \cdot al'.$$

Здесь as' обозначает as, если $as > 0$, и любое положительное число, если $as = 0$, и аналогичное соглашение имеет место для al.

Доказательство. Выберем покрытие поверхности выпуклого тела $\operatorname{conv}(\Gamma)$ шапочками, удовлетворяющее условиям предложения 1.2, и применим к каждой шапочке теорему 3.2.

Аналогично доказывается, что при *любом* достаточно большом значении n выполняется оценка

$$k_n(\Gamma) \leqslant_d as' \cdot n^{\frac{d(d-1)}{d+1}},$$

где as' имеет тот же смысл, что и в теореме 3.3. В [9] доказано, что на плоскости $k_n(\gamma) = o(n^{2/3})$.

4. О точности оценок теоремы 3.2

Предыдущие параграфы относились скорее к геометрии. Здесь мы обратимся к арифметике.

Оценки (3.1) и (3.2) точны начиная с $d = 2$ и $d = 5$ соответственно. Примером поверхности, на которой максимально много рациональных точек, является единичная сфера.

Теорема 4.1. *Для единичной сферы $\Gamma = S^{d-1}$ с центром в нуле имеют место следующие оценки снизу:*

$$K_n(S^{d-1}) \geqslant_d n^{d-1} \tag{4.1}$$

для $d \geqslant 2$ *и*

$$k_n(S^{d-1}) \geqslant_d n^{d-2} \tag{4.2}$$

для $d \geqslant 5$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $d = 2$. Каждой несократимой правильной дроби $t = a/b$, $b < \sqrt{n}/2$, соответствует точка $(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2))$ на единичной окружности со знаменателем не больше n. При этом разным дробям соответствуют разные точки. Поскольку несократимых дробей со знаменателем $\leqslant n$ не меньше чем cn^2, получаем оценку $K_n(S^1) \geqslant c \cdot n$.

Перейдем к случаю $d \geqslant 3$. Пусть $A(n)$ обозначает количество решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = y^2$ в целых числах, не превосходящих по модулю n, и $B(n) = K_n(S^{d-1})$. Тогда

$$A(n) = B(n) + B(n/2) + B(n/3) + \dots$$

(это равенство доказывается аналогично формуле (3.4)). Кроме того, $B(n) \leqslant C_d n^{d-1}$ для некоторой константы C_d – это следует из неравенства (3.1) для $\Gamma = S^{d-1}$. Отсюда получаем, что если $A(n) \geqslant C'_d \cdot n^{d-1}$ для некоторой константы C'_d, то $B(n) \geqslant_d n^{d-1}$. В самом деле, выберем такое $N > 0$, что $C_d \sum\limits_{k>N} k^{1-d} < C'_d/2$. Тогда

$$NB(n) \geqslant B(n) + B(n/2) + \dots + B(n/N) = A(n) - \sum_{k>N} B(n/k) \geqslant_d n^{d-1}.$$

Таким образом, достаточно показать, что $A(n) \geqslant_d n^{d-1}$. Для $n \geqslant 4$ заметим, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = y^2$ при каждом нечетном y имеет хотя бы $c_d \cdot |y|^{d-1}$ решений в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Действительно, при $d = 4$ количество решений по теореме Якоби равно учетверенной сумме делителей n. Если $d > 4$, то, выбирая произвольные четные $x_5, x_6, \ldots, x_d$ в промежутке $[0, |y|/d]$, мы сможем затем подобрать подходящие x_1, x_2, x_3, x_4 хотя бы $|y|$ способами. Суммируя по всем нечетным y, получаем требуемую оценку.

Также заметим, что при $d \geqslant 5$ уравнение $x_1^2 + \ldots + x_d^2 = n^2$ при любом n имеет хотя бы $C_d \cdot n^{d-2}$ решений. Достаточно выбрать произвольные $x_5, x_6, \ldots, x_d$ подходящей четности в промежутке $[0, |y|/d]$, а затем подобрать подходящие x_1, x_2, x_3, x_4 – хотя бы $|y|$ способами. Это доказывает оценку (4.2).

Теперь рассмотрим подробнее случай $d = 3$. Обозначим за $C(x)$ количество упорядоченных пар $\{z_1, z_2\}$ взаимно простых целых гауссовых чисел, таких, что $\max(|z_1|, |z_2|) \leqslant x$. Так, $C(x) = 0$ при $x < 1$. Заметим, что общее количество $D(x)$ упорядоченных пар гауссовых чисел, не превосходящих по модулю x, равно

$$D(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}[i]}' C(x/|z|),$$

где суммирование производится по всем ненулевым гауссовым целым, причем из чисел $\{a, -a, i \cdot a, -i \cdot a\}$ выбирается ровно одно (то есть фактически суммирование производится по ненулевым идеалам в $\mathbb{Z}[i]$). Это сразу видно, если заметить, что количество пар с НОД, равным a, равно $C(x/|a|)$.

Поскольку $D(x)$ растет как $\pi^2 x^4$, а ряд $\sum_{z\in\mathbb{Z}[i]} |z|^{-4}$ сходится, аналогично рассуждению с $A(n)$ и $B(n)$ получаем, что $C(x) \geqslant cx^4$ при $x > 1$.

Рассмотрим пару $\theta = \{z_1, z_2\}$ взаимно простых гауссовых чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c - di$, для которых $A := a^2 + b^2 < n/2$, $B := c^2 + d^2 < n/2$. Обозначим $u = (a + bi)(c - di) = (ac + bd) + (bc - ad)i$. Паре θ поставим в соответствие решение $x_1 = 2(ac + bd) = 2\Re u$, $x_2 = 2(bc - ad) = 2\Im u$, $x_3 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = A - B$, $y = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = A + B$ уравнения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y^2$ в целых числах, по модулю меньших n. Заметим, что одно и то же решение ставилось в соответствие не более чем шестнадцати различным парам θ. Действительно, зная x_1, x_2, x_3, y, можно восстановить значения чисел A, B, u. Из взаимной простоты z_1 и z_2 следует, что НОД$(A, u) = a + bi$, НОД$(B, u) = c - di$. То есть числа z_1, z_2 определены с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[i]$.

По доказанному количество таких пар θ не меньше чем $c \cdot n^2$, что и требовалось.

5. Другие последовательности мелких сеток

Ограничимся рассмотрением плоского случая.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть задана последовательность натуральных индексов $s_1 < s_2 < \ldots$. Насколько быстро может расти последовательность $k(s_n; \gamma)$ с ростом n (здесь мы переобозначили $k_m(\gamma) \to k(m, \gamma)$ во избежание двойных индексов)? Оказывается, что ответ зависит не только от скорости роста последовательности $\{s_n\}$, но и от ее арифметических свойств.

Предъявим две квадратично растущие последовательности, для которых ответ на вопрос о максимально возможном росте величины $k(s_n;\gamma)$ существенно различается.

Сначала рассмотрим последовательность $s_n = n^2$. Кривая $\gamma = \{(t,t^2), -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ показывает, что $k(s_n,\gamma)$ может расти как минимум линейно по n.

Теперь рассмотрим множество чисел вида $2^k \cdot m$, где $m \leqslant 2^k$ (то есть чисел, для которых наибольший нечетный делитель меньше, чем максимальная делящая число степень двойки). Назовем их милыми. Пронумеруем их: $2 = s_1 < s_2 < \ldots$.

Заметим, что количество милых чисел, не превосходящих 2^{2N}, не меньше 2^N (милыми являются все числа вида $2^N \cdot 1, 2^N \cdot 2, \ldots, 2^N \cdot 2^N$) и не больше чем 2^{N+1} (для каждого $k = 1, 2, \ldots, N-1$ найдется не более чем 2^k милых чисел, кратных 2^k, но не кратных 2^{k+1}; еще не более чем 2^N милых чисел кратны 2^N; итого имеется не более чем $2 + 2^2 + \cdots + 2^N < 2^{N+1}$ милых чисел). Отсюда следует, что s_n есть число порядка n^2.

Оценим сверху инфимум

$$\inf_{2^{2N-1} \leqslant m \leqslant 2^{2N}} k(m,\gamma)$$

для некоторой фиксированной ограниченной строго выпуклой кривой γ, взятый по всем милым числам m из указанного промежутка. Будем рассматривать только милые числа вида $2^N p$, где p – простое число из промежутка $(2^{N-1}, 2^N)$. Таких милых чисел хотя бы $c2^N/N$, где c – некоторая абсолютная константа. Назовем эти милые числа замечательными. Некоторые точки сеток L_k с замечательными k могут лежать на сетке L_{2^N}. Но их не более $C(\gamma) \cdot 2^{2N/3}$ (следствие 1 теоремы 3.2). Исключим их из рассмотрения. Теперь для всех различных замечательных k точки сеток L_k, лежащие на γ, различны. Заметим, что любые три такие точки образуют треугольник площади не менее чем $1/(2 \cdot 2^{2N} p_1 p_2 p_3) \geqslant 2^{-5N-1}$ (доказательство аналогично доказательству следствия 2 теоремы 3.1). Отсюда следует, что общее количество точек с замечательными знаменателями не превосходит $C(\gamma) 2^{5N/3}$. Значит, для одного из замечательных знаменателей точек не более чем $C(\gamma) \cdot N \cdot 2^{2N/3}$.

Итак, для последовательности милых знаменателей оказывается, что $\liminf k(s_n,\gamma) \cdot \frac{1}{\log n \cdot n^{2/3}} < \infty$.

Этот пример показывает, что ответ на вопрос о возможном количестве точек мелких сеток на кривой зависит не только от размеров сеток, но и от их взаиморасположения. Поэтому естественно рассматривать не только сетки $L_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2$, но и сдвинутые сетки $L'_n = \mathbf{x}_n + \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2$, где $\mathbf{x}_n$ – некоторый вектор сдвига (выбираемый, вообще говоря, произвольно).

Здесь удалось доказать следующую оценку, намного более слабую, чем оценка (3.3) (которая соответствует случаю несдвинутых сеток).

Пусть L'_n – множество узлов некоторой сетки с шагом $1/n$ (вообще говоря, $0 \notin L'_n$), а γ – ограниченная строго выпуклая кривая на плоскости. Обозначим $k'_n(\gamma) = \#(L'_n \cap \gamma)$.

Теорема 5.1. *В этих обозначениях*

$$\liminf \frac{k'_n(\gamma)}{\log^{1/6} n \cdot \sqrt{n}} < \infty.$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.2. *Пусть $R, S > 1$. Тогда количество (не равных друг другу) треугольников с целыми вершинами, длины сторон которых не больше R, а площадь не больше S, не превосходит $C \cdot R^2 S$.*

Доказательство. Пусть начало координат точка O – одна из вершин треугольников. Зафиксируем вектор $\mathbf{x} = \overline{OA}$ одной из сторон и площадь. Рассмотрим третьи вершины этих треугольников. Они лежат на двух прямых, параллельных вектору $\mathbf{x}$, и расстояние между соседними возможными вершинами равно $|\mathbf{x}|$. Отрезки, высекаемые прямыми на окружности радиуса R, не больше чем $2R$. Поэтому количество способов выбрать вектор второй стороны есть $O(R/|\mathbf{x}|)$. Суммируя по парам $\{(\mathbf{x}$, значение площади$)\}$, получаем, что треугольников не больше чем

$$C \cdot S \sum_{|\mathbf{x}| \leqslant R} \frac{R}{|\mathbf{x}|}.$$

Последняя сумма, как нетрудно видеть, есть $O(R^2)$.

Доказательство теоремы 5.1. Идея доказательства состоит в следующем. Для каждой сетки, которая содержит много точек кривой γ, рассмотрим тройки последовательных точек этой сетки, лежащие на γ. Получится много треугольников с рациональными сторонами. Никакие три из них не гомотетичны. Применяя лемму 5.2, получаем требуемую оценку.

Приведем само доказательство. Будем рассматривать простые числа n в промежутке от N до $2N$. Их количество есть величина порядка $N/\log(N)$. Предположим, что для каждого такого n хотя бы $C\log^{1/6}(N)\sqrt{N}$ точек соответствующей сетки L'_n лежат на кривой γ (здесь C – большая зависящая от γ константа, которую мы выберем потом). Для каждого n рассмотрим треугольники, образованные тройками последовательных вершин из $L'_n \cap \gamma$. Сумма периметров этих треугольников при фиксированном n ограничена, как и сумма кубических корней из их площадей (лемма 2.2). По неравенству Чебышева хотя бы половина из этих треугольников имеет площадь не более $c/(\log^{3/10} N \cdot N^{3/2})$, а стороны не более $c/(\log^{1/6}(N)\sqrt{N})$ (здесь c – константа, которая мала, если C велика). Каждому такому треугольнику соответствует треугольник с целыми сторонами, не превосходящими $c\sqrt{N}/\log^{1/6} N$, и площадью, не превосходящей $c\sqrt{N}/\log^{3/6} N$. Все такие треугольники по всем рассматриваемым n будут различны. Общее количество целочисленных треугольников с такими ограничениями на стороны и площадь по лемме 5.1 не превосходит $cN^{3/2}/\log^{5/6} N$. С другой стороны, их хотя бы $CN^{3/2}/\log^{5/6} N$ – противоречие.

Вопросы

1. Как мы выяснили (доказательство следствия 2 теоремы 3.1), любые три точки множества $\mathcal{L}_n$ на плоскости либо коллинеарны, либо образуют треугольник площади хотя бы c/n^3. Рассмотрим точки множества $\mathcal{L}_n$, лежащие в единичном квадрате. Всего будет порядка n^3 точек. Как много из них можно отметить, чтобы никакие три не были коллинеарны? Уточненная гипотеза Гейлбронна утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ из K точек внутри единичного квадрата можно выбрать три, образующие треугольник площади не более чем $C_\varepsilon \cdot k^{\varepsilon-2}$ (возможно, вырожденный). Таким образом, из этой гипотезы следует, что отметить можно не больше чем $O(n^{3/2+\varepsilon})$ точек. С другой стороны, пример n^λ отмеченных точек при $\lambda > 3/2$ был бы и контрпримером к уточненной гипотезе Гейлбронна.

2. Для строго выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^d$ определим его модифицированную аффинную площадь поверхности как

$$\liminf \sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}},$$

где нижний предел берется по всем покрытиям поверхности K шапочками объемов V_i, максимальный из которых стремится к нулю.

Из леммы 1.1 и неравенства (1.1) следует, что модифицированная аффинная площадь поверхности $as_m(K)$ и аффинная площадь поверхности $as(K)$ удовлетворяют оценкам

$$as \leqslant_d as_m \leqslant as.$$

Кажется вероятным, что в действительности $as_m = C_d \cdot as$ для некоторой константы C_d, зависящей только от размерности, но не от K. Это определение аффинной площади поверхности было бы в ряде случаев удобным. Аналогичный вопрос можно задать и про нижний предел

$$\limsup_{\max V_i \to 0} \sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}},$$

взятый по всем наборам непересекающихся шапочек объемов V_i.

3. Вершик [2] доказал, что выпуклые многоугольники с вершинами на мелкой сетке, расположенные внутри данного квадрата F, концентрируются в окрестности кривой, содержащейся в F, имеющей максимальную аффинную длину (эта кривая образована четырьмя кусками парабол, вписанных в углы квадрата; Барани [3] обобщил этот результат на случай произвольного выпуклого многоугольника F). Естественно ожидать аналогичного явления и в старшей размерности. Первый вопрос, возникающий в связи с этим, – единственна ли выпуклая поверхность внутри данного многогранника (например, куба), реализующая максимум аффинной площади (существование такой поверхности несложно получить из соображений компактности и полунепрерывности снизу функционала as в метрике Хаусдорфа)?

4. Существует ли строго выпуклая кривая, для которой $\lim k_n(\gamma) = +\infty$? Эмпирические соображения подсказывают, что да, существует.

Литература

1. V. Jarník, *Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven.* — Math. Z. **24** (1926), 500–518.
2. А. Вершик, *Предельная форма выпуклых многоугольников.* — Функц. анал. и его прил. **28** (1994), 13–20.
3. I. Barany, *The limit shape of convex lattice polygons.* — Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 279–295.
4. G. E. Andrews, *A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points.* — Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 270–279.
5. E. Werner, *A general geometric construction for affine surface area.* — Studia Math. **132**, No. 3 (1999), 227–238.
6. P. M. Gruber, *Baire categories in convexity.* — In: Handbook of Convex Geometry, Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam (1993), pp. 1327–1346.
7. I. Barany, *The technique of M-regions and cap coverings: a survey.* — In: III International Conference in "Stochastic Geometry, Convex Bodies and Empirical Measures", Part II (Mazara del Vallo, 1999) (2000), pp. 21–38.
8. I. Barany, A. M. Vershik, *On the number of convex lattice polytopes.* — Geom. Funct. Anal. **2**, No. 4 (1992), 381–393.
9. Ф. В. Петров, *О количестве рациональных точек на строго выпуклой кривой.* — Функц. анал. и его прил. **40**, вып. 1 (2006), 30–42.

Petrov F. V. Estimates for the number of rational points on convex curves and surfaces.

Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded strictly convex surface. Denote by $k_n(\Gamma)$ the number of points in the set $\Gamma \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d$. We prove that $\liminf k_n(\Gamma)/n^{d-2} < \infty$ for $d \geqslant 3$ and $\liminf k_n(\Gamma)/\log n < \infty$ for $d = 2$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: fedorpetrov@mail.ru

Поступило 4 мая 2007 г.