Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 344, 2007 г.

Н. Е. Мнёв

О КОМБИНАТОРНЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ РАССЛОЕНИЯХ СТИНРОДА И ФРАГМЕНТАЦИИ ПОСЛОЙНОГО ГОМЕОМОРФИЗМА

Поддержано грантами РФФИ 05-01-00899 и НШ-4329.2006.1.

1. Введение

1.1. Регулярные клеточные (или шаровые) комплексы на кусочно-линейном многообразии X образуют частично упорядоченное множество (или "посет") по подразбиениям. Мы обозначаем это множество через $\mathbf{R}(X)$. Нам удобно использовать двойственный язык и рассматривать подразбиение $\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \mathtt{Q}_1$ шаровых комплексов как морфизм "геометрической сборки" с началом $\mathtt{Q}_0$ и концом $\mathtt{Q}_1$. Сопоставляя геометрическому шаровому комплексу $\mathtt{Q}$ на X комбинаторный шаровой комплекс $\mathbf{P}(\mathtt{Q})$, мы забываем геометрию и попадаем из частично упорядоченного множества шаровых комплексов в некоторую новую категорию $\mathfrak{R}(X)$, объекты которой – абстрактные шаровые комплексы, а морфизмы – "комбинаторные сборки". Комбинаторную сборку абстрактных шаровых комплексов $\mathfrak{Q}_0 \rightsquigarrow \mathfrak{Q}_1$ следует представлять себе как способ склеить абстрактные шары $\mathfrak{Q}_0$ в бóльшие шары так, чтобы получить комплекс $\mathfrak{Q}_1$. Заметим, такой способ может быть далеко не единственным.

Рисунок 1 должен давать представление о единственной геометрической сборке $\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \mathtt{Q}_1$ двух конкретных геометрических комплексов, а рис. 2 – о трех возможных комбинаторных сборках

$$\mathbf{P}(\mathtt{Q}_0) = \mathfrak{Q}_0 \rightsquigarrow \mathfrak{Q}_1 = \mathbf{P}(\mathtt{Q}_1).$$

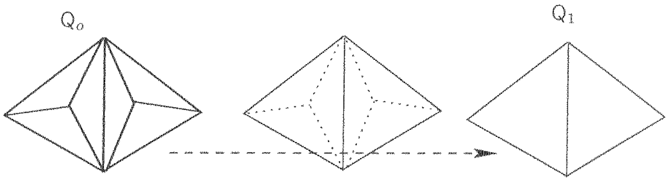


Рис. 1.

С функтором $\mathbf{P}$ связано клеточное отображение классифицирующих пространств $B\mathbf{R}(X) \xrightarrow{B\mathbf{P}} B\mathfrak{R}(X)$. Отображение $B\mathbf{P}$ имеет естественное описание в терминах действия группы кусочно-линейных гомеоморфизмов на шаровых комплексах на X. Это описание таково: действие кусочно-линейных гомеоморфизмов на множестве $\mathbf{R}(X)$ продолжается до клеточного действия дискретной группы $\mathrm{PL}^{\delta}(X)$ на $B\mathbf{R}(X)$:

$$\mathrm{PL}\,(X)^{\delta} \times B\mathbf{R}(X) \to B\mathbf{R}(X). \tag{1}$$

Клеточное пространство орбит $B\mathbf{R}(X)/\mathrm{PL}\,(X)^{\delta}$ этого действия есть в точности $B\mathfrak{R}(X)$, и проекция $B\mathbf{R}(X) \overset{B\mathbf{P}}{\to} B\mathfrak{R}(X)$ – проекция на клеточное пространство орбит. Отметим, что действие (1) в высшей степени несвободно.

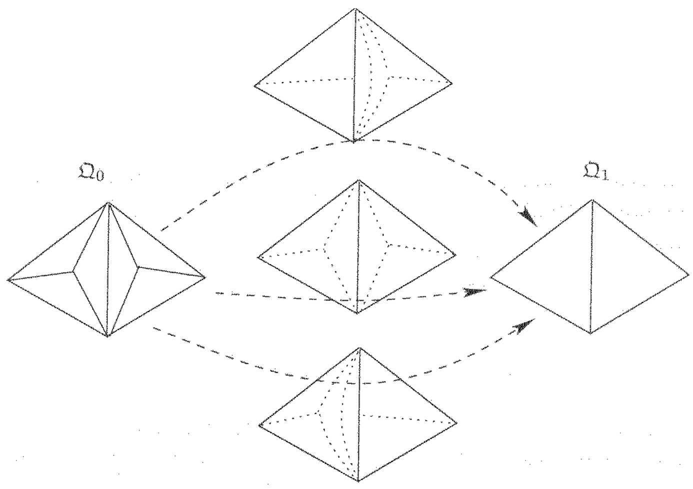


Рис. 2.

Категория $\mathfrak{R}(X)$ – естественный объект классической комбинаторной топологии многообразия X. Например, теорема Александера [2] о связности комбинаторных многообразий по звездным подразбиениям есть утверждение о том, что классифицирующее пространство $B\mathfrak{R}(X)$ категории $\mathfrak{R}(X)$ останется связным, если ограничиться более ручным классом морфизмов – “звездными сборками”. Обозначим через $\mathrm{PL}\,(X)$ симплициальную группу кусочно-линейных гомеоморфизмов X, обозначим через $|\mathrm{PL}\,(X)|$ геометрическую реализацию $\mathrm{PL}\,(X)$ в виде клеточной топологической группы. В работах по статистическим моделям TQFT хорошо известен простой факт, что

$$\pi_1 B\mathfrak{R}(X) \approx \pi_0|\mathrm{PL}\,(X)|. \tag{2}$$

Группа $\pi_0|\mathrm{PL}\,(X)|$ – это кусочно-линейная модулярная группа (или "mapping class group") многообразия X. Мы доказываем обобщение утверждения (2).

Теорема A ("О клеточной комбинаторной модели $B\mathrm{PL}\,(X)$"). *Пространства $B\mathfrak{R}(X)$ и $B\mathrm{PL}\,(X)$ гомотопически эквивалентны.*

То есть $\mathfrak{R}(X)$ – дискретная категория, представляющая распетливание симплициальной группы $\mathrm{PL}\,(X)$. В самом распетливании топологической (или симплициальной) группы с помощью дискретной категории нет ничего удивительного, таковое существует всегда, и даже с помощью дискретного моноида [21]. Источник вопросов и задач о дискретных категориях, представляющих распетливания классических пространств, – алгебраическая K-теория пространств, начиная со знаменитой работы Хатчера [11], содержавшей ряд предположений о таких моделях. Современный статус утверждений Хатчера автору не вполне понятен. Видимо, ближе всего к нашим теоремам теорема Стейнбергера [27, теорема 1, с. 12], уточняющая гипотезу Хатчера [11, предложение 2.5, с. 109] и утверждающая, что дискретная категория упорядоченных конечных симплициальных комплексов с морфизмами – монотонными отображениями со стягиваемыми прообразами классифицирует кусочно-линейные расслоения Серра.

Пусть $E\mathrm{PL}\,(X)$ – пространство универсального главного расслоения для группы $|\mathrm{PL}\,(X)|$, $|\mathrm{PL}\,(X)| \times E\mathrm{PL}\,(X) \to E\mathrm{PL}\,(X)$ – каноническое свободное действие и $E\mathrm{PL}\,(X) \to B\mathrm{PL}\,(X)$ – проекция на пространство орбит. Говоря неформально, мы доказываем, что несвободное действие дискретной группы $\mathrm{PL}^{\delta}(X)$ на триангуляциях выправляется, с точностью до гомотопии, в каноническое свободное действие топологической группы $|\mathrm{PL}\,(X)|$ на $E\mathrm{PL}\,(X)$. В такой форме наши результаты родственны циклу работ Левитта ([17]) по предъявлению моделей $B\mathrm{PL}$ в виде пространства орбит стягиваемого множества со свободным действием PL. В нашей модели, в отличие от ранее известных, происходит полное "вынесение за скобки" геометрии за счет учета гомотопии.

Если многообразие X ориентируемо, то аналогичное теореме A утверждение верно и для $\mathrm{PL}^{+}(X)$ – группы гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, с заменой категории морфизмов сборки $\mathfrak{R}(X)$, на категорию $\mathfrak{R}^{+}(X)$ морфизмов сборки, сохраняющих ориентацию.

Первые нетривиальные примеры, которые, видимо, следует считать классическими, возникают при $\dim X = 1$, если X – неориентированный отрезок I или ориентированная окружность S^1. В этом случае $\mathfrak{R}(I)^{\mathrm{op}}$ – это категория конечных ординалов и инъективных вложений, снабженная дополнительными морфизмами обращения порядка, а $(\mathfrak{R}(S^1)^+)^{\mathrm{op}}$ – категория циклически упорядоченных наборов точек и инъективных вложений (это “половина” циклической категории Конна). В этих случаях

$$B\mathfrak{R}(I) \approx B\mathrm{PL}\,(I) \approx \mathbb{R}P^\infty$$

и

$$B\mathfrak{R}(S^1)^+ \approx B\mathrm{PL}^+(S^1) \approx \mathbb{C}P^\infty.$$

Утверждение $B\mathfrak{R}(X) \approx B\mathrm{PL}\,(X)$ имеет тавтологическую переформулировку с помощью теории представимых гомотопических функторов. Эквивалентная теорема утверждает, что есть взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма кусочно-линейных расслоений со слоем X на полиэдре B и классами конкордантности $\mathfrak{R}(X)$-раскрасок триангуляций полиэдра B (вершины триангуляции раскрашиваются объектами, а ребра – морфизмами так, чтобы вышла коммутативная диаграмма). Таким образом возникает комбинаторика PL-расслоения и можно ставить, например, вопрос, об обобщении на PL-расслоения известных комбинаторных формул для характеристических классов комбинаторных многообразий.

Мы доказываем аналог теоремы A для подкатегории $\mathfrak{T}(X)$ категории $\mathfrak{R}(X)$, составленной из абстрактных симплициальных комплексов (т.е. классических комбинаторных многообразий).

Теорема B (“О симплициальной комбинаторной модели $B\mathrm{PL}\,(X)$”). *Пространства $B\mathfrak{T}(X)$ и $B\mathrm{PL}\,(X)$ гомотопически эквивалентны.*

Есть надежда на то, что существуют подкатегории $\mathfrak{R}(X)$, составленные из более ручных комбинаторных многообразий и комбинаторных сборок, для которых теорема остается верной. Например, наши конструкции, возможно, позволяют это доказать для многообразий Брауэра и линейно представимых сборок. В первоначальном проекте [4] минимальной подкатегорией $\mathfrak{R}(X)$, моделирующей $\mathrm{PL}\,(X)$, должна была стать категория локально звездных многообразий и звездных сборок. Это было бы верно, если бы была положительно решена знаменитая проблема [13, с. 14] о существовании общего геометрического звездного подразбиения двух триангуляций шара. Положительное решение этой проблемы следовало бы из “сильной гипотезы Ода” о разложении бирационального изоморфизма гладких торических многообразий. Двойственность между неособыми раздутиями торических многообразий и специальными звездными подразбиениями вееров торических многообразий как раз и породила бы необходимый нам результат. Однако в доказательстве гипотезы Ода, опубликованном в [23], обнаружилась неустранимая ошибка (см. [1]), и теперь утверждение уже кажется маловероятным. Тем не менее, для доказательства нашего факта было бы достаточно справедливости более слабой гипотезы, надежда на которую еще не утрачена.

Гипотеза. *Посет триангуляций симплекса, упорядоченных звездными подразбиениями, гомотопически тривиален.*

Автору неясно, является ли осмысленным двойственный вариант этой гипотезы для раздутий торических многообразий.

По всей видимости, аналог теорем A, B без особых изменений в доказательстве верен для самых общих компактных стратифицированных полиэдров X. Мы не останавливаемся на этом обобщении, выделяя только один, самый важный случай – случай сфер с отмеченной точкой, т.е. $X = (S^n, \{*\})$. По теореме Куипера–Лашофа [15] существует каноническое взаимно однозначное соответствие между кусочно-линейными n-микрорасслоениями Милнора, кусочно-линейными расслоениями Стинрода со слоем $\mathbb{R}^n$ и кусочно-линейными расслоениями Стинрода со слоем – парой $(S^n, \{*\})$. Таким образом, $B\mathrm{PL}_n \approx B\mathrm{PL}(\mathbb{R}^n) \approx B\mathrm{PL}(S^n, \{*\})$. Пользуясь эквивалентностью Куипера-Лашофа, мы, применяя нашу схему к $B\mathrm{PL}(S^n, \{*\})$, можем построить модель $B\mathrm{PL}_n$, в которой отображение Гаусса касательного расслоения комбинаторного многообразия получает канонический вид. Опишем эту модель. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ категорию с объектами – клеточными n-сферами с одной отмеченной старшей клеткой и морфизмами – комбинаторными сборками сфер, посылающими отмеченную клетку в отмеченную клетку (см. рис. 3).

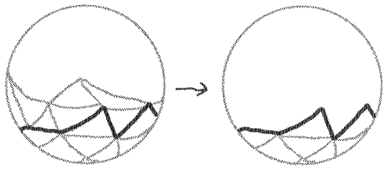


Рис. 3.

Теорема C (“О клеточной комбинаторной модели $B\mathrm{PL}_n$”). *Пространство $B\mathfrak{R}_n$ гомотопически эквивалентно $B\mathrm{PL}_n$.*

Для всякого комбинаторного многообразия $\mathtt{M}^n$ возникает функтор $\mathbf{G}$ из посета симплексов с обращенным порядком $(\mathbf{P}\mathtt{M}^n)^{\mathrm{op}}$ в $\mathfrak{R}_n$, относящий всякому симплексу его звезду с приклеенной по линку звезды клеткой, замыкающей звезду до n-сферы. Особенно легко вообразить себе $\mathbf{G}$ для комбинаторной сферы $\mathtt{S}^n$. Каждому симплексу $s \in \mathtt{S}^n$ сферы $\mathbf{G}$ сопоставляет n-мерную комбинаторную сферу $\mathbf{G}(s)$, получающуюся склеиванием всех симплексов $\mathtt{S}^n$, не лежащих в звезде s, в одну большую отмеченную клетку. Если $s_0 \subset s_1 \in \mathtt{S}$, то $\operatorname{star} s_0 \supset \operatorname{star} s_1$ и лишние симплексы $\mathbf{G}(s_0)$ растворяются в отмеченной клетке $\mathbf{G}(s_1)$, что и представляет морфизм сборки $\mathbf{G}(s_0 \subset s_1)$ (см. рис. 4).

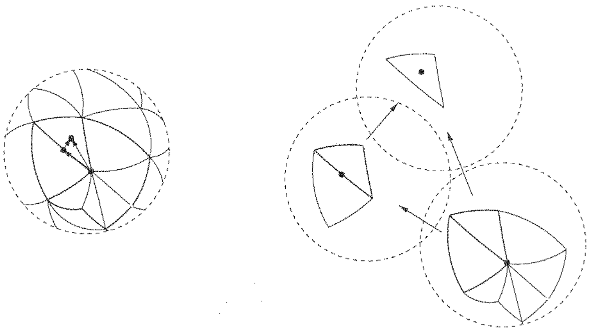


Рис. 4.

Пространство $B(\mathbf{P}\mathtt{M}^n)^{\mathrm{op}}$ гомеоморфно $|\mathtt{M}^n|$.

Теорема (“О функторе Гаусса комбинаторного многообразия”). *Отображение $|\mathtt{M}^n| \to B\mathbf{G}B\mathfrak{R}_n$ гомотопно отображению Гаусса касательного расслоения многообразия $\mathtt{M}^n$.*

Примечательное свойство конструкции состоит в том, что канонически связанное с $\mathbf{G}$ симплициальное расслоение $\operatorname{hocolim}\mathbf{G}\to\mathcal{N}\mathbf{P}M^n$ канонически реализует отвечающее касательному расслоению $T|\mathtt{M}^n|$ сферическое расслоение с симплициальным нулевым сечением и сечением на компактифицированной бесконечности, $\operatorname{hocolim}\mathbf{G}$ – снова комбинаторное многообразие и конструкцию можно итерировать. Например, уже в случае классических многогранников возникают канонически связанные с ними комплексы, представляющие итерированные касательные расслоения, которые могут оказаться комбинаторно значимыми. На рис. 5 мы попробовали нарисовать так возникающее клеточное касательное расслоение треугольника.

1.2. Основной результат настоящей работы – серия теорем A, B, C, D, описывающих комбинаторные модели $B\mathrm{PL}\,(X)$ и $B\mathrm{PL}_{\,n}$ в терминах категорий сборок абстрактных шаровых комплексов и абстрактных симплициальных комплексов, а также комбинаторную модель отображения Гаусса для касательного расслоения многообразия. Мы остановимся на том, как бы мы хотели, но не умеем доказывать такие теоремы. Это рассуждение повторяет рассуждение Стейнбергера [27].

К работе Уайтхеда [28] восходят две простые функториальные конструкции (мы их обозначим hocolim и $\mathrm{hocolim}^{-1}$):

hocolim изготовляет PL-расслоение Стинрода с базой B и слоем X по $\mathfrak{R}(X)$-раскраске некоторой триангуляции полиэдра B;

$\mathrm{hocolim}^{-1}$, наоборот, изготовляет из кусочно-линейного расслоения с базой B и слоем X некоторую $\mathfrak{R}(X)$-раскраску некоторой триангуляции B.

Конструкция “hocolim” имеет много названий: “итерированный конус симплициальных отображений” [9], “гомотопический копредел”, “конструкция Гротендика” [10], “двойная бар-конструкция” [19, §12]. Обратная конструкция “$\mathrm{hocolim}^{-1}$” появляется, например, в работе [11] и использует триангуляции расслоений. Кусочно-линейное расслоение можно триангулировать. Зафиксируем такую триангуляцию. Тогда над первым барицентрическим подразбиением базы триангуляции расслоения в слоях возникает диаграмма комбинаторных морфизмов клеточных структур на X, такая, что двойственные морфизмы в точности доставляют $\mathfrak{R}(X)$-раскраску базы. Композиция $\mathrm{hocolim}\circ\mathrm{hocolim}^{-1}$

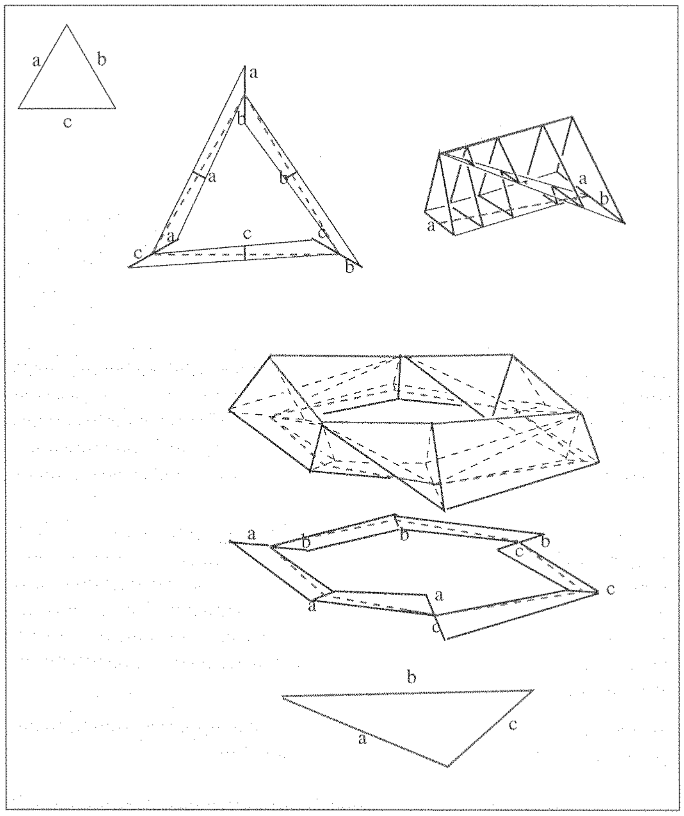


Рис. 5.

изготовляет из расслоения изоморфное расслоение. Мы бы коротко доказали теорему A, если бы имели каноническую конструкцию конкордантности $\mathfrak{R}(X)$-раскраски ξ симплициального комплекса K и раскраски $\operatorname{hocolim}^{-1}\circ\operatorname{hocolim}\xi$ комплекса $\operatorname{sd} K$. Однако ничто не гарантирует существования такой канонической конструкции. Это место – типичная трудность в комбинаторике расслоений. Для случая расслоений Серра Стейнебергер [27] построил такую функториальную конструкцию конкордантности, но она не продолжается на расслоения Стинрода.

Из наших результатов следует, что ξ и $\operatorname{hocolim}^{-1}\circ\operatorname{hocolim}\xi$ все-же конкордантны, но наша конструкция конкордантности трансцендентна.

1.3. Теоремы A, B, C, D – результат применения одной элементарной схемы рассуждений, в центре которой расположена геометрическая лемма 12 "об одновременной фрагментации семейства послойных кусочно-линейных гомеоморфизмов тривиального расслоения на кубе" – прямолинейное обобщение леммы о фрагментации изотопии. Грубо опишем нашу схему рассуждений. Итак, допустим, что мы пытаемся доказать факт гомотопической эквивалентности $B\mathfrak{R}(X) \approx B\mathrm{PL}\,(X)$ в его переформулировке с помощью теории Брауна, сопоставляя $\mathfrak{R}(X)$-раскраске полиэдра B кусочно-линейное расслоение Стинрода с базой B и слоем X и наоборот.

Опишем некоторый процесс построения расслоения по раскраске. Поскольку, как было указано выше, мы не в силах справиться с комбинаторикой hocolim-конструкции, мы заменяем ее на традиционное построение тривиализаций и склеек с помощью структурной группы. Пусть есть $\mathfrak{R}(X)$-раскрашенный симплициальный комплекс K. Индуцированную раскраску каждого отдельно взятого k-симплекса K цепью $\mathfrak{Q}_0 \rightsquigarrow \mathfrak{Q}_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \mathfrak{Q}_k$ комбинаторных сборок абстрактных шаровых комплексов можно реализовать цепочкой

$$\mathtt{Q} = (\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \mathtt{Q}_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \mathtt{Q}_k) \tag{3}$$

геометрических сборок геометрических шаровых комплексов, а с такой цепочкой связать клеточное разложение $\mathtt{T}(\mathtt{Q})$ тривиального расслоения $X \times \Delta^k \to \pi_2\Delta^k$ на горизонтальные "призмы" – тривиальные подрасслоения со слоем – шар. Рисунки 6 и 7 иллюстрируют построение призматического разложения тривиального расслоения по цепи геометрических сборок.

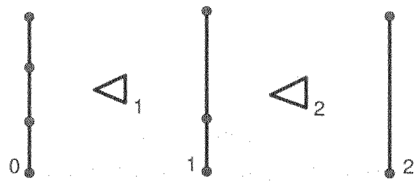


Рис. 6.

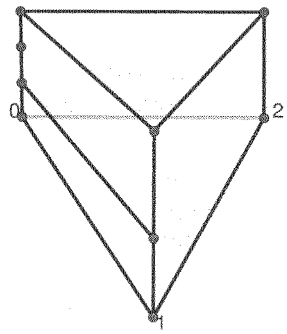


Рис. 7.

Комбинаторика раскраски сопоставляет всякому вхождению симплекса $s \in K$ в бо́льший симплекс комбинаторный изоморфизм призматических разложений тривиального расслоения над симплексом s. С помощью трюка Александера все эти комбинаторные изоморфизмы превращаются в согласованные послойные кусочно-линейные структурные гомеоморфизмы расслоения Стинрода с базой $|K|$ и слоем X. Эти гомеоморфизмы переводят “призму” в “призму”. В результате мы получаем из $\mathfrak{R}(X)$-раскрасок симплициальных комплексов класс расслоений со структурными гомеоморфизмами необычного вида – “призматическими”.

Обратная задача состоит в том, чтобы научиться деформировать структурные гомеоморфизмы произвольного PL-расслоения к “призматической” форме и построить согласованную с этой деформацией $\mathfrak{R}(X)$-раскраску базы. Тут оказывается уместным вспомнить иллюстрации доказательства леммы о фрагментации изотопии. Лемма о фрагментации изотопии, доказанная в PL-случае Хадсоном в [13], утверждает, что для всякого покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ многообразия X открытыми шарами и всякого изотопного тождественному PL-гомеоморфизма $X \to fX$ найдется конечное разложение f в композицию гомеоморфизмов, $f = f_1 \circ \cdots \circ f_m$, таких, что для любого i существует такое j, что $\operatorname{supp} f_i \subset U_j$, т.е. f_i неподвижен в дополнении некоторого U_j. Доказательство леммы о фрагментации изотопии содержит больше информации, чем ее утверждение. Именно, берется произвольная PL-изотопия F гомеоморфизма f к тождественному и деформируется в классе изотопий с фиксированными концами к изотопии

F' специального вида, отвечающего цепочке изотопий, постоянных на дополнениях элементов $\mathcal{U}$. Изотопия F – это послойный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & X \times [0,1] \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

такой, что $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_1 = f$. Гомеоморфизм F это, в свою очередь, то же самое, что одномерное слоение $\mathcal{F}$ на $X \times [0,1]$, трансверсальное слоям проекции π_2 (см. рис. 8).

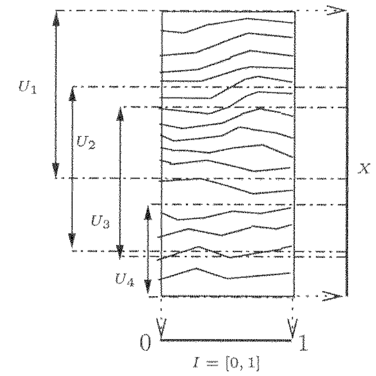


Рис. 8.

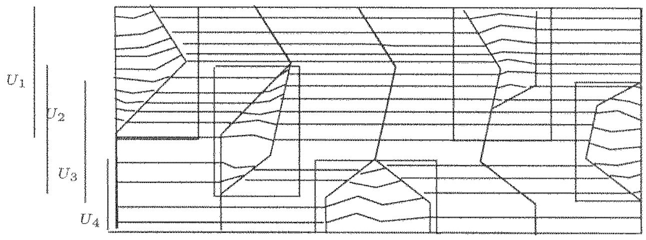


Рис. 9.

Гомеоморфизм F' отвечает слоению $\mathcal{F}'$ со следующим свойством: для всякой точки $b \in [0,1]$ все точки $x \in X$, такие, что лист $\mathcal{F}$ "не горизонтален" в точке (x,b), содержатся в некотором элементе $\mathcal{U}$ (см. рис. 9). Посмотрев на картинку слоения $\mathcal{F}'$, легко видеть, что можно разбить базу $[0,1]$ на отрезки $u_1, \dots, u_m$ и ввести согласованные призматические клеточные структуры на всех подрасслоениях $X \times u_i \to \pi_2 u_i$ расслоения $X \times [0,1] \to \pi_2[0,1]$, относительно которых индуцированные ограничением на подрасслоение гомеоморфизмы $F'\lfloor_{u_i}$ призматичны. Тем самым, конструкция леммы о фрагментации изотопии позволяет деформировать послойный гомеоморфизм тривиального расслоения с базой – отрезком в согласованную систему призматических гомеоморфизмов с базами, образующими триангуляцию отрезка. Деформация $F \rightsquigarrow F'$ имеет канонический вид и прямолинейное покоординатное обобщение на послойные гомеоморфизмы тривиальных расслоений с базой – кубом.

Наша задача состоит в том, чтобы оформить и проанализировать данное многомерное обобщение.

1.4. План работы. Для сокращения рассуждений нам приходится пользоваться элементами абстрактной чепухи различной природы. Общую теорию мы строим для теоремы A.

§2 содержит подробное определение комбинаторных сборок регулярных клеточных комплексов.

§3 содержит универсальное построение $\mathrm{PL}\,(X)$-расслоения на $B\mathfrak{R}(X)$ по тавтологической $\mathfrak{R}(X)$-раскраске, выделяющее особую роль призматических гомеоморфизмов и определяющее классифицирующее отображение

$$B\mathfrak{R}(X) \to B\mathrm{PL}\,(X) \tag{4}$$

Мы действуем подробно – определяем симплициальный группоид призматических гомеоморфизмов $\mathrm{Prism}(X)$ и далее строим морфизм симплициальных множеств $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X) \to \mathcal{W}\mathrm{Prism}(X)$ – формальный аналог $\mathcal{W}$-конструкции универсального главного расслоения. $\mathcal{W}$-конструкция для $\mathrm{Prism}(X)$ легко сравнивается как с $\mathcal{W}$-конструкцией для $\mathrm{PL}\,(X)$, так и с морфизмом $B\mathbf{R}(X) \xrightarrow{B\mathbf{P}} B\mathfrak{R}(X)$, и задача доказательства главной части наших теорем сводится к доказательству леммы 4 "о призматической тривиализации".

В §4 мы сводим лемму 4 "о призматической тривиализации" к чисто геометрической лемме 5 "о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов". Последняя и является единственным нетривиальным утверждением, доказательству которого посвящена работа. Длинное рассуждение о группоиде $\mathrm{Prism}(X)$ и $\mathcal{W}$-конструкциях можно опустить, ибо лемма 5 и есть в точности условие того, что отображение (4) – слабая эквивалентность. Мы привели универсальную редукцию только для того, чтобы немного прояснить естественность возникающей комбинаторики расслоений. Приведем описательную формулировку леммы 5. Рассматривается симплициальное множество $\underline{\mathrm{Prism}}^m(X)$ с типичным k-симплексом – набором данных $\langle \mathtt{Q}, G_1, \dots, G_m\rangle$, где $\mathtt{Q}$ – цепочка геометрических сборок (3) и $G_i \in \mathrm{PL}_k(X)$ – гомеоморфизмы, являющиеся $\mathtt{Q}$-призматическими, т.е. гомеоморфизмы G_i^{-1} переводят призмы $\mathtt{T}(\mathtt{Q})$ (см. §1.3) в призмы. Множество $\underline{\mathrm{Prism}}^{m+1}(X)$ естественно вложено в $\underline{\mathrm{Prism}}^m(X) \times \mathrm{PL}(X)$. Лемма 5 "о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов" утверждает, что

пара $(|\underline{\mathrm{Prism}}^m(X) \times \mathrm{PL}(X)|, |\underline{\mathrm{Prism}}^{m+1}(X)|)$ *гомотопически тривиальна.*

В переводе на естественный язык это означает, что

новый непризматический гомеоморфизм можно деформировать к призматическому виду в составе целого семейства, не нарушая призматичности уже заданных.

Этот факт и есть центральное техническое утверждение всей работы, нуждающееся в доказательстве. План работ по доказательству леммы 5 изложен в §5, а само доказательство занимает §§6–15. Мы вводим универсальное понятие призматичности послойного гомеоморфизма – "призматичность относительно предпучка Александрова". Для обобщенных призматических послойных гомеоморфизмов мы развиваем некоторую хирургию, в центре которой лежит многомерное обобщение конструкции Хадсона фрагментации PL-изотопии.

В §16 мы указываем на уточнения общей конструкции, необходимые для доказательства теоремы B.

В §17 мы указываем уточнения конструкции, необходимые для доказательства теоремы C. Далее мы доказываем, что наша комбинаторная конструкция касательного расслоения представляет касательное микрорасслоение Милнора, что доказывает теорему D.

1.5. Эта работа возникла в ответ на естественный вопрос о соотношении между геометрическими и абстрактными триангуляциями многообразия, возникший еще в студенческие годы автора на комбинаторном семинаре А. М. Вершика. Вопрос оформился в гипотезы в ходе совместной работы с П. Мани и Л. Андерсон. В частности, гипотеза о строении комбинаторной модели $B\mathrm{PL}_n$ возникла как PL-аналог гипотезы о строении макферсонина (гипотетической комбинаторной модели $B\mathrm{O}_n$ [24])[1]. Как уже было упомянуто, первый проект нашего доказательства [4] зависел от положительного решения сильной гипотезы Ода [23], в котором также была впоследствии найдена ошибка [1]. В настоящей работе удалена зависимость от гипотезы Ода ценой ослабления утверждений.

Автор горячо благодарен А. М. Вершику за постоянную поддержку во всех начинаниях и мудрые советы и ПОМИ РАН за финансовую поддержку и замечательную атмосферу.

2. Сборки шаровых комплексов, посет $\mathbf{R}(X)$ и категория $\mathfrak{R}(X)$

В этом параграфе мы подробно определяем геометрические и комбинаторные сборки PL-шаровых комплексов.

2.1. Наша основная категория – категория PL кусочно-линейных евклидовых полиэдров (или просто “полиэдров”) и кусочно-линейных отображений. Основания кусочно-линейной топологии изложены в монографиях [26, 13] и записках семинара Зимана [29].

Предупреждение: *в данной работе все многообразия, отображения, полиэдры и т.п. без специального уточнения категории предполагаются кусочно-линейными.*

2.2. Шаровые комплексы. За общими сведениями о CW-комплексах мы отсылаем к стандартным монографиям, например [18]. PL-шаровые комплексы рассматривались в работах по

[1] Следует заметить, что в доказательстве этой гипотезы [6] существует пока еще не исправленная ошибка.

кусочно-линейной геометрической топологии (например, Кассоном). Напомним обычное определение "топологического шарового комплекса" или, что то же самое, "конечного регулярного CW-комплекса".

Топологическим шаровым комплексом называют покрытие хаусдорфова пространства X конечным набором клеток – замкнутых топологических шаров S, такое, что

1) относительные внутренности шаров из S образуют разбиение X и

2) граница каждого шара из S составлена из шаров меньшей размерности.

PL-шаровой комплекс на евклидовом полиэдре X мы представляем себе как конечное покрытие X PL-шарами, для которого выполнены условия 1), 2). Основной пример PL-шарового комплекса – конечный симплициальный комплекс или, что то же самое, конечный геометрический симплициальный комплекс в евклидовом пространстве. *В дальнейшем "шаровой комплекс" – это всегда "PL-шаровой комплекс".*

2.3. Категория PLball. Зафиксируем категорию **PLball**, образованную шаровыми комплексами с морфизмами – отображениями, отправляющими относительную внутренность всякой клетки прообраза *в* (но не обязательно *на*) относительную внутренность клетки образа. Точнее, морфизм $(X_0, S_0) \to (X_1, S_1)$ есть пара (h, ξ), где $X_0 \xrightarrow{h} X_1$ – PL-отображение, а $S_0 \xrightarrow{\xi} S_1$ – отображение множеств клеток, такие, что для любого $s \in S_0$ имеет место включение $h(\operatorname{relint} s) \subseteq \operatorname{relint} \xi(s)$. Категория **PLball** содержит все интересующие нас подкатегории и более ничем не примечательна.

2.4. Абстрактные шаровые комплексы. Для шарового комплекса (X, S) полиэдр X с точностью до гомеоморфизма полностью определен только комбинаторикой примыкания клеток из S. Подробно сформулируем это утверждение.

Для шарового комплекса $\mathtt{D} = (X, S)$ обозначим через $\mathbf{P}(\mathtt{D})$ частичный порядок по включению на множестве его клеток S. С частично упорядоченным множеством $\mathbf{P}(\mathtt{D})$, как и со всяким частично упорядоченным множеством, связан его порядковый абстрактный симплициальный комплекс $\operatorname{Ord}\mathbf{P}(\mathtt{D})$ и его геометрическая реализация $|\operatorname{Ord}\mathbf{P}(\mathtt{D})|$. Введем стандартные обозначения.

Для посета $\mathcal{P}$ и элемента $p \in \mathcal{P}$ обозначим через $p_{\leq}$ подпосет $\mathcal{P}$, образованный всеми элементами, меньшими или равными p (главный нижний идеал, порожденный p). Через $p_{<}$ обозначим идеал $\mathcal{P}$, образованный всеми элементами, строго меньшими p.

Теорема, подробно записанная, например, в [18], такова.

Теорема 1. *Для любого шарового комплекса* $\mathtt{D} = (X, S)$ *существует строгий клеточный гомеоморфизм*

$$(X, S) \approx (|\mathrm{Ord}\mathbf{P}(\mathtt{D})|, \{|\mathrm{Ord}p_{\leq}|\}_{p\in\mathbf{P}(\mathtt{D})}).$$

При этом в условиях теоремы 1 полиэдры $\{|\mathrm{Ord}p_{<}|\}_{p\in\mathbf{P}(\mathtt{D})}$ автоматически являются граничными сферами клеток. Это последнее свойство позволяет определить комбинаторный абстрактный комплекс. Имеет место следующая теорема ([7]).

Теорема 2. *Если конечное частично упорядоченное множество* $\mathcal{P}$ *таково, что для любого элемента* $p \in \mathcal{P}$, *имеющего ранг* k, $|\mathrm{Ord}p_{<}| \approx S^{k-1}$, *то*

$$(|\mathrm{Ord}\mathcal{P}|, \{|\mathrm{Ord}p_{\leq}|\}_{p\in\mathcal{P}})$$

– шаровой комплекс.

Частично упорядоченные множества, удовлетворяющие условиям теоремы 2, называют **абстрактными топологическими шаровыми комплексами**. Теоремы 1, 2 сформулированы в оригинальных работах для топологических шаровых комплексов. Доказательства используют только возможность продолжения гомеоморфизма на шар с ограничивающей его сферы. Это верно в PL-категории, и PL-версии теорем возникают как следствие доказательства. Мы будем называть **абстрактным PL-шаровым комплексом** или просто **абстрактным шаровым комплексом** частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$, такое, что для любого элемента $p \in \mathcal{P}$, имеющего ранг k, $|\mathrm{Ord}p_{<}| \underset{\mathrm{PL}}{\approx} S^{k-1}$. Кусочно-линейная версия теоремы 2 говорит, что в этом случае $(|\mathrm{Ord}\mathcal{P}|, \{|\mathrm{Ord}p_{\leq}|\}_{p\in\mathcal{P}})$ – PL-шаровой комплекс.

2.5. Комбинаторный функтор $\mathbf{PLball} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{Posets}$. Рассмотрим морфизм $(X_0, S_0) \overset{(h,\xi)}{\rightarrow} (X_1, S_1)$ категории **PLball**. Из определения шарового комплекса следует, что отображение множеств клеток ξ есть морфизм посетов клеток. Следовательно, соответствие $\mathtt{D} \mapsto \mathbf{P}(\mathtt{D})$, сопоставляющее шаровому комплексу абстрактный шаровой комплекс, естественно продолжается до функтора

$\mathbf{PLball} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{Posets}$ со значениями в категории частично упорядоченных множеств.

2.6. Геометрические сборки шаровых комплексов, посет $\mathbf{R}(X)$. Назовем геометрической сборкой шаровых комплексов на полиэдре X морфизм $(X, S_0) \overset{(h,\xi)}{\longrightarrow} (X, S_1)$ категории **PLball**, удовлетворяющий условию, что h – *тождественное* отображение. Эта ситуация возможна тогда и только когда, когда относительная внутренность всякой клетки $s \in S_0$ лежит в относительной внутренности клетки $\xi(s) \in S_1$, т.е. разбиение X на относительные внутренности клеток S_0 подразбивает разбиение X на относительные внутренности клеток S_1. Откуда следует, что морфизм сборки $(X, S_0) \to (X, S_1)$ единствен, если он существует. Таким образом, геометрические сборки структур шарового комплекса на полиэдре X образуют посет. Обозначим через $\mathbf{R}(X) \hookrightarrow \mathbf{PLball}$ посет всех структур шарового комплекса на X, упорядоченных геометрическими сборками. Мы обозначаем сборку $\mathsf{Q}_0 \to \mathsf{Q}_1$ шаровых комплексов на X символом $\mathsf{Q}_0 \trianglelefteq \mathsf{Q}_1$, принятым в PL-топологии для обозначения подразбиения симплициальных комплексов.

2.7. Категория $\mathcal{R}(X)$. Рассмотрим подкатегорию: $\mathcal{R}(X) \hookrightarrow$ **PLball** с объектами – регулярными клеточными комплексами на X и морфизмами вида $(X, S_0) \overset{(h,\xi)}{\longrightarrow} (X, S_1)$, где отображение $X \xrightarrow{h} X$ – гомеоморфизм. Частично упорядоченное множество $\mathbf{R}(X)$ вложено в $\mathcal{R}(X)$ в виде подкатегории, отвечающей тождественным гомеоморфизмам. Морфизмы $\mathcal{R}(X)$ порождены двумя классами морфизмов:

1) сборками $\trianglelefteq$,

2) клеточными гомеоморфизмами (т.е. гомеоморфизмами, отправляющими клетку точно на целую клетку).

Предложение 1. *Всякий морфизм $\mathsf{Q}_0 \xrightarrow{f} \mathsf{Q}_1$ категории $\mathcal{R}(X)$ двумя способами функториально раскладывается на клеточный гомео-*

морфизм h и сборку $\trianglelefteq$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{Q}_0' \arrow[dr, "h_1"] & \\
\mathsf{Q}_0 \arrow[ur, "\trianglelefteq_1"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "h_2"'] & & \mathsf{Q}_1 \\
& \mathsf{Q}_1' \arrow[ur, "\trianglelefteq_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

т.е. на сборку в прообразе и клеточный гомеоморфизм и на гомеоморфизм и сборку в образе.

2.8. Категория комбинаторных сборок шаровых комплексов $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$ и категория $\mathfrak{R}(X)$. Рассмотрим категорию $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$ с объектами – шаровыми комплексами на X; $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$-морфизмом $\mathsf{Q}_0 \xrightarrow{\mathfrak{f}} \mathsf{Q}_1$ мы считаем морфизм посетов $\mathbf{P}\mathsf{Q}_0 \xrightarrow{\mathfrak{f}} \mathbf{P}\mathsf{Q}_1$, представимый некоторым $\mathcal{R}(X)$-морфизмом, т.е. $\mathfrak{f}$ – такой морфизм, что найдется $\mathsf{Q}_0 \xrightarrow{f} \mathsf{Q}_1$, для которого $\mathbf{P}(f) = \mathfrak{f}$. Такие морфизмы мы называем **комбинаторными сборками**. С помощью разложения из предложения 1 легко устанавливается следующий факт.

Предложение 2. *Композиция комбинаторных сборок – снова комбинаторная сборка.*

Таким образом, $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$ – корректно определенная малая категория; есть забывающий функтор $\mathcal{R}(X) \xrightarrow{\mathcal{A}} \widetilde{\mathfrak{R}}(X)$, тождественный на объектах и переводящий $\mathcal{R}(X)$-морфизм в соответствующую ему комбинаторную сборку, при этом $\mathcal{A}$ эпиморфен на морфизмах. Посет $\mathbf{R}(X)$ вложен в $\mathcal{R}(X)$ как подкатегория, и через $\mathbf{A}$ мы обозначим композит

$$\mathbf{A} = (\mathbf{R}(X) \hookrightarrow \mathcal{R}(X) \xrightarrow{\mathcal{A}} \widetilde{\mathfrak{R}}(X)).$$

Заметим, что несложно дать эквивалентное “чисто комбинаторное” определение комбинаторной сборки шаровых комплексов.

Предложение 3. $\mathsf{Q}_0 \xrightarrow{\mathfrak{f}} \mathsf{Q}_1$ *– морфизм сборки тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in \mathbf{P}\mathsf{Q}_1$, имеющего ранг k, частично упорядоченное подмножество $\mathfrak{f}^{-1}(b_{\leq}) \subseteq \mathbf{P}\mathsf{Q}_0$ является абстрактным шаровым комплексом, представляющим k-мерный* PL*-шар.*

Однако это, разумеется, лишь способ немного замести под ковер трансцендентность определения сборки, ибо предложение 3 предлагает распознавать комбинаторные шары, что невозможно в размерности большей четырех.

В силу кусочно-линейной версии теоремы 1 любые два комбинаторно изоморфных шаровых комплекса клеточно гомеоморфны, т.е. изоморфны в $\mathcal{R}(X)$. Это позволяет с точностью до эквивалентности категорий отождествить $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$ с категорией $\mathfrak{R}(X)$, объекты которой – абстрактные шаровые комплексы, чья геометрическая реализация гомеоморфна X, а морфизмы – сборки абстрактных шаровых комплексов, т.е. морфизмы посетов $\mathcal{P}_0 \xrightarrow{\mu} \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \operatorname{Ob}\mathfrak{R}(X)$, представимые $\mathcal{R}(X)$-морфизмами их геометрических реализаций. Таким образом, имеет место коммутативный треугольник функторов

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{R}(X) \arrow[dl, "\mathbf{A}"'] \arrow[d, "\mathbf{P}"] \\
\widetilde{\mathfrak{R}}(X) \arrow[r] & \mathfrak{R}(X)
\end{tikzcd}$$

где нижняя стрелка – забывающий функтор, индуцирующий эквивалентность $\widetilde{\mathfrak{R}}(X)$ и $\mathfrak{R}(X)$.

2.9. $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ как пространство орбит стягиваемого множества. Нам удобно принять чуть более научную точку зрения на функтор $\mathbf{R}(X) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathfrak{R}(X)$, перейдя к нерву $\mathcal{N}\mathbf{R}(X) \xrightarrow{\mathcal{N}\mathbf{P}} \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ этого функтора. На нерве $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ действует дискретная симплициальная группа $\mathrm{PL}^{\delta}(X)$, k-симплексы которой – упорядоченные наборы $g = (g_0, \dots, g_k)$ одинаковых PL-гомеоморфизмов X. Если $\mathsf{Q} \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$, $\mathsf{Q} = (\mathsf{Q}_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \mathsf{Q}_k)$, то полагаем

$$g\mathsf{Q} = (g_0\mathsf{Q}_0 \trianglelefteq g_1\mathsf{Q}_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq g_k\mathsf{Q}_k) \in \mathcal{N}\mathbf{R}(X).$$

Таким образом, получено действие дискретной симплициальной группы $\mathrm{PL}^{\delta}(X)$

$$\mathrm{PL}^{\delta}(X) \times \mathcal{N}\mathbf{R}(X) \to \mathcal{N}\mathbf{R}(X).$$

Лемма 1. *$\mathcal{N}\mathfrak{R}(X) = \mathcal{N}\mathbf{R}(X)/\mathrm{PL}^{\delta}(X)$, и $\mathcal{N}\mathbf{R}(X) \xrightarrow{\mathcal{N}\mathbf{P}} \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ – проекция факторизации.*

Доказательство. По определению (см., например, [12, с. 303]) k-симплексы $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)/\mathrm{PL}^{\delta}(X)$ суть орбиты действия $\mathrm{PL}^{\delta}_k(X)$ на

$\mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$ с индуцированной симплициальной структурой: для $\mathtt{Q} \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$ орбиты $d_i\mathtt{Q}$ и $s_i\mathtt{Q}$ определяются только орбитой $\mathtt{Q}$. Но это в точности отождествляет $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)/\mathrm{PL}^{\delta}(X)$ с $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$. □

Отметим тут же фундаментальное обстоятельство.

Лемма 2. *Пространство $B\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ стягиваемо.*

Доказательство. Это следствие того, что для любой пары $\mathtt{Q}_0, \mathtt{Q}_1 \in \mathbf{T}(X)$ найдется общее подразбиение, т.е. комплекс $\mathtt{Q}_3$, такой, что $\mathtt{Q}_3 \trianglelefteq \mathtt{Q}_0$, $\mathtt{Q}_3 \trianglelefteq \mathtt{Q}_0$. Из этого факта очевидным образом следует стягиваемость $B\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ ([25]). □

Отметим особо, что только в кусочно-линейной категории всегда есть общее подразбиение шаровых комплексов. В других категориях это неверно, и существование аналогов леммы 2 проблематично.

3. Призматические гомеоморфизмы, редукция теоремы A к лемме о призматической тривиализации

В этом параграфе мы предъявляем конструкцию расслоения с базой B и слоем X по $\mathfrak{R}(X)$-раскраске триангуляции B. Эта конструкция оформлена универсально, как симплициальный морфизм $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X) \to \overline{\mathcal{W}}\mathrm{PL}(X)$ из нерва $\mathfrak{R}(X)$ в $\overline{\mathcal{W}}$-конструкцию $B\mathrm{PL}(X)$.

3.1. Призматическое разложение тривиального расслоения. Через $\mathbf{m}$ мы обозначаем вполне упорядоченное множество $\{0 < 1 < \ldots < m\}$ – "конечный ординал". Через $\mathbf{N}$ мы обозначаем категорию конечных ординалов и монотонных отображений.

Рассмотрим цепочку геометрических сборок шаровых комплексов $\mathbf{m} \xrightarrow{\mathtt{Q}} \mathbf{R}(X)$. В этом пункте мы сопоставим цепочке $\mathtt{Q} = (\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq_1 \ldots \trianglelefteq_m \mathtt{Q}_m)$ структуру шарового комплекса $\mathtt{T(Q)}$ на полиэдре $X \times \Delta^m$ и индуцированный проекцией $X \times \Delta^m \xrightarrow{\pi_2} \Delta^m$ **PLball**-морфизм $\mathtt{T(Q)} \xrightarrow{\mathtt{e(Q)}} [\Delta^m]$. Здесь и далее мы обозначаем через $[\Delta^m]$ **клеточный стандартный симплекс** – шаровой комплекс, образованный всеми гранями стандартного симплекса Δ^m. Для морфизма $\mathbf{n} \xrightarrow{\theta} \mathbf{m}$ категории $\mathbf{N}$ и соответствующего ему косимплициального морфизма

$$\Delta^n \xrightarrow{\Delta(\theta)} \Delta^m$$

мы обозначаем через $[\Delta^n] \overset{[\Delta(\theta)]}{\to} [\Delta^m]$ индуцированный **PLBall**-морфизм граничных комплексов симплексов. В частности, через $[d^i]$, $[s^i]$ мы обозначаем стандартные **клеточные** кограни и ковырождения клеточных стандартных симплексов.

Отметим далее, что в категории **PLball** шаровых комплексов есть **индуцированные сборки**, т.е. если регулярный клеточный комплекс $\mathtt{B}_0$ является подкомплексом $\mathtt{B}_1$ и $\overline{\mathtt{B}}_0 \trianglelefteq \mathtt{B}_0$, то существует универсальное пунктирное пополнение в диаграмме

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathtt{B}}_0 \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, "\trianglelefteq"'] & \overline{\mathtt{B}}_1 \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"] \\ \mathtt{B}_0 \arrow[r, hook] & \mathtt{B}_1 \end{tikzcd} \tag{6}$$

Множество клеток комплекса $\overline{\mathtt{B}}_1$ есть множество всех клеток комплекса $\mathtt{B}_1$, из которого выкинуты все клетки комплекса $\mathtt{B}_0$ и к которому добавлены все клетки комплекса $\overline{\mathtt{B}}_0$.

Рассмотрим флаг граней симплекса

$$\Delta^0 \hookrightarrow d^1\Delta^1 \hookrightarrow d^2 \cdots \hookrightarrow d^m\Delta^m.$$

Напомним сразу, что в соответствии со стандартной симплициальной терминологией грань геометрического симплекса вкладывается в симплекс “морфизмом кограни”.

Рассмотрим индуцированный флаг тривиальных расслоений

$$\begin{tikzcd} X \times \Delta^0 \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times d^1"] \arrow[d] & X \times \Delta^1 \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times d^2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times d^m"] & X \times \Delta^m \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r, hook, "d^1"] & \Delta^1 \arrow[r, hook, "d^2"] & \cdots \arrow[r, hook, "d^m"] & \Delta^m \end{tikzcd} \tag{7}$$

На тотальном пространстве флага расслоений (7) рассмотрим следующее построение: рассмотрим лестницу клеточных сборок и вложений

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Q}_0 \times [\Delta_0] \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, "\trianglelefteq\times\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] & \bullet \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] & \cdots \arrow[rr, hook, dotted] & & \mathsf{T}(\mathsf{Q}) \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] \\
\mathsf{Q}_1 \times [\Delta^0] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times[d^1]"] & \mathsf{Q}_1 \times [\Delta^1] \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, "\trianglelefteq\times\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] & \cdots \arrow[rr, hook, dotted] & & \bullet \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] \\
& \mathsf{Q}_2 \times [\Delta^1] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times[d^2]"] & \mathsf{Q}_2 \times [\Delta^2] \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq\times\mathrm{id}"'] & \cdots \arrow[rr, hook, dotted] & & \bullet \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] \\
& & \vdots & & \vdots \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq\times\mathrm{id}"'] & \vdots \arrow[d, dotted, "\trianglelefteq"'] \\
& & & & \mathsf{Q}_m \times [\Delta^{m-1}] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\times[d^m]"] & \mathsf{Q}_m \times [\Delta^m]
\end{tikzcd}
\qquad (8)
$$

Применяя (6) нужное число раз, мы заполняем северо-восточный угол (8) и получаем $\mathtt{T(Q)} \trianglelefteq \mathtt{Q}_m \times [\Delta^m]$. Конструкция индуцированной сборки в нашем случае коммутирует с проекцией на базу, и так мы получаем нетривиальную клеточную структуру $\mathtt{T(Q)} \overset{\mathtt{e(Q)}}{\to} [\Delta^m]$ на тривиальном расслоении $X \times \Delta^k \overset{\pi_2}{\to} \Delta^k$.

На рис. 6 изображен пример 3-цепи геометрических сборок отрезка, а на рис. 7 – полученная клеточная структура на $[0,1] \times \Delta^2$.

Несложно явно описать клеточную структуру $\mathtt{T(Q)} \overset{\mathtt{e}(Q)}{\to} [\Delta^m]$. Пусть S_i – множество клеток $\mathtt{Q}_i$. Для всякого подмножества $\mathbf{k}$ множества $\mathbf{m}$ мы обозначим через $\Delta^{\mathbf{k}} \subseteq \Delta^m = \Delta^{\mathbf{m}}$ грань Δ^m, натянутую на вершины с номерами из $\mathbf{k}$. Тогда шаровой комплекс $[\Delta^m]$ имеет вид $(\Delta^m, \{\Delta^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in 2^{\mathbf{m}}})$. Для $\mathbf{k} \in 2^{\mathbf{m}}$ обозначим через $\max(\mathbf{k}) \in \mathbf{m}$ максимальный элемент.

Предложение 4. *Клетки* $\mathtt{T(Q)}$ *нумеруются всеми парами*

$$(\mathbf{k}, B), \quad \textit{такими, что} \quad \mathbf{k} \in 2^{\mathbf{m}} \quad \textit{и} \quad B \in S_{\max(\mathbf{k})},$$

и имеют вид $T_{(\mathbf{k},B)} = B \times \Delta^{\mathbf{k}} \subset X \times \Delta^m$. *Примыкание клеток таково:*

$$T_{(\mathbf{k}_0,B_0)} \underset{X\times\Delta^m}{\subseteq} T_{(\mathbf{k}_1,B_1)}$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{k}_0 \underset{\mathbf{m}}{\subseteq} \mathbf{k}_1 \quad \textit{и} \quad B_0 \underset{X}{\subseteq} B_1.$$

Клеточный морфизм $\mathtt{e(Q)}$ *координатно проецирует клетку* $T_{(\mathbf{k},B)}$ *на клетку* $\Delta^{\mathbf{k}}$ *базы.*

Клетки $\mathtt{T(Q)}$ мы называем **"призмами"**. Конструкция $\mathtt{T}(-)$ функториальна относительно граней и вырождений симплексов $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$. Очевидно, что сопоставление $\mathtt{Q} \mapsto \mathtt{e(Q)}$ есть контравариантный функтор из категории симплексов $C\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ в категорию клеточных расслоений.

3.2. Симплициальный группоид призматических гомеоморфизмов $\mathrm{Prism}(X)$**.**

3.2.1. Зафиксируем некоторые обозначения и соглашение. Пусть B – полиэдр. Через $\mathrm{PL}_B(X)$ мы обозначаем группу послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения $X \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Если $A \xrightarrow{h} B$, $f \in \mathrm{PL}_B(X)$, то специальным обозначением $f\lfloor_h \in \mathrm{PL}_A(X)$ мы обозначаем индуцированный h гомеоморфизм. В частности, если h – вложение, то мы пишем просто $f\lfloor_A$. Группу кусочно-линейных гомеоморфизмов многообразия X мы понимаем как симплициальную группу с группой m-симплексов $\mathrm{PL}_m(X) = \mathrm{PL}_{\Delta^m}(X)$.

3.2.2. Пусть, как и ранее, $\mathtt{Q} = (\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq_1 \ldots \trianglelefteq_m \mathtt{Q}_m)$, $\mathtt{T(Q)} \xrightarrow{\mathtt{e(Q)}} [\Delta^m]$ – соответствующее цепочке $\mathtt{Q}$ призматическое разложение тривиального расслоения. Гомеоморфизм $f \in \mathrm{PL}_m(X)$ мы назовем **$\mathtt{Q}$-призматическим**, если для всякой клетки $T_{\mathbf{k},B}$ комплекса $\mathtt{T(Q)}$

$$f^{-1}(T_{(k,B)}) = f^{-1}\lfloor_{\max \mathbf{k}}(B) \times \Delta^{\mathbf{k}}, \tag{9}$$

где через $X \xrightarrow{f^{-1}\lfloor_i} X$ обозначен слой гомеоморфизма f^{-1} над вершиной симплекса Δ^m с номером i. Положим

$$f^{-1}\mathtt{Q} = (f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_0) \trianglelefteq f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_1) \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_m)). \tag{10}$$

Предложение 5. $\mathtt{Q}$-*призматический гомеоморфизм* f *индуцирует послойный строгий клеточный гомеоморфизм клеточных расслоений:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}(f^{-1}\mathsf{Q}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathsf{e}(f^{-1}\mathsf{Q})"'] & & \mathsf{T}(\mathsf{Q}) \arrow[dl, "\mathsf{e}(\mathsf{Q})"] \\ & {[\Delta^m]} & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Заметим, что из условия (9) определения призматического гомеоморфизма следует, что

$$\forall i = 0, \ldots, m,\ B \in \mathtt{Q}_i :\ f^{-1}\lfloor_i(B) = f^{-1}\lfloor_0(B),$$

поскольку

$$f^{-1}(T_{(\{0,i\},B)} = B \times \Delta^{\{0,i\}}) = \\ = f^{-1}\lfloor_i(B) \times \Delta^{\{0,i\}} \equiv f^{-1}\lfloor_0(B) \times \Delta^{\{0,i\}},$$

где последнее тождество – покоординатное. Отсюда следует, что

$$f^{-1}\lfloor_i(\mathtt{Q}_i) = f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_i)$$

и, следовательно,

$$f^{-1}\lfloor_i(\mathtt{Q}_i) = f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_i) \trianglelefteq f^{-1}\lfloor_0(\mathtt{Q}_j) = f^{-1}\lfloor_j(\mathtt{Q}_j) \quad \text{при} \quad i \le j.$$

Таким образом, условие (9) переписывается как

$$f^{-1}(T_{(B,\mathbf{k})}(\mathtt{Q})) = T_{(f^{-1}\lfloor_0(B),\mathbf{k})}(f^{-1}\mathtt{Q}),$$

т.е. как утверждение, что $f^{-1}(T_{(B,\mathbf{k})}(\mathtt{Q}))$ – призма $\mathtt{T}(f^{-1}\mathtt{Q})$. □

3.2.3. Теперь можно определить симплициальный группоид,

$$\mathbf{N}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Prism}\,(X)} \mathbf{Groupoids},$$

m-объекты которого $\mathrm{Ob}_m\mathrm{Prism}\,(X)$ занумерованы m-симплексами $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ и для двух m-объектов $\mathbf{m} \overset{\mathtt{Q}^0, Q^1}{\rightarrow} \mathbf{R}(X)$ множество m-морфизмов

$$(\mathrm{Prism}\,(X))(\mathtt{Q}^0, Q^1)$$

есть множество всех призматических гомеоморфизмов, переводящих $\mathtt{T}(\mathtt{Q}^0)$ в $\mathtt{T}(\mathtt{Q}^1)$, в соответствии с предложением 5. Грани и вырождения естественно определены и согласованы с гранями и вырождениями в $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$. Симплициальным "пространством" группоида $\mathrm{Prism}\,(X)$ мы считаем симплициальное множество $\mathrm{MorPrism}\,(X)$ всех морфизмов $\mathrm{Prism}\,(X)$. Соответственно, топологическим пространством $|\mathrm{Prism}\,(X)|$ группоида мы считаем пространство $|\mathrm{MorPrism}\,(X)|$. Пространство $|\mathrm{Prism}\,(X)|$ очевидным образом наделено структурой клеточного топологического группоида.

Лемма 3 (О продолжении призматического гомеоморфизма).

(a) *Пусть есть* $\mathtt{Q}^0, \mathtt{Q}^1 \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_0$ *и изоморфизм* $\mathbf{P}(\mathtt{Q}^0) \xrightarrow{\mu} \mathbf{P}(\mathtt{Q}^1)$*; тогда найдется клеточный гомеоморфизм* $\mathtt{Q}^0 \xrightarrow{f} \mathtt{Q}^1$*, такой, что* $\mathbf{P}(f) = \mu$*;*

(b) *Пусть есть* $\mathtt{Q}^0, \mathtt{Q}^1 \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_1$ *и два клеточных гомеоморфизма* $\mathtt{Q}^0_0 \xrightarrow{f_0} \mathtt{Q}^1_0$ *и* $\mathtt{Q}^0_1 \xrightarrow{f_1} \mathtt{Q}^1_1$*, такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathtt{Q}^0_0) & \xrightarrow{\mathbf{P}(\trianglelefteq)} & \mathbf{P}(\mathtt{Q}^0_1) \\ {\scriptstyle \mathbf{P}(f_0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P(f_1)} \\ \mathbf{P}(\mathtt{Q}^0_1) & \xrightarrow[\mathbf{P}(\trianglelefteq)]{} & \mathbf{P}(\mathtt{Q}^1_1) \end{array}$$

коммутативна; тогда найдется $f \in \mathrm{Mor}_2\mathrm{Prism}\,(X)$, $\mathtt{Q}^0 \xrightarrow{f} \mathtt{Q}^1$*, такой, что* $d_0 f = f_1$, $d_1 f = f_2$*;*

(c) *Пусть есть* $\mathtt{Q}^0, \mathtt{Q}^1 \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_m$*, при* $m \geq 2$*. Пусть есть набор призматических гомеоморфизмов* $f_0, \ldots, f_m \in \mathrm{Mor}_{m-1}\mathrm{Prism}\,(X)$, $d_i\mathtt{Q}^0 \xrightarrow{f_i} d_i\mathtt{Q}^1$*, таких, что* $d_i f_j = d_{j-1} f_i$ *при всех* $i < j$*. Тогда найдется* $f \in \mathrm{Mor}_m\mathrm{Prism}\,(X)$, $\mathtt{Q}^0 \xrightarrow{f} \mathtt{Q}^1$*, такой, что* $d_i f = f_i$ *при* $i = 0, \ldots, m$*.*

Доказательство. Этот факт есть некоторая форма трюка Александера. Мы приведем его полное доказательство.

1. Во-первых, нам потребуется стандартное для теории PL-расслоений комбинаторно-геометрическое наблюдение:

рассмотрим пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$*, его проекцию* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^l$ *и два геометрических симплекса в* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ *размерности* d*:* $S^0 = \mathrm{conv}\,(s^0_0, \ldots, s^0_d)$, $S^1 = \mathrm{conv}\,(s^1_0, \ldots, s^1_d)$*. Предположим, что* $\pi_2(s^0_i) = \pi_2(s^1)_i$*. Тогда единственное аффинное отображение* $S^0 \xrightarrow{A} S^1$*, переводящее* s^0_i *в* s^1_i*, послойно относительно проекции* π_2*, т.е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & S^1 \arrow[dl, "\pi^2"] \\ & \mathbb{R}^l & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Это есть следствие того, что при аффинном отображении A точка $x \in S^0$, $x = \sum_{i=0}^d t_i s_i^0$, переходит в точку $A(x) = \sum_{i=0}^d t_i s_i^1 \in S^1$, и выкладки

$$\pi_2(A(x)) = \sum_{i=0}^{d} t_i \pi_2(s_i^1) = \sum_{i=0}^{d} t_i \pi_2(s_i^0) = \pi_2(x).$$

2. (Параметрический PL-трюк Александера.)

Рассмотрим проекцию $\Delta^k \times \Delta^l \xrightarrow{\pi_2} \Delta_l$. *Рассмотрим* $(k+l-1)$*-сферу*

$$\partial(\Delta^k \times \Delta^l) = (\partial\Delta^k \times \Delta^l) \cup (\Delta^k \times \partial\Delta^l).$$

Предположим, что фиксирован послойный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} \partial(\Delta^k \times \Delta^l) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & \partial(\Delta^k \times \Delta^l) \arrow[dl, "\pi^2"] \\ & \Delta^l & \end{tikzcd}$$

Тогда найдется послойный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} \Delta^k \times \Delta^l \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & \Delta^k \times \Delta^l \arrow[dl, "\pi^2"] \\ & \Delta^l & \end{tikzcd}$$

такой, что $G|_{\partial(\Delta^k \times \Delta^l)} = F$.

Во-первых, гомеоморфизм F следует триангулировать. Во-вторых, используя выпуклость (!) призмы $\Delta^k \times \Delta^l$, мы можем звездно, с центром в барицентре $\Delta^k \times \Delta^l$, продолжить триангуляции образа и прообраза до комбинаторно изоморфных триангуляций $\Delta^k \times \Delta^l$. Такое звездное продолжение по п. 1 доказательства однозначно порождает послойное продолжение G.

3. Из п. 2 вытекает следующий более общий факт. *Пусть есть пара произвольных шаров* B^k, B^l. *Рассмотрим проекцию* $B^k \times B^l \xrightarrow{\pi_2} B_l$. *Рассмотрим* $(k+l-1)$*-сферу*

$$\partial(B^k \times B^l) = (\partial B^k \times B^l) \cup (B^k \times \partial B^l).$$

Предположим, что фиксирован послойный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} \partial(B^k \times B^l) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & \partial(B^k \times B^l) \arrow[dl, "\pi^2"] \\ & B^l & \end{tikzcd}$$

Тогда найдется послойный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} B^k \times B^l \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & B^k \times B^l \arrow[dl, "\pi^2"] \\ & B^l & \end{tikzcd}$$

такой, что $G|_{\partial(B^k \times B^l)} = F$.

Доказательство состоит в том, что следует выбрать гомеоморфизмы $B^k \xrightarrow{H_1} \Delta^k$ и $B^l \xrightarrow{H_2} \Delta^l$, применить к $B^k \times B^l$ гомеоморфизм $B^k \times B^l \xrightarrow{H_1 \times H_2} \Delta^k \times \Delta^l$ и воспользоваться п. 2.

4. Введем необходимые обозначения. Обозначим через $\partial[\Delta^m]$ клеточную сферу – границу клеточного комплекса граней стандартного симплекса. Для $(\mathbf{m} \xrightarrow{\mathtt{Q}} \mathbf{R}(X)) \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_m$ обозначим через $\theta_{(-1)}(\mathtt{Q})$ клеточное расслоение на $\partial[\Delta^m]$, индуцированное из $\mathtt{e}(\mathtt{Q})$ вложением $\partial[\Delta^m] \hookrightarrow [\Delta^m]$:

$$\begin{tikzcd} \Theta_{(-1)}(\mathsf{Q}) \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted, "\theta_{-1}(\mathsf{Q})"'] & \mathsf{T}(\mathsf{Q}) \arrow[d, "\mathsf{e}(\mathsf{Q})"] \\ \partial[\Delta^m] \arrow[r, hook] & [\Delta^m] \end{tikzcd}$$

Клетки $\Theta_{(-1)}$ имеют вид $T_{(\mathbf{k},B)} \in \mathtt{T}(\mathtt{Q})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$. Обозначим через $\Theta_{(i)}(\mathtt{Q})$ подкомплекс $\mathtt{T}(\mathtt{Q})$, составленный из клеток $\Theta_{(-1)}(\mathtt{Q})$ и всех клеток вида $T_{(\mathbf{m},B)}$, $B \in \mathtt{Q}_m$, $\dim B \leq i$. Напомним, что у нас $n =$

$\dim X$. Возникла фильтрация

$$\begin{tikzcd}
\Theta_{(-1)}(\mathsf{Q}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta_{(-1)}(\mathsf{Q})"'] & \Theta_{(0)}(\mathsf{Q}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta_{(0)}(\mathsf{Q})"'] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[dl, dotted] & \Theta_{(n)}(\mathsf{Q}) = \mathsf{T}(\mathsf{Q}) \arrow[dll, "\theta_{(n)}(\mathsf{Q})=\mathsf{e}(\mathsf{Q})"] \\
\partial[\Delta^m] \arrow[r, hook] & {[\Delta^m]} & &
\end{tikzcd}$$

Ограничение $\mathtt{e}(\mathtt{Q})$ на $\Theta_{(i)}(\mathtt{Q})$ обозначаем через $\theta_{(i)}(\mathtt{Q})$.

5. Теперь, пользуясь п. 3, мы можем построить f по индукции. Отображения $f_0, \dots, f_m$ склеиваются в гомеоморфизм $F^{(-1)}$, совпадающий с f_i при ограничении на расслоение над гранью с номером i сферы $\partial[\Delta^m]$:

$$\begin{tikzcd}
\Theta_{(-1)}\mathsf{Q}^0 \arrow[rr, "F^{(-1)}"] \arrow[dr, "\theta_{(-1)}(\mathsf{Q}^0)"'] & & \Theta_{(-1)}\mathsf{Q}^1 \arrow[dl, "\theta_{(-1)}e(\mathsf{Q}^1)"] \\
& \partial[\Delta^m] &
\end{tikzcd}$$

При этом, необходимым образом, $f_i|_0 = f_j|_0 = F^{(-1)}|_0$ при $i, j = 1, \dots, m$ и $\mathtt{Q}^1_i = F^{(-1)}|_0(\mathtt{Q}^0_i)$. Гомеоморфизм $F^{(-1)}$ переводит клетку $T_{(B,\mathbf{k})}$ комплекса $\Theta_{(-1)}\mathtt{Q}^0$ в клетку $T_{(F^{(-1)}|_0(B),\mathbf{k})}$ комплекса $\Theta_{(-1)}\mathtt{Q}^1$.

Шаг индукции. Предположим, что есть призматический гомеоморфизм $\Theta_{i-1}(\mathtt{Q}^0) \overset{F^{(i-1)}}{\to} \Theta_{i-1}(\mathtt{Q}^1)$, переводящий клетку $T_{(B,\mathbf{k})}$ комплекса $\Theta_{(i-1)}\mathtt{Q}^0$ в клетку $T_{(F^{(-1)}|_0(B),\mathbf{k})}$ комплекса $\Theta_{(i-1)}\mathtt{Q}^1$. Продолжим его до послойного клеточного гомеоморфизма

$$\begin{tikzcd}
\Theta_i\mathsf{Q}^0 \arrow[rr, "F^i"] \arrow[dr, "\theta_i(\mathsf{Q}^0)"'] & & \Theta_i\mathsf{Q}^1 \arrow[dl, "\theta_i e(\mathsf{Q}^1)"] \\
& {[\Delta^m]} &
\end{tikzcd}$$

Для этого необходимо продолжить $F^{(i-1)}$ на клетки вида $T_{(\mathbf{m},B)}$, где $\dim B = i$. Такое продолжение существует, поскольку $\partial T_{(\mathbf{m},B)} \subset \Theta_{(i-1)}(\mathtt{Q}^0)$ и $F^{(i-1)}|_{\partial T_{(\mathbf{m},B)}}$ удовлетворяет условиям трюка Александера в форме п. 3. $\square$

3.3. Симплициальное множества $\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)$ и $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$.

3.3.1. Напомним принадлежащую Эйленбергу и Маклейну конструкцию главного симплициального расслоения $EG \xrightarrow{u_G} BG$ симплициальной группы G – так называемую W-конструкцию.

Положим

$$(\overline{\mathcal{W}}G)_m = \begin{cases} G_{m-1} \times G_{m-2} \times \cdots \times G_0 & \text{при} \quad m > 0, \\ \{*\} \quad (\text{одноэлементное множество}) & \text{при} \quad m = 0. \end{cases}$$

Обозначим элемент $(\overline{\mathcal{W}}G)_m$ через $[g_{m-1}, \ldots, g_0]$ при $m > 0$. Определим грани одномерных симплексов и вырождение 0-мерного:

$$\begin{aligned} &d_i([g_0]) = * \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \\ &s_0(*) = [e_0] \quad (e_0 \text{ – единица группы } \ G_0); \end{aligned} \tag{11}$$

при $m > 1$ грани определены следующим образом:

$$\begin{aligned} &d_i[g_{m-1}, \ldots, g_0] = \\ &= \begin{cases} [g_{m-2}, \ldots, g_0] & \text{при} \quad i = 0, \\ [d_{i-1}g_{m-1}, \ldots d_1 g_{m-i+1}, & \\ (g_{m-i-1} \underset{m-i-1}{\circ} d_0 g_{m-i}), & \\ g_{m-i-2}, \ldots, g_0] & \text{при} \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ [d_{m-1}g_{m-1}, \ldots, d_1 g_1] & \text{при} \quad i = m. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Вырождения определены формулой

$$\begin{aligned} &s_i[g_{m-1}, \ldots, g_0] = \\ &= \begin{cases} [e_m, g_{m-1}, \ldots, g_0] & \text{при} \quad i = 0, \\ [s_{i-1}g_{m-1}, \ldots, s_0 g_{m-i}, & \\ e_{m-i}, g_{m-i-1}, \ldots, g_0] & \text{при} \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \end{aligned}$$

где через e_j обозначена единица группы G_j.

Положим $(\mathcal{W}G)_m = G_m \times \cdots \times G_0$. Элемент $(\mathcal{W}G)_m$ обозначим $\langle g_m, \ldots, g_0 \rangle$. Выпишем формулы для граней и вырождений:

$$d_i\langle g_m, \ldots, g_0 \rangle =$$

$$= \begin{cases} \langle d_i g_m, \dots d_1 g_{m-i+1}, \\ (g_{m-i-1} \underset{m-i-1}{\circ} d_0 g_{m-i}), \\ g_{m-i-2}, \dots, g_0\rangle & \text{при} \quad i = 0, \dots, m-1, \\ \langle d_m g_m, \dots, d_1 g_1\rangle & \text{при} \quad i = m, \end{cases}$$

$$s_i\langle g_m, \dots, g_0\rangle = \langle s_i g_m, s_{i-1} g_{m-1}, \dots, s_0 g_{m-i}, e_{m-i}, g_{m-i-1}, \dots g_0\rangle.$$

На $\mathcal{W}G$ определяется свободное действие $G \times \mathcal{W}G \to \mathcal{W}G$ группы G правилом $(h_m, \langle g_m, \dots, g_0\rangle) \mapsto \langle h_m g_m, g_{m-1}, \dots, g_0\rangle$. Отвечающее этому действию главное расслоение

$$\mathcal{W}G \xrightarrow{u_G} \overline{\mathcal{W}}G : \langle g_m, \dots, g_0\rangle \mapsto [g_{m-1}, \dots, g_0]$$

и есть универсальное главное G-расслоение для группы G.

3.3.2. Построим вариант $\mathcal{W}$-конструкции для симплициального группоида призматических гомеоморфизмов.

Обозначим для призматического гомеоморфизма

$$g \in \mathrm{Mor}_m \mathrm{Prism}\,(X)$$

его образ и прообраз через $\mathrm{dom}(g) \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$ и $\mathrm{codom}\,(g) \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$ соответственно.

При $m \geq 1$ в качестве m-симплексов $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$ возьмем множество всех пар

$$(\mathtt{Q}, [g_{m-1}, \dots, g_0]),$$

где $\mathtt{Q} \in \mathcal{N}_m\mathbf{R}(X)$, $[g_{m-1}, \dots, g_0]$ – последовательность призматических гомеоморфизмов, таких, что $g_i \in \mathrm{Mor}_i\mathrm{Prism}\,(X)$, $i = 0, \dots, m-1$, $d_0\mathtt{Q} = \mathrm{dom}\, g_{m-1}$, и $d_0\mathrm{codom}\, g_i = \mathrm{dom}\, g_{i-1}$ при $i = 1, \dots, m-1$. При $m = 0$ симплексы отождествим с элементами $\mathbf{R}(X)$.

Определим грани $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$ одномерных симплексов и вырождение 0-мерного:

$$\begin{aligned} & d_0(\mathtt{Q}, [g_0]) = \mathrm{codom}\, g_0, \\ & d_1(\mathtt{Q}, [g_0]) = d_1\mathtt{Q}, \\ & s_0(\mathtt{Q}) = (s_0\mathtt{Q}, [e_0]) \quad (e_0 \text{ – единица группы } G_0); \end{aligned} \tag{13}$$

при $m > 1$ грани определены следующим образом:

$$d_i(\mathtt{Q}, [g_{m-1}, \dots, g_0]) = \tag{14}$$

$$= \begin{cases} (\operatorname{codom} g_{m-1}, [g_{m-2}, \dots, g_0]) & \text{при} \quad i = 0, \\ (d_i\mathtt{Q}, [d_{i-1}g_{m-1}, \dots d_1 g_{m-i+1}, & \\ (g_{m-i-1} \underset{m-i-1}{\circ} d_0 g_{m-i}), & \\ g_{m-i-2}, \dots, g_0]) & \text{при} \quad i = 1, \dots, m-1, \\ (d_m\mathtt{Q}, [d_{m-1}g_{m-1}, \dots, d_1 g_1]) & \text{при} \quad i = m. \end{cases}$$

Вырождения определены формулой

$$s_i(\mathtt{Q}, [g_{m-1}, \dots, g_0]) = \\ = \begin{cases} (s_0\mathtt{Q}, [e_m, g_{m-1}, \dots, g_0]) & \text{при} \quad i = 0, \\ (s_i\mathtt{Q}, [s_{i-1}g_{m-1}, \dots, s_0 g_{m-i}, & \\ e_{m-i}, g_{m-i-1}, \dots, g_0]) & \text{при} \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{15}$$

где через e_j обозначена единица группы G_j.

Далее определим симплициальное множество $\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)$. Элементами $(\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X))_m$ будем считать все пары $(\mathtt{Q}, \langle g_m, \dots, g_0\rangle)$, где $\mathtt{Q} \in \mathcal{N}_m\mathbf{R}(X)$, $\operatorname{codom} g_m = \mathtt{Q}$, $d_0\mathtt{Q} = \operatorname{dom} g_{m-1}$, $d_0 \operatorname{codom} g_i = \operatorname{dom} g_{i-1}$ при $i = 1, \dots, m-1$.

Выпишем формулы для граней и вырождений:

$$d_i(\mathtt{Q}, \langle g_m, \dots, g_0\rangle) =$$

$$= \begin{cases} (\operatorname{codom} g_{m-1}, \langle g_{m-1}d_0 g_m, g_{m-2}, \dots, g_0\rangle) & \text{при } i = 0, \\ (d_i\mathtt{Q}, \langle d_i g_m, \dots d_1 g_{m-i+1}, & \\ (g_{m-i-1} \underset{m-i-1}{\circ} d_0 g_{m-i}), & \\ g_{m-i-2}, \dots, g_0\rangle) & \text{при } i = 0, \dots, m-1, \\ (d_m Q, \langle d_m g_m, \dots, d_1 g_1\rangle) & \text{при } i = m, \end{cases}$$

$$s_i(\mathtt{Q}, \langle g_m, \dots, g_0\rangle) = \\ = (s_i\mathtt{Q}, \langle s_i g_m, s_{i-1}g_{m-1}, \dots, s_0 g_{m-i}, e_{m-i}, g_{m-i-1}, \dots g_0\rangle).$$

Определим морфизм симплициальных множеств

$$\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X) \xrightarrow{u_{\mathrm{Prism}\,(X)}} \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$$

формулой $(\mathtt{Q}, \langle g_m, \dots, g_0\rangle) \mapsto (\mathtt{Q}, [g_{m-1}, \dots, g_0])$. Для нас важен следующий простой факт.

Предложение 6. *Имеет место следующий коммутативный квадрат отображений симплициальных множеств, где горизонтальные стрелки забывают комбинаторику объектов группоида и определены правилами*

$$(\mathsf{Q}, \langle g_m, \dots, g_0 \rangle) \overset{\Pi'}{\mapsto} \langle g_m, \dots, g_0 \rangle,$$

$$(\mathsf{Q}, [g_{m-1}, \dots, g_0]) \overset{\Pi}{\mapsto} [g_{m-1}, \dots, g_0]$$

соответственно:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X) \arrow[r, "\Pi'"] \arrow[d, "u_{\mathrm{Prism}\,(X)}"'] & \mathcal{W}\mathrm{PL}\,(X) \arrow[d, "u_{\mathrm{PL}\,(X)}"] \\ \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X) \arrow[r, "\Pi"'] & \overline{\mathcal{W}}\mathrm{PL}\,(X). \end{tikzcd}$$

Формулы (11) и (12), определяющие $\mathcal{W}$-конструкцию, выражают границы $\overline{\mathcal{W}}G$ через границы G и вырождения $\overline{\mathcal{W}}G$ через вырождения G. Нам нужно отметить существование обратного выражения границ G через границы $\overline{\mathcal{W}}G$.

Пусть $w = (\mathsf{Q}(w), [g_{m-1}(w), \dots g_0(w)])$ – общий m-симплекс $\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)$. Пользуясь формулами, мы можем написать следующие соотношения.

Предложение 7.

$$\begin{aligned} g_i(w) &= g_i(d_0 w) && \textit{при} \quad i = 1, \dots, m-2, \\ d_j g_{m-1}(w) &= g_{m-2}(d_j w) && \textit{при} \quad j = 1, \dots, m-1, \\ d_0 g_{m-1}(w) &= (g_{m-2}(d_0 w))^{-1} \circ g_{m-2}(d_1 w), \end{aligned}$$

где d_* слева – граница в G, а d_* справа – граница в $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$.

3.4. Вложение $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X) \xrightarrow{\Psi} \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$ и проекция $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X) \xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$. Построим вложение $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X) \xrightarrow{\Psi} \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$ индукцией по скелетам симплициального множества $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ при участии последовательного выбора призматических гомеоморфизмов.

Скелеты симплициальных множеств подробно обсуждаются, например, в [10, V. 1]. Скелет $\mathrm{sk}_m X \subset X$ – это симплициальное подмножество, порожденное всеми невырожденными симплексами X размерности $\leq m$.

3.4.1. Сначала мы заготовим для всякого m-симплекса

$$Q = (\mathtt{Q}_0 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_m} \mathtt{Q}_m) \in (\mathcal{N}\mathfrak{R}(X))_m$$

его "линеаризацию"

$$\mathtt{L}Q = (\mathtt{L}_0 Q \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathtt{L}_m Q) \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_m.$$

По определению комбинаторной сборки (см. §2.8) всякая абстрактная сборка $\mathtt{Q}_{i-1} \xrightarrow{\mu_i} \mathtt{Q}_i$ цепочки $\mathtt{Q}$ представима некоторым $\mathcal{R}(X)$-морфизмом $\mathtt{Q}_{i-1} \xrightarrow{f_i} \mathtt{Q}_i$. Зафиксируем этих представителей при всех i и получим цепь

$$\widetilde{Q} = (\mathtt{Q}_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_m} \mathtt{Q}_m) \in (\mathcal{N}\mathcal{R}(X))_m,$$

такую, что $\mathcal{A}(\widetilde{Q}) = Q$.

Последовательно применяя разложение (5) из предложения 1, получаем следующую коммутативную диаграмму в $\mathcal{R}(X)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Q}_0 = \mathsf{L}_0 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[dr, "f_1"'] & \mathsf{L}_1 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[d] & \mathsf{L}_2 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\trianglelefteq"] & \mathsf{L}_m Q \arrow[d] \\
& \mathsf{Q}_1 = \mathsf{L}_0 d_0 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[dr, "f_2"'] & \mathsf{L}_1 d_0 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\trianglelefteq"] & \mathsf{L}_{m-1} d_0 Q \arrow[d] \\
& & \mathsf{Q}_2 = \mathsf{L}_0 d_0^2 Q \arrow[r, "\trianglelefteq"] \arrow[dr, "f_2"'] & \cdots \arrow[r, "\trianglelefteq"] & \mathsf{L}_{m-2} d_0^2 Q \arrow[d] \\
& & & \cdots \arrow[dr, "f_m"'] & \vdots \arrow[d] \\
& & & & \mathsf{Q}_m = \mathsf{L}_0 d_0^m Q,
\end{tikzcd} \tag{16}$$

где горизонтальные строки – цепочки геометрических сборок, начинающиеся с $\mathtt{Q}_0, \ldots, \mathtt{Q}_m$ соответственно, а вертикальные морфизмы – клеточные гомеоморфизмы. При этом строки не зависят от выбора f_i, представляющих μ_i, т.е. зависят только от $\mathtt{Q}$. Верхняя строка и есть цепь $\mathtt{L}Q$, канонически сопоставленная Q. Отметим следующее свойство конструкции: при $i > 0$ имеем $\mathtt{L}d_i Q = d_i \mathtt{L}Q$.

3.4.2. Пусть $Q \in (\mathcal{N}\mathfrak{R}(X))_m$. Его образ $\Psi(Q) \in (\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X))$ мы будем искать в виде $(\mathtt{L}Q, [g_{m-1}(Q), \ldots, g_0(Q)])$, где гомеоморфизмы $g_i(Q)$ строятся индукцией по скелетам $\mathrm{sk}_m \mathcal{N}\mathfrak{R}(X) \xrightarrow{\Psi_m}$

$\mathrm{sk}_m \mathrm{Prism}(X)$. Невырожденный симплекс $\mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ – это цепь комбинаторных сборок, не содержащая тождественных сборок. Симплексы $\mathrm{sk}_m \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ – все цепочки комбинаторных сборок, в которых встречается не более чем m штук не тождественных.

Таким образом, $\mathrm{sk}_0 \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ – симплициальное множество, k-мерный симплекс которого – это цепочка

$$\underbrace{\mathtt{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathtt{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathtt{Q}}_{k}$$

из k штук тождественных комбинаторных сборок какого-нибудь шарового комплекса из $\mathtt{Q} \in \mathbf{R}(X)$. Сопоставим такому симплексу вырожденный симплекс

$$(\mathtt{Q}, [e_{m-1}, \ldots, e_0]) \in \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X).$$

Допустим, что уже построено Ψ_{m-1}. Построим отображение Ψ_m, продолжающее Ψ_{m-1}. Пусть $Q \in (\mathrm{sk}_m \mathcal{N}\mathfrak{R}(X))_m$ – невырожденный симплекс. Тогда $d_i Q \in \mathrm{sk}_{m-1} \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$ и $\Psi d_i Q$ уже построено. Мы ищем $\Psi(Q)$ в виде $(\mathtt{L}Q, [g_{m-1}(Q), \ldots, g_0(Q)])$. Должно выполняться равенство $g_i(Q) = g_i(d_0 Q)$ при $i = m-2, \ldots 0$; тем самым, g_i построены при $i = 0, \ldots, m-2$. Нам необходимо определить $g_{m-1}(Q)$. В соответствии с предложением 7 отображения $d_i g_{m-1}(Q)$, $i = 1, \ldots, m-1$, уже построены и удовлетворяют требованиям предложения 3. Следовательно, найдется продолжающий $d_i g_{m-1}(Q)$, $i = 1, \ldots, m-1$, призматический гомеоморфизм, который мы и выбираем в качестве $g_{m-1}(Q)$. Для вырожденного симплекса Q мы по формулам (15) строим $(\mathtt{L}Q, [g_{m-1}(Q), \ldots, g_0(Q)])$ с помощью однозначной редукции к невырожденному $Q = s_{i_1} s_{i_2} \ldots Q'$, где Q' – невырожденный симплекс размерности $\leq m$.

3.4.3. Построим проекцию $\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X) \xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{N}\mathfrak{R}(X)$. Для послойного гомеоморфизма $f \in \mathrm{PL}_m(X)$ мы обозначаем через $f\lfloor_i$ его слой над вершиной базы с номером i. Симплексу $w = (\mathtt{Q}, [g_{m-1}, \ldots, g_0]) \in (\overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X))_m$ мы сопоставляем последовательность отображений $\widehat{g}_i(w) = g_i\lfloor_i \in \mathrm{PL}_0(X), i = 0, \ldots, m-1$. Рассмотрим последовательность шаровых комплексов

$$\mathtt{Q}_0 = \widehat{\mathtt{Q}}_0(w), \widehat{\mathtt{Q}}_i(w) = \widehat{g}_{m-i} \circ \widehat{g}_{m-i+1} \circ \ldots \circ \widehat{g}_{m-1}(w)(\mathtt{Q}_i),\ i = 1, \ldots, m.$$

По построению и в силу призматичности гомеоморфизмов g_i возникает цепь $\widehat{\Psi^*}(w) \in (\mathcal{N}\mathbf{R}(X))_m$:

$$\widehat{\Psi^*}(w) = \widehat{\mathtt{Q}}_0(w) \xrightarrow{\widehat{g}_{m-1}(w)} \widehat{\mathtt{Q}}_1(w) \xrightarrow{\widehat{g}_{m-2}(w)} \ldots \xrightarrow{\widehat{g}_0(w)} \widehat{\mathtt{Q}}_m(w).$$

Образ цепи $\widehat{\Psi^*}(w)$ при применении функтора $\mathcal{A} : \mathcal{R}(X) \to \mathfrak{R}(X)$ мы и положим значением $\Psi^*(w) \in (\mathcal{N}\mathfrak{R}(X))_m$. Нетрудно проверить, что определение корректно и Ψ^* – отображение симплициальных множеств, $\Psi^*\Psi = \mathrm{id}$ и имеет место следующий факт.

Предложение 8. *Отображение $\Psi\Psi^*$ симплициально гомотопно тождественному.*

Доказательство. Симплициальная гомотопия снова строится индукцией по скелетам с помощью леммы 3. □

3.5. Отображения Φ, Φ^*. Определим вложение

$$\mathcal{N}\mathbf{R}(X) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)$$

соответствием на симплексах: m-цепочке $\mathtt{Q} = (\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathtt{Q}_m)$ мы сопоставляем m-симплекс $\Phi(\mathtt{Q}) = (\mathtt{Q}, [e_m, \ldots, e_0])$.

Определим отображение $\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X) \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{N}\mathbf{R}(X)$ соответствием на симплексах: m-симплексу $w = (\mathtt{Q}, [g_m, \ldots, g_0])$ мы сопоставляем m-цепочку $\Phi^*(w) = g_m^{-1}\mathtt{Q} = (g_m^{-1}\lfloor_0\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq g_m^{-1}\lfloor_m\mathtt{Q}_m)$.

Предложение 9. *Композиция $\Phi^*\Phi$ есть тождественное отображение; отображение $\Phi\Phi^*$ симплициально гомотопно тождественному.*

Доказательство. Первое утверждение следует из построения, второе доказывается индукцией по скелетам с помощью леммы 3. □

В результате конструкций этого параграфа мы получили следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}\mathbf{R}(X) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X) \\
{\scriptstyle \mathcal{N}\mathbf{P}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u_{\mathrm{Prism}\,(X)}} \\
\mathcal{N}\mathfrak{R}(X) & \xrightarrow[\Psi]{} & \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X),
\end{array}$$

где Φ, Ψ – симплициальные гомотопические эквивалентности.

3.6. Редукция теоремы A к лемме о призматической тривиализации. В соответствии с предложением 6 имеется коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X) & \xrightarrow{\Pi'} & \mathcal{W}\mathrm{PL}\,(X) \\ {\scriptstyle u_{\mathrm{Prism}\,(X)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u_{\mathrm{PL}\,(X)}} \\ \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X) & \xrightarrow[\Pi]{} & \overline{\mathcal{W}}\mathrm{PL}\,(X). \end{array}$$

Рассмотрим индуцированное Π главное PL-расслоение

$$\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X) \to \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X).$$

Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}\mathbf{R}(X) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathcal{W}\mathrm{Prism}(X) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & \widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X) \arrow[r, "\widetilde{\Pi}"] \arrow[d] & \mathcal{W}\mathrm{PL}(X) \arrow[d] \\ \mathcal{N}\mathfrak{R}(X) \arrow[rr, "\Psi"] & & \overline{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}(X) \arrow[r, "\Pi"] & \overline{\mathcal{W}}\mathrm{PL}(X) \end{tikzcd}$$

где $\widetilde{\Pi}$ – подъем Π, $\Pi' = \widetilde{\Pi} \circ i$.

Лемма 4 (О призматической тривиализации). *Вложение*

$$|\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)| \overset{|i|}{\hookrightarrow} |\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)|$$

– гомотопическая эквивалентность.

Лемма 4 будет выведена в §4 из леммы 5; дальнейшее будет в значительной степени посвящено доказательству леммы 5.

3.7. Доказательство теоремы А.

1. Имеет место следующий стандартный факт теории симплициальных главных расслоений:

Пусть $X \xrightarrow{f} BG$ *– некоторое симплициальное отображение,* $EG_f \overset{u_{Gf}}{\to} X$ *– индуцированное главное расслоение, т.е. квадрат*

$$\begin{array}{ccc} EG_f & \xrightarrow{\tilde{f}} & EG \\ {\scriptstyle u_{Gf}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u_G} \\ X & \xrightarrow[f]{} & BG \end{array}$$

– декартов. Тогда, если пространство $|EG_f|$ стягиваемо, то в квадрате

$$\begin{tikzcd} |EG_f| \arrow[r, "|\widetilde{f}|"] \arrow[d, "|u_{Gf}|"'] & |EG| \arrow[d, "|u_G|"] \\ |X| \arrow[r, "|f|"'] & |BG| \end{tikzcd}$$

$|f|$, $|\widetilde{f}|$ *– гомотопические эквивалентности.*

Этот факт следует из эквивариантности $\widetilde{f}$, из того, что квадрат продолжается до морфизма гомотопических последовательностей расслоений, теоремы Уайтхеда и 5-леммы.

2. В силу предложения 9 отображение Φ – гомотопическая эквивалентность, и в силу леммы 2 мы получаем, что пространство $|\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)|$ стягиваемо. Применив лемму 4, мы оказываемся в ситуации п. 1 доказательства, что и доказывает теорему A. $\square$

4. Редукция леммы о призматической тривиализации к лемме о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов

В этом параграфе мы выведем лемму 4 "о призматической тривиализации" из леммы 5 "о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейств послойных гомеоморфизмов", которую мы сейчас и сформулируем.

Рассмотрим симплициальное множество $\underline{\mathrm{Prism}}^N(X)$, k-элементы которого при $N \geq 1$ – наборы данных $\langle \mathtt{Q}, \{g_i\}_{i=1}^N \rangle$, где $\mathtt{Q} \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$,

$$\forall i = 1, \ldots, N : \; g_i \in \mathrm{Mor}_k \mathrm{Prism}\,(X), \quad \mathrm{codom}\, g_i = \mathtt{Q}.$$

$\underline{\mathrm{Prism}}^0(X)$ полагаем совпадающим с $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$. При $N \geq 1$, забывая о призматичности последнего гомеоморфизма g_N, получаем вложение $\underline{\mathrm{Prism}}^N(X) \xhookrightarrow{j} \underline{\mathrm{Prism}}^{N-1}(X) \times \mathrm{PL}\,(X)$.

Лемма 5 (Лемма о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов)**.** *Вложение* $|\underline{\mathrm{Prism}}^N(X)| \xhookrightarrow{|j|} |\underline{\mathrm{Prism}}^{N-1}(X) \times \mathrm{PL}\,(X)|$ *– гомотопическая эквивалентность.*

Доказательству леммы 5 будут посвящены следующие параграфы, а в этом мы, после приготовлений, докажем в §4.4 импликацию (лемма 5 $\Rightarrow$ лемма 4).

4.1. Инъективные симплициальные множества (Δ-множества Рурка и Сандерсона). Через $\mathbf{iN}$ мы обозначаем подкатегорию категории конечных ординалов $\mathbf{N}$ с теми же объектами, но только инъективными монотонными отображениями в качестве морфизмов. Морфизмы $\mathbf{iN}$ порождены всеми когранями d^i. Инъективными симплициальными множествами мы называем функторы $\mathbf{iN}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ (это ровно то же самое, что Δ-множества Рурка и Сандерсона [25]). Вложение $\mathbf{iN} \overset{\mathbf{i}}{\hookrightarrow} \mathbf{N}$ порождает забывающий функтор

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{N}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{Sets}^{\mathbf{iN}^{\mathrm{op}}},$$

сопоставляющий симплициальному множеству его инъективную часть.

Симплициальный комплекс K локально упорядочен, если на вершинах K введен частичный порядок, такой, что вершины всякого симплекса K вполне упорядочены. Естественно возникающую на упорядоченных симплексах K структуру инъективного симплициального множества мы обозначаем через $\mathbf{i}(K)$.

4.2. Инъективные раскраски полиэдра симплициальными множествами и теорема Брауна о представимых функторах. Триангуляцию $|K| \xrightarrow{t} N$ полиэдра N мы называем *локально упорядоченной*, если комплекс K локально упорядочен. Пусть Y – симплициальное множество, N – некоторый полиэдр. Инъективной раскраской полиэдра N с помощью симплициального множества Y мы назовем данные $\langle t, f\rangle$, где $K \xrightarrow{t} N$ – локально упорядоченная триангуляция N, а $\mathbf{i}(K) \xrightarrow{f} \mathbf{d}(Y)$ – некоторый морфизм инъективных симплициальных множеств. Две Y-раскраски $\langle t_0, f_0\rangle$ и $\langle t_1, f_1\rangle$ полиэдра K конкордантны, если есть раскраска полиэдра $K\times[0,1]$, совпадающая с $\langle t_j, f_j\rangle$ на j-м крае.

Обозначим через $\mathbf{PL}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathbf{Col}Y} \mathbf{Sets}$ функтор, относящий полиэдру множество всех классов конкордантности его Y-раскрасок. Обозначим через $\mathbf{PL}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathbf{Ho}(-,|Y|_M)} \mathbf{Sets}$ функтор, относящий полиэдру N множество $\mathbf{Ho}(N, |Y|_M)$ всех гомотопических классов его непрерывных отображений в $|Y|_M$.

Относительная теорема Зимана о симплициальной аппроксимации [30] гарантирует, что есть естественный изоморфизм двух этих функторов $\mathbf{Col}Y \approx \mathbf{Ho}(-, |Y|_M)$. При этом, если $|Y|_M$ связно и имеет счетные гомотопические группы, то теорема Брауна

[8, с. 469] о представимости гомотопических функторов на полиэдрах гарантирует, что Y гомотопически единственным образом восстанавливается по $\mathbf{Ho}(-,|Y|_M)$, а следовательно, и по $\mathbf{Col}Y$.

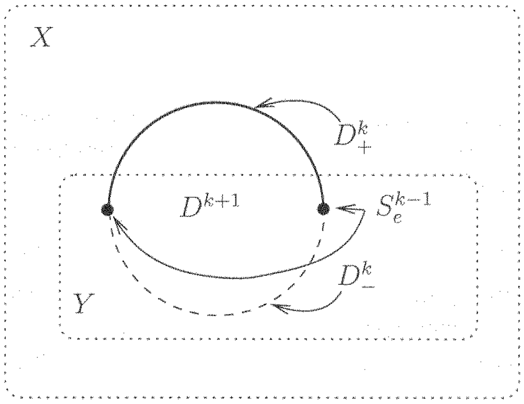
Инъективные раскраски полиэдров симплициальными множествами – естественный инструмент в доказательствах гомотопической тривиальности пар неканоновских симплициальных множеств, поскольку в этом случае комбинаторная симплициальная гомотопия плохо определена.

4.3. "$\frown$-лемма" и "$\sqcap$-лемма". Пусть (X, Y) – пара симплициальных множеств, т.е. $Y \subseteq X$. Мы всегда предполагаем, что X связно. Рассмотрим вложение $|Y|_M \overset{f}{\hookrightarrow} |X|_M$.

Нам потребуются два разных способа сказать, что f – гомотопическая эквивалентность, в терминах (X,Y)-раскрасок пар полиэдров. Различие лишь в комбинаторике раскрасок. Назовем эти два утверждения "$\frown$-леммой" и "$\sqcap$-леммой".

Раскраска полиэдра симплициальным множеством обсуждалась в §4.2. Раскраска пары полиэдров (P, Q) парой симплициальных множеств (X, Y) определяется естественным образом как локально упорядоченная кусочно-линейная триангуляция p полиэдра P, индуцирующая триангуляцию q подполиэдра Q, и X-раскраска p, индуцирующая Y-раскраску q.

4.3.1. $\frown$-лемма. Пусть есть $(k+1)$-мерный шар D^{k+1}, в ограничивающей его сфере $S^k = \partial D^{k+1}$ отмечен экватор $S^{k-1}_e \subset S^k$, выделяющий в S^k два замкнутых полушария $D^k_+, D^k_- \subset S^k$, $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}_e$. Рассмотрим вложение пар $(D^k_+, S^{k-1}_e) \hookrightarrow (D^{k+1}, D^k_-)$



$\frown$-леммой для (X, Y) мы назовем следующее утверждение:

$\frown$-Лемма. *Для любого k любая (X, Y)-раскраска пары (D^k_+, S^{k-1}_e) продолжается до (X, Y)-раскраски пары (D^{k+1}, D^k_-).*

Предложение 10. *Вложение $|Y|_M \hookrightarrow |X|_M$ – гомотопическая эквивалентность тогда и только тогда, когда для (X, Y) верна $\frown$-лемма.*

Доказательство. По теореме Уайтхеда необходимое и достаточное условие гомотопической эквивалентности – тривиальность относительных гомотопических классов сфер. А в силу теоремы Зимана об относительной симплициальной аппроксимации условие тривиальности относительных гомотопических классов сфер имеет вид $\frown$-леммы. □

4.3.2. Рассмотрим морфизм **iN**-множеств $A \xrightarrow{f} B$. Морфизм f является каноновским расслоением-эквивалентностью **iN**-множеств, если выполнена счетная последовательность аксиом:

KF-E(0): отображение $f_0 : A_0 \to B_0$ – эпиморфизм;

....

KF-E(k): для всяких $b \in (b)_k$, $a_0, \dots, a_k \in A_{k-1}$, таких, что $f(a_i) = d_i b$ и $d_i(a_j) = d_{j-1} a_i$ при $i < j$, верно, что найдется $a \in A_k$, такой, что $d_i a = a_i$ и $f(a) = b$.

....

Пусть $(A^0, A^1), (B^0, B^1)$ – пары **i**N-множеств. Пара морфизмов

$$(A^0, A^1) \xrightarrow{f^0, f^1} (B^0, B^1)$$

– кановское расслоение-эквивалентность пар, если и f^0, и f^1 являются кановскими расслоениями-эквивалентностями.

4.3.3. Рассмотрим следующие инъективные симплициальные множества:

iN-множество $\overline{X}$, k-элементами которого являются локально упорядоченные X-раскрашенные триангуляции Δ^k, подразбивающие клеточный комплекс $[\Delta^k]$;

iN-множество $\overline{X}_{\times[0,1]}$, k-элементами которого являются локально упорядоченные, X-раскрашенные триангуляции полиэдра $\Delta^k \times \Delta^1$, подразбивающие комплекс $[\Delta^k] \times [\Delta^1]$.

Есть два отображения инъективных симплициальных множеств

$$\overline{X}_{\times[0,1]} \xrightarrow{h_0,h_1} \overline{X},$$

отвечающие двум морфизмам

$$\Delta^k \xrightarrow{\mathrm{id}\times d^0, \mathrm{id}\times d^1} \Delta^k \times \Delta^1.$$

Есть тавтологическое вложение пар **iN**-множеств $(\mathbf{d}X, \mathbf{d}Y) \subset (\overline{X}, \overline{Y})$). При этом вложении k-симплекс $x \in \mathbf{d}X_k$ рассматривается как x-раскрашенный симплекс Δ^k. Рассмотрим пару **iN**-подмножеств $(\widetilde{X}_{\times[0,1]}, \widetilde{Y}_{\times[0,1]}) \subset (\overline{X}_{\times[0,1]}, \overline{Y}_{\times[0,1]})$, определенную следующим образом: $\widetilde{x} \in (\widetilde{X}_{\times[0,1]})_k$ тогда и только тогда, когда

1) $h_0(\widetilde{x}) \in \mathbf{d}X_k$,
2) $h_0(\widetilde{x}) \in \mathbf{d}Y_k \Rightarrow \widetilde{x} \in (\widetilde{Y}_{\times[0,1]})_k$,
3) $h_1\widetilde{x} \in \overline{Y}_k$.

П-леммой для (X, Y) мы назовем следующее утверждение:
проекция пар

$$(\widetilde{X}_{\times[0,1]}, \widetilde{Y}_{\times[0,1]}) \xrightarrow{h_0,h_0} (\mathbf{d}X, \mathbf{d}Y)$$

есть кановское расслоение-эквивалентность.

4.3.4. Геометрически утверждение П-леммы для (X, Y) можно представлять себе следующим образом. Пусть есть симплициальное ведро $\Delta^k \cup \partial\Delta^k \times [0,1]$ (см. рис. 10, слева) с локально упорядоченной триангуляцией K, подразбивающей клеточный комплекс $K \trianglelefteq [\Delta^k] \cup \partial[\Delta^k] \times [0,1]$. При этом на дне ведра триангуляция K X-раскрашена таким образом, что край ведра $K|_{\Delta^k \times \{1\}}$ Y-раскрашен и, если грань основания $d_i K|_{\Delta^k}$ Y-раскрашена, то и вся стенка $K|_{d_i\Delta^k \times [0,1]}$ тоже Y-раскрашена.
Лемма утверждает, что всякую такую (X, Y)-раскраску ведра можно дополнить до (X, Y)-раскраски пары $\Delta^k \times [0,1]$, $\Delta^k \times \{1\}$.

Предложение 11. *Вложение $|X| \hookrightarrow |Y|$ – гомотопическая эквивалентность тогда и только тогда, когда для пары (X, Y) верна П-лемма.*

Доказательство. Из $\frown$-леммы, очевидно, следует П-лемма, поскольку в терминах интерпретации 4.3.4 $\frown$-лемма позволяет всякий раз заполнить ведро нужным образом.

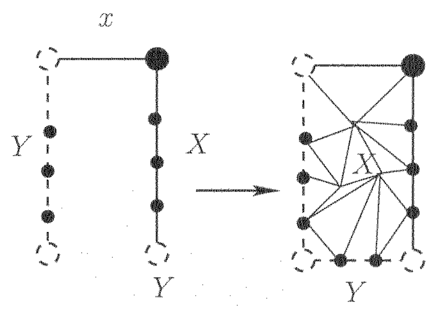


Рис. 10.

Обратно: из $\sqcap$-леммы следует $\frown$-лемма. Индукцией по скелетам триангуляции (K, L) пары D^{k+1}, S^k мы строим и заполняем (X, Y)-раскрашенные ведра. $\square$

4.4. Вывод леммы 4 из леммы 5. В силу предложений 10 и 11, для того чтобы вывести лемму 4 из леммы 5, достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 12. *Из $\sqcap$-леммы для всех пар*

$$\big(\underline{\mathrm{Prism}}^{N-1}(X) \times \mathrm{PL}\,(X), \underline{\mathrm{Prism}}^{N}(X)\big)$$

при всех конечных $N \geq 1$ следует $\frown$-лемма для пары $(\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X)$, $\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X))$.

Доказательство. Схема рассуждения состоит в следующем. Допустим, у нас есть пара (D^{k+1}, S^k), снабженная парой упорядоченных триангуляций (K, L), раскрашенных парой

$$(\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X), \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)),$$

т.е. фиксирован морфизм

$$(\mathbf{i}K, \mathbf{i}L) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (\mathbf{d}\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X), \mathbf{d}\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)).$$

Рассмотрим пару полиэдров

$$(D^k \times [0,1], S^{k-1} \times [0,1] \cup D^k \times \{1\}).$$

Рассмотрим пару клеточных разбиений этой пары полиэдров

$$(K \times [0,1], L \times [0,1] \cup K \times \{1\}).$$

Мы будем искать продолжение (K, L) до локально упорядоченной триангуляции

$$(K', L') \trianglelefteq (K \times [0,1], L \times [0,1] \cup K \times \{1\})$$

и продолжение раскраски (α, β) до раскраски

$$(\mathbf{i}K', \mathbf{i}L') \xrightarrow{(\alpha', \beta')} (\mathbf{d}\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X), \mathbf{d}\mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X)).$$

Продолжение раскраски мы ищем индукцией по фильтрации

$$(\Xi_l, \Upsilon_l) = (K \cup (K_{l-1} \times [0,1]), \quad L \cup (L_{l-1} \times [0,1]) \cup (K_{l-1} \times \{1\})),$$

$$(\Xi_0, \Upsilon_0) = (K, L) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (\Xi_k, \Upsilon_k) = (K \times [0,1], L \times [0,1] \cup K \times \{1\}).$$

Пусть есть $(\widetilde{\mathcal{W}}\mathrm{Prism}\,(X), \mathcal{W}\mathrm{Prism}\,(X))$-раскраска (Ξ_l, Υ_l), продолжающая (α, β). Тогда условие ее продолжения на $(\Xi_{l+1}, \Upsilon_{l+1})$ в точности эквивалентно П-лемме для

$$(\underline{\mathrm{Prism}}^{\,k-l}(X) \times \mathrm{PL}\,(X), \underline{\mathrm{Prism}}^{\,k-l+1}(X)). \qquad \square$$

5. План работ по доказательству леммы о совместной $\mathbf{R}(X)$-триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов

Наша конечная цель – доказать $\frown$-лемму (см. §4.3.1) для пары $(|\underline{\mathrm{Prism}}^{m-1}(X) \times \mathrm{PL}\,(X)|, |\underline{\mathrm{Prism}}^{m}(X))|)$. То есть мы хотим доказать следующее. Пусть есть некоторая триангуляция K диска D^k_+, ее раскраска $\mathcal{Q}$ посетом $\mathbf{R}(X)$ и семейство послойных гомеоморфизмов $G_1, \ldots G_m, U \in \mathrm{PL}_{D^k_+}$, таких, что $G_1, \ldots G_m$ – $\mathcal{Q}$-призматичны и $U\lfloor_{S^{k-1}_e}$ призматичен относительно индуцированной раскраски $\mathcal{Q}\lfloor_{S^{k-1}_e}$ индуцированной триангуляции $K\lfloor_{S^{k-1}_e}$ сферы $S^{k-1}_e = \partial D^k_+$. Утверждается, что в этой ситуации можно продолжить триангуляцию K до триангуляции $\widetilde{K}$ диска D^{k+1}, раскраску $\mathcal{Q}$ до $\mathbf{R}(X)$-раскраски $\widetilde{\mathcal{Q}}$ триангуляции $\widetilde{K}$, гомеоморфизмы $G_1, \ldots, G_m, U$ до гомеоморфизмов $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_m, \widetilde{U} \in \mathrm{PL}_{D^{k+1}}(X)$ так, чтобы $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_m$ остались $\widetilde{\mathcal{Q}}$-призматическими, а $\widetilde{U}\lfloor_{D^k_-}$ стал $\widetilde{\mathcal{Q}}\lfloor_{D^k_-}$-призматическим.

Гомотопия семейства гомеоморфизмов к “более призматическому” виду доступна с помощью многомерного обобщения конструкции Хадсона фрагментации изотопии. Чтобы описать об-

общенную фрагментацию Хадсона и ее влияние на призматичность гомеоморфизма, мы вводим универсальное обобщение понятия призматичности гомеоморфизма, а именно призматичность гомеоморфизма относительно “предпучка Александрова”.

Мы начинаем с §6, посвященного топологиям Александрова на полиэдре. Множество $\mathbf{Al}(X)$ всех топологий Александрова на полиэдре P частично упорядочено по отношению усиления топологии. С другой стороны, любой посет есть T^0-пространство Александрова. Поэтому для топологии Александрова $\mathcal{T}$ на полиэдре B можно рассматривать “предпучки” со значениями в $\mathbf{Al}(X)$, т.е. морфизмы пространств Александрова $(B,\mathcal{T}) \to \mathbf{Al}(X)$. Мы учимся элементарной хирургии предпучков Александрова и описываем их гомотопии.

В §7 мы вводим понятие призматичности гомеоморфизма $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ относительно предпучка Александрова $(B,\mathcal{T}) \to \mathbf{Al}(X)$. В частности, это понятие обобщает понятие призматичности G относительно $\mathbf{R}(X)$-раскраски триангуляции B. Мы изучаем, как можно деформировать гомотопией предпучок Александрова в классе предпучков, относительно которых G призматичен.

Наши конструкции выделяют случай предпучков Александрова со значениями в $\mathbf{D}_c^\infty(K) \subseteq \mathbf{Al}(X)$. Топологии из $\mathbf{D}_c^\infty(K)$ дискретны всюду кроме дизъюнктного набора открытых (в обычной топологии) шаров, конических относительно фиксированной триангуляции K многообразия X.

Дело в том, что, с одной стороны, гомеоморфизмы, призматические относительно предпучка со значениями в $\mathbf{D}_c^\infty(K)$, есть ожидаемый выход процедуры обобщенной фрагментации гомеоморфизма, а с другой стороны, гомеоморфизмы, призматические относительно предпучка со значениями в $\mathbf{D}_c^\infty(K)$, допускают $\mathbf{R}(X)$-триангуляцию.

В §8 мы описываем процедуру $\mathbf{R}(X)$-триангулирования $\mathbf{D}_c^\infty(K)$-призматических послойных гомеоморфизмов.

Далее мы приступаем к многоступенчатому построению многомерной версии фрагментации Хадсона послойного гомеоморфизма, т.е. гомотопии, “повышающей” призматичность гомеоморфизмов.

В §9 вводится самая общая версия непослойной деформации послойного гомеоморфизма $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ в классе послойных отображений. Деформация определяется отображением $X \times C \xrightarrow{F}$

$X\times B$, послойным относительно проекции на X. Результат применения деформации – новое отображение $X\times C \xrightarrow{F\rtimes G} X\times C$, послойное относительно проекции на C. Доказывается важное предложение 40, утверждающее, что в случае, когда $F\rtimes G$ – послойный гомеоморфизм, при специальных условиях на F гомеоморфизм $F\rtimes G$ "сохраняет" призматичность G.

В §10 мы определяем "системы графиков" в пространстве $X\times I^k$ (I^k – k-мерный куб) и связываем с системой графиков Γ замечательное отображение $X\times T^k \xrightarrow{F_\Gamma} X\times I^k$, послойное относительно X. Полиэдр T^k – $(k+1)$-мерная трапеция с кубическим основанием I^k. Система графиков – это набор подполиэдров $X\times I^k$, являющихся вложенными по разным координатам графиками функций $X\times I^{k-1}\to I$. Необходимы определенные условия согласования графиков **gf1**, **gf2**. Смысл условий в том, что графики расположены так, что их можно все одновременно раздуть в полоски и при этом картинка не испортится. В $X\times T^k$ вложены полиэдры, получающиеся как графики раздувания полиэдров из Γ с постоянной скоростью по параметру – высоте пирамиды. Отображение $X\times T^k \xrightarrow{F_\Gamma} X\times I^k$ посылает точку в ее прообраз при раздувании системы графиков Γ.

В §11 мы изучаем деформации $F_\Gamma\rtimes G$. В данной ситуации общие деформации $\rtimes$ превратились в гомотопии между исходным гомеоморфизмом $G=(F_\Gamma\rtimes G)^0$ и послойным отображением $(F_\Gamma\rtimes G)^1$ в расслоении над верхним основанием $(T^k)^1$ трапеции T^k. Лемма 11 отмечает, что при естественном согласовании Γ и G, состоящем в том, что $G(\Gamma)$ – тоже система графиков, мы получаем, что $F_\Gamma\rtimes G$ – послойный гомеоморфизм и, тем самым, $F_\Gamma\rtimes G$ – гомотопия гомеоморфизма G.

Далее мы отмечаем (лемма 10), что при простом дополнительном требовании **gf4** на систему графиков Γ гомеоморфизм $(F_\Gamma\rtimes G)^1$ становится призматическим относительно замечательного предпучка Александрова $\mathbf{J}_\Gamma$ на $(T^k)^1$.

В §12 мы связываем с произвольной триангуляцией L многообразия X и компактным семейством гомеоморфизмов $\mathcal{G}\subset \mathrm{PL}_{I^k}(X)$ "систему Хадсона" – систему графиков $\mathrm{H}(L,\mathcal{G})$. Система Хадсона согласована с $\mathcal{G}$ и обладает тем свойством, что образ $\mathbf{J}_{\mathrm{H}(L,\mathcal{G})}$ лежит в $\mathbf{S}^k(L)\subset \mathbf{Al}(X)$. Топологии $\mathbf{S}^k(L)$ дискретны всюду кроме объединения не более чем k штук открытых звезд L. Лемма 11 гарантирует, что системы Хадсона действительно существуют для любых L и $\mathcal{G}$.

В §14 мы используем свободу выбора триангуляции при построении системы Хадсона. В предложении 57 мы показываем, что для произвольной триангуляции K многообразия X можно выбрать большое число n так, что предпучок Александрова $\mathbf{J}_{\mathrm{H}(\mathrm{sd}_n K,\mathcal{G})}$ ослабляется до пучка $\mathbf{J}'$ со значениями в $\mathbf{D}_c^\infty(K)$. Ослабление сохраняет призматичность гомеоморфизмов, и, следовательно, для всякого G из компактного семейства гомеоморфизмов $\mathcal{G}$ гомеоморфизм $(F_{\mathrm{H}(\mathrm{sd}_n K,\mathcal{G})} \rtimes G)^1$ является призматическим относительно предпучка $\mathbf{J}'$ со значениями в $\mathbf{D}_c^\infty(K)$.

В §14 мы собираем весь накопленный в §§9–13 материал в лемму 12 "о призматической фрагментации конечного семейства послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения на кубе". Лемма гарантирует, что конечное семейство $\mathrm{PL}_{I^k}(X)$ гомеоморфизмов можно одновременной гомотопией привести к $\mathbf{D}_c^\infty(K)$-призматическому виду.

Наконец в §15 леммы 13 и 14 производят окончательную склейку конструкций $\mathbf{D}_c^\infty(K)$-фрагментации гомеоморфизмов и $\mathbf{R}(X)$-триангуляции $\mathbf{D}_c(K)$-призматических гомеоморфизмов в $\frown$-лемму для пары

$$(|\underline{\mathrm{Prism}}^{m-1}(X) \times \mathrm{PL}\,(X)|, |\underline{\mathrm{Prism}}^{m}(X))|).$$

6. Пространства П. С. Александрова ("предпорядки")

В этом параграфе мы приведем некоторые конструкции с топологическими пространствами П. С. Александрова и их морфизмами. Эти конструкции потребуются далее для обобщения призматических гомеоморфизмов и описания их хирургии.

Мы начинаем с напоминания определения и некоторых свойств топологии Александрова [3] (см. также [20, 5]).

6.1. Топологией Александрова $\mathcal{T}$ на множестве Y называют топологию, в которой каждая точка $y \in Y$ имеет минимальную открытую окрестность $o(y)$. Пару $(Y, \mathcal{T})$ называют пространством Александрова. Топологии Александрова на Y эквивалентна структура предпорядка на Y.

Предпорядком на множестве называют транзитивное, рефлексивное отношение $\preceq$ (если оно еще и антисимметрично, т.е. $(a \preceq b)\wedge(b \preceq a) \Rightarrow a = b$, то предпорядок есть настоящий частичный порядок). Множества с предпорядком мы называем предпосетами или предупорядоченными множествами.

С топологией Александрова $\mathcal{T}$ связан следующий предпорядок на множестве Y: $y_0 \underset{\mathcal{T}}{\leq} y_0 \Leftrightarrow o(y_0) \subseteq o(y_1)$. Наоборот, нижние (по договоренности) идеалы предпорядка на Y образуют топологию Александрова на Y. Это соответствие между пространствами Александрова и предпосетами – изоморфизм категорий непрерывных отображений пространств Александрова и монотонных морфизмов предпосетов. Этим изоморфизмом мы отождествляем обе категории, и пространство Александрова $(Y, \mathcal{T})$ рассматриваем и как предупорядоченное множество. Категорию всех пространств Александрова и их морфизмов (т.е. непрерывных отображений или, что то же самое, монотонных отображений соответствующих предпосетов) мы обозначаем через **Al**. Настоящие посеты – это то же самое, что T_0-пространства Александрова. То есть категория **Posets** настоящих посетов образует полную подкатегорию в **Al**.

6.1.1. Топология Александрова $\mathcal{T}$ на множестве Y обладает единственной минимальной базой, составленной из минимальных окрестностей точек. Мы обозначаем минимальную базу $\mathcal{T}$ через $\mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$ и рассматриваем ее как подпосет посета 2^Y всех подмножеств Y, упорядоченных по включению. В терминах предпорядка $\underset{\mathcal{T}}{\leq}$ на Y минимальная база составлена из главных нижних идеалов.

6.1.2. Теорема Александрова описывает минимальную базу топологии как покрытие.

Теорема (П. С. Александров [2]). *Покрытие $\mathcal{U}$ множества Y есть минимальная база некоторой топологии Александрова на Y тогда и только тогда, когда*

1) *для всякой пары $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ имеет место равенство $U_0 \cap U_1 = \cup_{W \in \mathcal{W}} W$ для некоторого подмножества $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$;*

2) *если для некоторого подмножества $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ и $U \in \mathcal{U}$ верно, что $\cup_{W \in \mathcal{W}} W = U$, то $U \in \mathcal{W}$.*

Первое условие теоремы Александрова говорит, что $\mathcal{U}$ – база некоторой топологии $\mathcal{T}$, а второе в точности гарантирует то, что множества $U \in \mathcal{U}$ – действительно минимальные окрестности точек в $\mathcal{T}$.

6.1.3. Соответствие $A \mapsto \mathcal{B}(A)$ на объектах **Al** естественно продолжается до функтора $\mathbf{Al} \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathbf{Posets}$. Морфизм $y \mapsto o(y)$ является морфизмом предпорядков $(Y, \mathcal{T}) \xrightarrow{o} \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$. В терминах категории **Al** морфизм o – это универсальный морфизм из пространства Александрова в T_0-пространство Александрова, в том смысле, что для всякого морфизма $A \xrightarrow{b} P$ в **Al**, где P – T_0-пространство, найдется единственный морфизм b', такой, что следующий треугольник коммутативен:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "o"'] & & P \\ & \mathfrak{B}(A) \arrow[ur, dashed, "b'"'] & \end{tikzcd} \tag{17}$$

Тем самым, морфизмы $A \xrightarrow{o} \mathcal{B}(A)$ доставляют естественное преобразование тождественного функтора в функтор $\mathcal{B}$.

6.1.4. Пересечение любого семейства открытых множеств в топологии Александрова открыто, и, следовательно, множество $\mathcal{T}^c$ всех замкнутых подмножеств пространства $(Y, \mathcal{T})$ снова удовлетворяет аксиомам топологии Александрова. Минимальные окрестности в топологии $\mathcal{T}^c$ суть минимальные замкнутые окрестности точек в топологии $\mathcal{T}$. Такую окрестность мы обозначаем через $c(y)$. Минимальная база $\mathcal{T}^c$ отвечает верхним идеалам предпосета $(Y, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}^c) = (Y, \mathcal{T})^{\mathrm{op}}$. Переход к двойственной топологии есть инволюция на **Al**.

Классы эквивалентности $\underset{\mathcal{T}}{\sim}$ предпорядка $\underset{\mathcal{T}}{\leq}$ – это в точности множества $s(y) = c(y) \cap o(y)$, и они образуют разбиение $\Sigma(Y, \mathcal{T})$ множества Y. Есть взаимно однозначное отображение $\mathcal{B}(Y, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathrm{ns}} \Sigma(Y, \mathcal{T})$, сопоставляющее, в терминах предпорядков, главному нижнему идеалу класс эквивалентности его максимальных элементов:

$$\forall y \in Y : \mathrm{ns}\,(o(y)) = s(y).$$

6.1.5. Ослабление топологий Александрова. Пусть на Y зафиксировано две топологии Александрова $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$. Тождественное отображение Y индуцирует морфизм $(Y, \mathcal{R}) \xrightarrow{w} (Y, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда топология $\mathcal{T}$ слабее топологии $\mathcal{R}$. Тем самым, на топологиях Александрова на данном множестве Y возникает частичный порядок. Этот частичный порядок мы обозначаем тем же символом $\trianglelefteq$, что и подразбиение.

Посет упорядоченных по ослаблению топологий Александрова на данном множестве Y мы, с одной стороны, отождествляем с подкатегорией $\mathbf{Al}(X)$ категории $\mathbf{Al}$. С другой стороны, $\mathbf{Al}(X)$ – посет, и он представлен некоторым объектом $\mathbf{Posets}$.

Посет $\mathbf{Al}(X)$ обладает максимальным элементом – *тривиальной топологией* X^{triv} на X с единственным открытым множеством X. Посет $\mathbf{Al}(X)$ обладает минимальным элементом – *дискретной топологией* X^{δ}, в которой все точки X открыты и замкнуты.

6.2. Пример. Пусть у нас есть шаровой комплекс $\mathsf{Q} \in \mathbf{R}(X)$. С комплексом Q можно связать топологию Александрова $\mathcal{A}(\mathsf{Q})$ на X, в которой элементами минимальной базы $\mathcal{B}(X, \mathcal{A}(\mathsf{Q}))$ являются открытые звезды клеток Q. В двойственной топологии $\mathcal{A}^c(\mathsf{Q})$ элементами минимальной базы являются замкнутые клетки Q. Элементами разбиения $\Sigma(Y, \mathcal{A}^c(\mathsf{Q}))$ являются относительные внутренности клеток Q. Рассмотрим два комплекса $\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_1 \in \mathbf{R}(X)$.

Предложение 13.

$$(\mathsf{Q}_0 \underset{\mathbf{R}(X)}{\leq} \mathsf{Q}_1) \Leftrightarrow (\mathcal{A}(\mathsf{Q}_0) \underset{\mathbf{Al}(X)}{\leq} \mathcal{A}(\mathsf{Q}_1)) \Leftrightarrow (\mathcal{A}^c(\mathsf{Q}_0) \underset{\mathbf{Al}(X)}{\leq} \mathcal{A}^c(\mathsf{Q}_1)).$$

Доказательство. Это утверждение – тавтология на уровне определений. $\square$

Тем самым, соответствие $\mathsf{Q} \mapsto \mathcal{A}^c\mathsf{Q}$ есть вложение посетов $\mathbf{R}(X) \hookrightarrow \mathcal{A}^c\mathbf{Al}(X)$.

Заметим, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}(X) \arrow[rr, "\mathcal{A}^c"] \arrow[dr, "\mathbf{P}"'] & & \mathrm{Al}(X) \arrow[dl, "\mathfrak{B}"] \\
& \mathrm{Posets} &
\end{tikzcd}$$

6.3. Топологии Александрова и покрытия. Свяжем топологию Александрова $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ с конечным покрытием $\mathcal{U}$ множества Y. Определим минимальную открытую окрестность точки $y \in Y$ в топологии $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ равенством

$$o(y) = \bigcap_{\{U \mid U \in \mathcal{U}, y \in U\}} U.$$

Тогда минимальная замкнутая окрестность $c(y)$ в $A(\mathcal{U})$ имеет вид

$$c(y) = \bigcap_{\{U \mid U \in \mathcal{U}, y \in \overline{U}\}} \overline{U},$$

где $\overline{U} = Y \setminus U$.

Предложение 14. *Топология $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ является единственной слабейшей топологией на Y, в которой элементы покрытия $\mathcal{U}$ открыты.*

Доказательство. Это прямое следствие конструкции. $\square$

6.4. Вписывание топологий. В соответствии со стандартным определением покрытие $\mathcal{W}_0$ множества Y вписано в покрытие $\mathcal{W}_1$ (обозначаем $W_0 < W_1$), если для всякого $W_0 \in \mathcal{W}_0$ найдется $W_1 \in \mathcal{W}_1$, такой, что $W_0 \subset W_1$. Мы говорим, что топология Александрова $\mathcal{R}$ на Y вписана в топологию $\mathcal{T}$, если покрытие $\mathcal{B}(Y, \mathcal{R})$ вписано в покрытие $\mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$. Мы говорим, что топология $\mathcal{T}$ плотна, если $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ – нижняя подполурешетка в 2^Y, т.е. если из того, что $U_0, U_1 \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$, следует, что $U_0 \cap U_1 \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. В случае, когда топология $\mathcal{T}$-плотна, вписывание можно сделать функториальным.

Предложение 15. *Если топология Александрова $\mathcal{R}$ на множестве Y вписана в топологию Александрова $\mathcal{T}$ и топология $\mathcal{T}$ плотна, то найдется морфизм посетов $\mathcal{B}(Y, \mathcal{R}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$, такой, что для любого $R \in B(Y, \mathcal{R})$ имеет место включение $R \subset \phi(R)$.*

Доказательство. Мы полагаем $\phi(R) = \bigcap_{R \subseteq T \in \mathcal{R}(Y, \mathcal{T})} T$. Правая часть этого равенства лежит в $\mathcal{R}(Y, \mathcal{T})$ по определению плотности, а функториальность этого определения очевидна. $\square$

6.5. Пределы в Al. Тут мы отметим существование некоторых пределов диаграмм в категории пространств Александрова. Следующие два предложения очевидны на языке предпорядков.

Предложение 16. *В категории пространств Александрова есть все декартовы квадраты. Чтобы зафиксировать обозначения, переформулируем это утверждение точно: диаграмма произвольных морфизмов i, j*

$$\begin{tikzcd} A \underset{i,j}{\times} B \arrow[r, dashed, "j^*"] \arrow[d, dashed, "i^*"'] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "j"'] & C \end{tikzcd}$$

пополняется до декартова квадрата.

Предложение 17. *В категории пространств Александрова есть некоторые кодекартовы квадраты, а именно "склейки", т.е. диаграмма вложений i, j*

$$\begin{tikzcd} A \underset{i,j}{\sqcup} B & A \arrow[l, dashed, "j^*"'] \\ B \arrow[u, dashed, "i^*"] & C \arrow[l, hook', "j"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

пополняется до кодекартова квадрата.

Выделим отдельно специальный случай декартова квадрата. Пусть есть две топологии Александрова $\mathcal{R}, \mathcal{T}$ на одном множестве Y. Рассмотрим морфизмы ослаблений топологий $\mathcal{R}, \mathcal{T}$ до тривиальной топологии Y^{triv}:

$$(Y, \mathcal{R}) \to (Y, Y^{\mathrm{triv}}) \leftarrow (Y, \mathcal{T}) \tag{18}$$

на Y. Кодекартовым квадратом, порожденным диаграммой (18), оказывается следующий квадрат в $\mathbf{Al}(Y)$:

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{R} \vee \mathcal{T}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & (Y, \mathcal{R}) \arrow[d] \\ (Y, \mathcal{T}) \arrow[r] & (Y, Y^{\mathrm{triv}}) \end{tikzcd}$$

где $\mathcal{R} \vee \mathcal{T}$ – минимальное общее усиление топологий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$.

Опишем минимальную базу топологии $\mathcal{R} \vee \mathcal{T}$.

Предложение 18. *Каждому $V \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{R} \vee \mathcal{T})$ отвечает единственная пара (R, T), где $R \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{R})$, $T \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$, такая, что $Y = R \cap T$ и $\mathrm{ns}(R) \cap \mathrm{ns}(T) \neq \emptyset$. Наоборот, каждой паре (R, T), где $R \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{R})$, $T \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$, такой, что $\mathrm{ns}(R) \cap \mathrm{ns}(T) \neq \emptyset$, отвечает единственный элемент $R \cap T \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{R} \vee \mathcal{T})$.*

6.5.1. Рассмотрим морфизм $A \xrightarrow{\phi} B$ пространств Александрова. Рассмотрим всевозможные пополнения ϕ до диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\phi"'] & & B \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd} \tag{19}$$

для которых выполнено условие

$$\alpha \geq \beta \circ \phi. \tag{20}$$

Предложение 19. *Существует диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & \overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi & \\ A \arrow[ur, "i_0"] \arrow[rr, "\phi"'] & & B \arrow[ul, "i_1"'] \end{tikzcd} \tag{21}$$

такая, что $i_0 \geq i_1 \circ \phi$ и для всякой диаграммы вида (19), такой, что выполнено условие (20), найдется единственный морфизм $\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi(\alpha,\beta)} C$, такой, что $u \circ i_0 = \alpha$, $u \circ i_1 = \beta$.

Доказательство. Конструкция $\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi$ совпадает с конструкцией "гомотопического копредела". Именно, пусть на A задан предпорядок $\underset{A}{\leq}$ и на B задан предпорядок $\underset{B}{\leq}$. Тогда мы определяем $\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi$ как дизъюнктное объединение множеств A и B, $\{(a,0)\}_{a \in A} \cup \{(b,1)\}_{b \in B}$, со следующим предпорядком:

$$(x,i) \underset{\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi}{\geq} (y,j) \Leftrightarrow \begin{cases} x \underset{A}{\geq} y & \text{при } \ i = j = 0 \ \text{ или} \\ x \underset{B}{\geq} y & \text{при } \ i = j = 1 \ \text{ или} \\ \phi(x) \underset{B}{\geq} y & \text{при } \ i = 0, \quad j = 1. \end{cases}$$

Вложения $A \xrightarrow{i_0} \overrightarrow{\mathrm{cyl}}(\phi)$ и $B \xrightarrow{i_1} \overrightarrow{\mathrm{cyl}}(\phi)$ определены как $i_0(a) = (a, 0)$ и $i_1(b) = (b, 1)$.

По построению $i_0(a) \underset{\overrightarrow{\mathrm{cyl}}(\phi)}{\geq} i_1 \circ \phi(a)$, и универсальное свойство проверяется тавтологично. $\square$

Рассмотрим для морфизма $A \xrightarrow{\phi} B$ снова все диаграммы вида (19), но такие, что неравенство в (20) обращено, т.е. выполнено условие

$$\alpha \leq \beta \circ \phi. \tag{22}$$

Предложение 20. *Существует диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & \underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi & \\ A \arrow[ur, "i_0"] \arrow[rr, "\phi"'] & & B \arrow[ul, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

такая, что $i_0 \leq i_1 \circ \phi$, *и для всякой диаграммы вида* (19), *такой, что выполнено* (22), *найдется единственный морфизм* $\underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi \xrightarrow{\underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi(\alpha,\beta)} C$, *такой, что* $u \circ i_0 = \alpha$, $u \circ i_1 = \beta$.

Доказательство. Мы можем воспользоваться двойственностью и заметить, что, переходя к двойственным пространствам и отображениям, мы попадаем в условие предложения 19. Так что мы можем положить $\underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi = (\overrightarrow{\mathrm{cyl}}_{\phi^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}$. Там самым, $\underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi$ – это дизъюнктное объединение множеств A и B, $\{(a,0)\}_{a \in A} \cup \{(b,1)\}_{b \in B}$, со следующим предпорядком:

$$(x, i) \underset{\underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi}{\leq} (y, j) \Leftrightarrow \begin{cases} x \underset{A}{\leq} y & \text{при } \; i = j = 0 \; \text{ или} \\ x \underset{B}{\leq} y & \text{при } \; i = j = 1 \; \text{ или} \\ \phi(x) \underset{B}{\leq} y & \text{при } \; i = 0, \quad j = 1. \end{cases}$$

Вложения $A \xrightarrow{i_0} \underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi$ и $B \xrightarrow{i_1} \underrightarrow{\mathrm{cyl}}_\phi$ определены как $i_0(a) = (a, 0)$ и $i_1(b) = (b, 0)$. $\square$

6.6. Кусочно-линейные топологии Александрова. Пусть теперь Y – замкнутый компактный PL-полиэдр.

OPL-топологией Александрова на полиэдре Y мы назовем топологию Александрова $\mathcal{T}$ на Y, такую, что замкнутые в $\mathcal{T}$ множества являются замкнутыми PL-подполиэдрами Y.

CPL-топологией Александрова на полиэдре Y мы назовем топологию Александрова $\mathcal{T}$ на Y, такую, что открытые в $\mathcal{T}$ множества являются замкнутыми подполиэдрами Y.

Двойственность $\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{T}^c$ переводит OPL-топологию в CPL-топологию и наоборот, но в силу асимметрии замкнутых и открытых PL-подполиэдров Y двойственности свойств OPL и CPL пространств Александрова нет.

6.6.1. PL-топологии Александрова, связанные с триангуляциями. Пусть K – конечный симплициальный комплекс. Тогда покрытие $|K|$ замкнутыми симплексами K есть минимальная база CPL-топологии Александрова $\mathcal{A}^c(K)$ (см. п. 6.2). Двойственная OPL-топология $\mathcal{A}(K)$ имеет в качестве минимальной базы множество всех открытых звезд симплексов K.

Отметим, что следующий факт верен в PL-категории и не верен в топологической.

Предложение 21. *Любое конечное покрытие $\mathcal{U}$ компактного полиэдра Y замкнутыми подполиэдрами можно триангулировать, т.е. всегда есть такая триангуляция K полиэдра Y, что K измельчает $\mathcal{U}$ как замкнутое покрытие.*

Доказательство. Каждый элемент $U \in \mathcal{U}$ можно триангулировать, и у всех возникших триангулированных подполиэдров Y есть общая триангуляция. □

Отсюда немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 22.

1. *Для всякой CPL-топологии Александрова $\mathcal{T}$ на компактном полиэдре Y найдется линейная триангуляция K полиэдра Y, такая, что $\mathcal{A}^c(K) \trianglelefteq \mathcal{T}$.*
2. *Для всякой OPL-топологии Александрова $\mathcal{R}$ на компактном полиэдре Y найдется линейная триангуляция K полиэдра Y, такая, что $\mathcal{A}(K) \trianglelefteq \mathcal{R}$.*

Доказательство. 1. Из минимальности, компактности и перехода к двойственной OPL-топологии следует, что минимальная база $\mathcal{T}$ конечна. Выберем по предложению 21 триангуляцию $K_{\mathcal{T}}$ минимальной базы $\mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{A}^c(K_{\mathcal{T}}) \trianglelefteq \mathcal{T}$.

2. Перейдем к двойственной CPL-топологии $\mathcal{R}^c$ и построим $K_{\mathcal{R}^c}$. Тогда $\mathcal{A}(K_{\mathcal{R}^c}) \trianglelefteq \mathcal{R}$. $\square$

В §6.4 мы ввели понятие плотной топологии. Не всякая топология Александрова плотна, но для всякого симплициального комплекса K топологии $\mathcal{A}K$ и $\mathcal{A}^cK$ очевидным образом плотны, поэтому предложение 22 имеет такое следствие.

Предложение 23. *Всякая* OPL[CPL]*-топология Александрова на компактном полиэдре имеет плотное* OPL[CPL] *усиление.*

6.7. Некоторые свойства CPL**-топологий Александрова.** Тут нам необходимо отметить, что морфизмы CPL-топологических пространств Александрова в T^0-пространства Александрова можно рассматривать как обобщение понятия раскраски полиэдра нервом посета (см. §4.2).

6.7.1. Пусть у нас есть полиэдр Y, посет P и раскраска f полиэдра Y нервом $\mathcal{N}P$ посета P. Это значит, что фиксирована локально упорядоченная триангуляция полиэдра Y, т.е. (не умаляя общности) фиксирован локально упорядоченный симплициальный комплекс K, такой, что $|K| = Y$, и морфизм инъективных симплициальных множеств (см. §4.1) $\mathbf{i}K \xrightarrow{f} \mathbf{d}\mathcal{N}P$. Рассмотрим CPL-топологию Александрова $\mathcal{A}(K)$. С раскраской f связан естественный гомоморфизм Max$f$ пространства $(Y, \mathcal{A}^c(K))$ в посет P. В терминах предпорядков Max$f$ определен коммутативным треугольником

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{A}^c(K)) \arrow[rr, "\mathrm{Max}f"] \arrow[dr, "o"'] & & P \\
& \mathfrak{B}(Y, \mathcal{A}(K)) \arrow[ur, "\max f"'] &
\end{tikzcd} \tag{23}$$

где $K = \mathcal{B}(Y, \mathcal{A}^c(K)) \overset{\max f}{\longrightarrow} P$ – морфизм посетов, относящий симплексу $\delta \in K$ значение f в его максимальной (в смысле локального порядка на K) вершине.

6.7.2. Пусть теперь у нас есть произвольная CPL-топология Александрова $\mathcal{T}$ на Y. Пусть P – посет и фиксирован морфизм $(Y,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} P$. Триангуляцией ξ мы назовем раскраску $\mathbf{i}K \xrightarrow{f} \mathbf{d}\mathcal{N}P$ полиэдра $Y = |K|$ нервом посета P, такую, что топология $\mathcal{A}^c(K)$ сильнее $\mathcal{T}$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \\ (Y,\mathcal{A}^c(K)) \arrow[ur, "\mathrm{Max}f"] \arrow[r] & (Y,\mathcal{T}) \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd} \tag{24}$$

коммутативна. Нижняя стрелка в диаграмме – морфизм ослабления топологии.

Предложение 24. *Пусть есть пара компактных полиэдров (Y,Z), CPL-топология Александрова $\mathcal{T}$ на Y, индуцированная топология $\mathcal{T}\lfloor_Z$ на Z, посет P, морфизм $(X,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} P$ и его ограничение $\xi_Z = \xi\lfloor_{(Z,\mathcal{T}_Z)}$. Пусть f_Z – некоторая триангуляция ξ_Z. Тогда найдется триангуляция f морфизма ξ, продолжающая f_Z.*

Доказательство. Это стандартная PL-теорема о продолжении триангуляции замкнутого подполиэдра на замкнутый полиэдр.$\square$

6.7.3. Нам будет полезно выделить отдельно чуть более сильное чем в предложении 24 утверждение в случае $Z = \emptyset$. Рассмотрим конечный посет R и геометрическую реализацию $|\mathrm{Ord}(R)|$ его порядкового симплициального комплекса. На $|\mathrm{Ord}(R)|$ есть CPL-топология $\mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(R))$, вершины симплексов $\mathrm{Ord}(R)$ канонически линейно упорядочены и занумерованы элементами R. Тем самым, с одной стороны, возникает тавтологическая раскраска $\mathrm{Ord}(R) \overset{f(R)}{\to} \mathbf{d}\mathcal{N}R$, и, с другой стороны, возникает канонический морфизм $(|\mathrm{Ord}(P)|, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(R))) \overset{\varkappa(R)}{\to} R$, относящий точке $x \in |\mathrm{Ord}(P)|$ максимальную вершину минимального симплекса, содержащего x. Ясно, что $\mathrm{Max}f(R) = \varkappa(R)$ и в данном случае раскраска $f(R)$ восстанавливается по $\varkappa(P)$ единственным образом, т.е. если $\mathrm{Max}g = \varkappa(P)$ для некоторой другой $\mathcal{N}R$-раскраски $|\mathrm{Ord}R|$, то $g = f(R)$.

Предложение 25. *Пусть есть CPL-топология Александрова $\mathcal{T}$ на полиэдре Y и морфизм $(Y,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} P$, где P – некоторый посет. Тогда* *найдется конечный посет O, такой, что $\mathrm{Ord}(O)$ линейно триангулирует Y, $|\mathrm{Ord}(O)| = Y$, топология $\mathcal{T}$ слабее $\mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O))$ и диаграмма сплошных стрелок*

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[rr, dotted] & & P \\
(Y, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O))) \arrow[u, "\varkappa(O)"] \arrow[rr] & & (Y, \mathcal{T}) \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

однозначно пополняется пунктирной. Здесь нижняя стрелка – морфизм ослабления топологии.

Доказательство. Достаточно найти общую триангуляцию K всех элементов $\mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$. Тогда O – посет флагов этой триангуляции, и его порядковый комплекс есть первое барицентрическое подразбиение K. $\square$

6.7.4. Нам нужно зафиксировать некий стандартный факт. Пусть O – конечный посет, P – некоторый посет. Пусть фиксировано два морфизма $O \overset{f_0, f_1}{\to} P$. Пусть $f_1 \geq f_0$. Тогда, как известно, есть каноническая порядковая гомотопия между f_0 и f_1 – морфизм посетов $O \times \mathbf{1} \overset{F}{\to} P$, где $\mathbf{1} = (0 < 1)$ – полный порядок на двух элементах. Морфизм F определяется так: $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(y, 1) = f_1(y)$.

Уточним свойства этой гомотопии на языке соответствующих морфизмов CPL-пространств Александрова.

Положим

$$(|\mathrm{Ord}O|, \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O) \overset{\xi_0 = f_0 \circ \varkappa(O), \xi_1 = f_1 \circ \varkappa(O)}{\longrightarrow} P$$

и

$$(|\mathrm{Ord}(O \times 1)|, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O \times 1)) \overset{\Xi = F \circ \varkappa((O \times 1))}{\longrightarrow} P.$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & P & \\
(|\mathrm{Ord}O|, \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O) \arrow[ur, "\xi_0"] \arrow[r, "h_0"] & (|\mathrm{Ord}(O \times 1)|, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O \times 1)) \arrow[u, "\Xi"] & (|\mathrm{Ord}O|, \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O) \arrow[ul, "\xi_1"'] \arrow[l, "h_1"']
\end{tikzcd} \qquad (25)$$

где h_0, h_1 – естественные вложения в 0,1-края, являющиеся также вложениями и в топологии Александрова.

Существует гомеоморфизм $|\mathrm{Ord}O \times \mathbf{1}| \xrightarrow{g} |\mathrm{Ord}O| \times ([0,1] = |\mathbf{1}|)$. Гомеоморфизм g^{-1} посылает произведение симплексов $|s| \times [0,1]$ в $|s \times 1| \subseteq |\mathrm{Ord}O \times \mathbf{1}|$ с помощью стандартной геометрической триангуляции произведения упорядоченных симплексов. Есть топология Александрова $\mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1}$ на $|\mathrm{Ord}O| \times [0,1] = |\mathbf{1}|$. Эта CPL-топология (см. [5]) обладает минимальной базой, образованной покрытием, составленным из произведений элементов минимальной базы сомножителей. То есть

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1}) =\\ &\quad= \{\delta \times \{0\}\}_{\delta \in \mathrm{Ord}O} \cup \{\delta \times [0,1]\}_{\delta \in \mathrm{Ord}O} \cup \{\delta \times \{1\}\}_{\delta \in \mathrm{Ord}O}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тем самым, PL-гомеоморфизм g индуцирует морфизм ослабления CPL-топологий Александрова

$$\begin{aligned}&(|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}(O \times \mathbf{1})) \xrightarrow{\widetilde{g}}\\ &\qquad \xrightarrow{\widetilde{g}} (|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1}). \end{aligned} \tag{27}$$

Коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} (|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}(O \times \mathbf{1})) \arrow[rr, "\tilde{g}"] & & (|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1})) \\ & (|\mathrm{Ord}O|, \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O) \arrow[ul, "h_i"] \arrow[ur, "h_i"'] & \end{tikzcd} \tag{28}$$

при $i = 0, 1$.

Определим морфизм

$$\Psi' : \mathcal{B}(|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \quad \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1}) \to P$$

правилом

$$\Psi'(\delta \times [0,1]) = \Psi'(\delta \times \{1\}) = \max f_1(\delta),$$
$$\Psi'(\delta \times \{0\}) = \max f_0(\delta).$$

Это корректно определенный морфизм, и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P & \\ (|\mathrm{Ord}O| \times [0,1], \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}O \times \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}\mathbf{1})) \arrow[ur, "\Psi"] & & (\mathrm{Ord}(O \times 1), \mathcal{A}^c\mathrm{Ord}(O \times 1)) \arrow[ul, "\Xi"'] \arrow[ll, "\tilde{g}"] \end{tikzcd} \tag{29}$$

6.8. Аппроксимация OPL **-топологии** CPL **-топологией.**

6.8.1. Пусть на компактном полиэдре Y есть OPL-топология Александрова $\mathcal{T}$ Мы говорим, что CPL-топология $\mathcal{C}$ строго аппроксимирует T, если выполнено следующее условие: существует изоморфизм $\mathcal{B}(Y,\mathcal{C}) \xrightarrow{\xi} \mathcal{B}(Y,\mathcal{T})$, такой, что $C \subseteq \xi(C)$ для всякого $C \in \mathcal{B}(Y,\mathcal{C})$.

Предложение 26. *Для всякой* OPL*-топологии Александрова на компактном полиэдре найдется строго аппроксимирующая ее* CPL*-топология Александрова.*

Доказательство. Это следует из теории регулярных окрестностей. В достаточно мелкой общей триангуляции замкнутых дополнений к элементам минимальной базы OPL-топологии $\mathcal{T}$ мы выбираем малые открытые регулярные окрестности к этим дополнениям. Снова переходя к дополнениям, мы получаем искомую аппроксимирующую CPL-топологию. □

7. Обобщенные призматические гомеоморфизмы

7.0.1. В этом параграфе мы вводим понятие призматичности гомеоморфизма $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ относительно предпучка Александрова $(B,\mathcal{T}) \to \mathbf{Al}(X)$. В частности, это понятие обобщает понятие призматичности G относительно $\mathbf{R}(X)$-раскраски триангуляции B. Мы изучаем, как можно деформировать гомотопией предпучок Александрова в классе предпучков, относительно которых G призматичен.

7.0.2. Пусть $(B,\mathcal{T})$ – пространство Александрова, $A \xrightarrow{f} B$ – некоторое отображение множеств. Мы обозначим через $\mathcal{T}\lfloor_f$ слабейшую топологию на A, в которой f непрерывно. Топология $\mathcal{T}\lfloor_f$ – снова топология Александрова.

Пусть $(B,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} (D,\mathcal{U})$ – морфизм $\mathbf{Al}$, $A \xrightarrow{f} B$ – некоторое отображение множеств. Мы обозначим через $\xi\lfloor_f$ морфизм $(A,\mathcal{T}\lfloor_f) \to (D,\mathcal{U})$, такой, что $\xi\lfloor_f = \xi \circ f$.

7.0.3. Предпучки Александрова и обобщенные призматические гомеоморфизмы. Пусть есть тривиальное расслоение $X \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ и послойный гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}_B(X)$. Пусть фиксирована некоторая топология Александрова $\mathcal{T}$ на B и морфизм

$$(B,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{Al}(X). \tag{30}$$

Морфизм вида (30) *мы называем* предпучком Александрова *на* B. *Мы говорим, что* послойный гомеоморфизм G призматичен относительно ξ, *если выполнено следующее условие: для всякого элемента минимальной базы* $U \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{T})$, *всякой пары точек* $b_1, b_2 \in U$, *всякого элемента минимальной базы* $V \in \mathfrak{B}(X, \xi'(U))$ *верно равенство* $G^{-1}\lfloor_{b_1}(V) = G^{-1}\lfloor_{b_2}(V)$ (определение ξ' см. в разложении (17)).

В общем случае мы не предполагаем связи между топологиями полиэдров B, X и возникающими в определении призматичности гомеоморфизма топологиями Александрова на множествах точек этих полиэдров. Отметим, что если $\mathcal{T}$ – дискретная топология B^δ на B, то всякий гомеоморфизм G призматичен относительно любого ξ. Аналогично, любой гомеоморфизм G призматичен относительно морфизма ξ, посылающего все $(B, \mathcal{T})$ в тривиальную топологию X^{triv}.

Отметим также следующий очевидный факт.

Предложение 27. *В определении* ξ*-призматичности* G *можно заменить любое* $\mathfrak{B}$ *на* Σ.

Кусочно-линейные гомеоморфизмы X действуют на топологиях Александрова на X. Если гомеоморфизм G призматичен относительно ξ, то по определению соответствие $b \mapsto G^{-1}\xi(b)$ доставляет новый морфизм $(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{G^{-1}\xi} \mathbf{Al}(\mathbf{X})$. Тем самым, если другой гомеоморфизм F призматичен относительно $G^{-1}\xi$, то композиция $F \circ G$ снова ξ-призматична. Возникает группоид, объекты которого – некоторые морфизмы в $\mathbf{Al}(X)$ структур пространств Александрова на B; морфизмом $\phi \to \xi$ мы считаем ξ-призматический гомеоморфизм G, такой, что $G^{-1}\xi = \phi$.

Через $\mathbf{GPrism}_B(X)$ *мы будем обозначать так определенный* группоид обобщенных призматических гомеоморфизмов *тривиального расслоения* $X \times B \xrightarrow{\pi_2} B$.

Пусть $A \xrightarrow{f} B$ – PL-морфизм и $\phi \xrightarrow{G} \xi \in \mathrm{Mor}\mathbf{GPrism}_B(X)$; тогда

$$f^*(G) = (\phi\lfloor_f \xrightarrow{G\lfloor_f} \xi\lfloor_f) \in \mathrm{Mor}\mathbf{GPrism}_A(X).$$

Соответствие $G \mapsto G\lfloor_f$ есть морфизм группоидов

$$\mathbf{GPrism}_B(X) \xrightarrow{f^*} \mathbf{GPrism}_A(X).$$

Таким образом, $\mathbf{GPrism}(X)$ есть контравариантный функтор

$$\mathrm{PL} \xrightarrow{\mathbf{GPrizm}} \mathbf{Groupoids}.$$

Каждому предпучку Александрова $(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{Al}(X)$ отвечают три морфизма

$$(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathfrak{B}\xi} \mathbf{Posets}, \quad \mathfrak{B}(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\widetilde{\xi}} \mathbf{Posets}, \quad \mathfrak{B}(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\widetilde{\xi}'} \mathbf{Al}, \qquad (31)$$

для которых коммутативна следующая тетраэдральная диаграмма функторов:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Al} \arrow[r, "\mathfrak{B}"] & \mathrm{Posets} \\ (B, \mathcal{T}) \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\mathfrak{B}\xi"] \arrow[r, "o"'] & \mathfrak{B}(B, \mathcal{T}) \arrow[u, "\widetilde{\xi}"'] \arrow[ul, "\widetilde{\xi}'"] \end{tikzcd} \qquad (32)$$

По определению призматичности гомеоморфизм $\phi \xrightarrow{G} \xi$ индуцирует некоторый изоморфизм функторов $\widetilde{\phi} \xrightarrow{\widetilde{G}} \widetilde{\xi}$.

7.0.4. Пример. Сразу же укажем, в каком смысле определение обобщенного призматического гомеоморфизма включает в себя определение Q-призматического гомеоморфизма с базой – симплексом из §3.2.2. В §6.2 мы отметили, что, отождествляя шаровой комплекс $\mathtt{Q}$ с пространством Александрова $\mathcal{A}^c(\mathtt{Q})$, мы получаем вложение $\mathbf{R}(X) \to \mathbf{Al}(X)$. Пусть $Q = \mathtt{Q}_0, \dots, \mathtt{Q}_k$ – раскраска $[\Delta^k]$ посетом $\mathbf{R}(X)$ Пусть $(\Delta^k, \mathcal{A}^c([\Delta^k])) \xrightarrow{\operatorname{Max} Q} \mathbf{R}(X)$ – морфизм пространств Александрова, определенный в (23). Сравнивая определения, получаем следующее утверждение.

Предложение 28. *Гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}_k$ призматичен относительно Q в смысле определения* §3.2.2 *тогда и только тогда, когда G призматичен относительно* $\operatorname{Max} Q$ *в смысле определения обобщенной призматичности.*

Тем самым, группоид **GPrizm** содержит симплициальный группоид **Prism**.

Далее прилагательное “обобщенный” мы обычно опускаем.

7.1. Операции над призматическими гомеоморфизмами.

7.1.1. Склейка призматических гомеоморфизмов. Пусть $A \overset{i_0}{\hookrightarrow} B_0$, $A \overset{i_1}{\hookrightarrow} B_1$ – два вложения полиэдров. Пусть $\langle G_0, \alpha \rangle \in \mathbf{GPrizm}_{B_0}(X)$, $\langle G_1, \beta \rangle \in \mathbf{GPrism}_{B_1}(X)$ таковы, что $\langle G_0, \alpha \rangle \lfloor_{i_0} =$

$\langle G_1, \beta\rangle\lfloor_{i_1} \in \mathbf{GPrism}_A(X)$. Рассмотрим кодекартов квадрат в PL

$$\begin{tikzcd} B_0 \sqcup_{i_0,i_1} B_1 & B_0 \arrow[l, dashed, "i'_0"'] \\ B_1 \arrow[u, dashed, "i'_1"] & A \arrow[l, hook', "i_1"] \arrow[u, hook, "i_0"'] \end{tikzcd}$$

Предложение 29. *Тогда определен единственный призматический гомеоморфизм*

$$F = \langle G_0 \sqcup_{i_0,i_1} G_1, \alpha \sqcup_{i_0,i_1} \beta\rangle \in \mathbf{GPrism}_{B_0 \sqcup_{i_0,i_1} B_1}(X),$$

такой, что $F\lfloor_{i'_0} = \langle G_0, \alpha\rangle$, $F\lfloor_{i'_1} = \langle G_1, \beta\rangle$.

Доказательство. Морфизм пространств Александрова $\alpha \sqcup_{i_0,i_1} \beta$ определен однозначно в силу предложения 17. Гомеоморфизм $G_0 \sqcup_{i_0,i_1} G_1$ строится поточечно, и его призматичность относительно $\alpha \sqcup_{i_0,i_1} \beta$ проверяется по определению. □

7.1.2. Манипуляции с разными призматическими структурами данного послойного гомеоморфизма. Гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ может быть призматичен относительно различных морфизмов в $\mathbf{Al}(X)$ различных структур пространства Александрова на B. Здесь мы выделим несколько необходимых утверждений о манипуляциях с разными призматическими структурами на G.

Пусть есть два морфизма $(B, \mathcal{R}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Al}(X)$, $(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Al}(X)$. Мы пишем $\alpha \trianglelefteq \beta$, если $\mathcal{R} \trianglelefteq \mathcal{T}$, и $\alpha \rhd \beta \circ w$, где $(B, \mathcal{R}) \xrightarrow{w} (B, \mathcal{T})$ – морфизм ослабления топологии. Из определения призматичности вытекает следующее предложение.

Предложение 30. *Если гомеоморфизм G призматичен относительно β и $\alpha \trianglelefteq \beta$, то G призматичен относительно α.*

Тем самым, морфизмы, относительно которых данный послойный гомеоморфизм призматичен, образуют посет с минимальным элементом – постоянным морфизмом, отправляющим дискретную топологию на B в тривиальную топологию на X.

Рассмотрим координатные вложения B в “края” полиэдра $B \times [0,1]$: $B \xrightarrow{h_0,h_1} B \times [0,1]$, где $h_i = \mathrm{id} \times d^i$.

Предложение 31. *Пусть на B зафиксированы две топологии $\mathcal{R}, \mathcal{T}$, причем $\mathcal{R} \trianglelefteq \mathcal{T}$. Пусть $(B,\mathcal{R}) \xrightarrow{w} (B,\mathcal{T})$ – морфизм ослабления топологии. Пусть $\mathbf{C}$ – некоторый подпосет $\mathbf{Al}(X)$. Пусть фиксировано два морфизма $(B,\mathcal{R}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{C}$, $(B,\mathcal{T}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{C}$, такие, что $\alpha \triangleright \beta \circ w$. Пусть послойный гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ призматичен относительно β. Тогда*

A. *Гомеоморфизм G призматичен относительно α.*

B. *Найдется топология $\overline{\mathrm{Cyl}}_w$ на $B \times [0,1]$ и морфизм*

$$(B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_w) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)} C,$$

такие, что гомеоморфизм $G \times \mathrm{id} \in \mathrm{PL}_{B\times[0,1]}$ призматичен относительно $\overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)$ и $h_0^*(G \times \mathrm{id}, \overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)) = (G,\alpha)$, $h_1^*(G \times \mathrm{id}, \overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)) = (G,\beta)$.

Доказательство. Пункт A утверждения есть предложение 30, пункт B нуждается в доказательстве.

B1. Предъявим минимальную базу топологии $\overline{\mathrm{Cyl}}_w$ на $B \times [0,1]$. Положим $\mathfrak{B}(B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_w)$ равным

$$\{R \times \{0\} \cup \mathfrak{B}(w)(R) \times (0,1]\}_{R \in \mathfrak{B}(B,\mathcal{R})} \cup \{T \times (0,1]\}_{T \in \mathrm{N}(B,\mathcal{T})}. \tag{33}$$

С помощью теоремы Александрова (§6.1.2) легко убедиться, что это действительно минимальная база. По построению

$$(B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_w)\lfloor_{h_0} = (B,\mathcal{R}),$$
$$(B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_w)\lfloor_{h_1} = (B,\mathcal{T}).$$

B2. Рассмотрим морфизм $\mathfrak{B}(w)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}(B,\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathfrak{B}(w)"] & \mathfrak{B}(B,\mathcal{T}) \\
(B,\mathcal{T}) \arrow[u, "o"] \arrow[r, "w"'] & (B,\mathcal{T}). \arrow[u, "o"']
\end{tikzcd}$$

Есть канонический изоморфизм $\mathfrak{B}(\overline{\mathrm{Cyl}}_w) \approx \overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)}$. Предъявим его.

По построению из предложения 19 $\overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)}$ определено как дизъюнктное объединение множеств $\mathfrak{B}(B,\mathcal{R})$ и $\mathfrak{B}(B,\mathcal{T})$,

$$\{(R,0)\}_{R \in \mathfrak{B}(B,\mathcal{R})} \cup \{(T,1)\}_{T \in \mathfrak{B}(B,\mathcal{T})},$$

со следующим предпорядком:

$$(U,i) \underset{\overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)}}{\geq} (V,j) \Leftrightarrow \begin{cases} U \supseteq V & \text{при} \quad i=j=0, \\ U \supseteq V & \text{при} \quad i=j=1, \\ \mathfrak{B}(w)(U) \supseteq V & \text{при} \quad i=0, \quad j=1. \end{cases}$$

Определяем соответствие $(R,0) \mapsto R \times \{0\} \cup \mathfrak{B}(w)(R) \times (0,1]$ при $R \in \mathfrak{B}(B,\mathcal{R})$, $(T,1) \mapsto T \times (0,1]$ при $T \in \mathfrak{B}(B,\mathcal{T})$ и убеждаемся, что это соответствие доставляет искомый изоморфизм и при этом коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} N(B\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathfrak{B}(h_0)"] & \overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)} & \mathcal{B}(B,\mathcal{T})) \arrow[l, "\mathfrak{B}(h_1)"'] \\ (B,\mathcal{R}) \arrow[u, "o"] \arrow[r, "(h_0)"] & (B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_w) \arrow[u, "o"] & \mathcal{B}(B,\mathcal{T})). \arrow[l, "(h_1)"'] \arrow[u, "o"] \end{tikzcd}$$

И диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)} & \\ \mathfrak{B}(B,\mathcal{R}) \arrow[ur, "\mathfrak{B}(h_0)"] \arrow[rr, "\mathfrak{B}(w)"'] & & \mathfrak{B}(B,\mathcal{T}) \arrow[ul, "\mathfrak{B}(h_1)"'] \end{tikzcd}$$

есть в точности универсальная диаграмма (21).

В3. Далее в силу универсальности стрелок "o" (см. (17)) мы заменяем α и β на единственные морфизмы посетов

$$\mathfrak{B}(B,\mathcal{R}) \xrightarrow{\alpha'} \mathbf{C}, \quad \mathfrak{B}(B,\mathcal{T}) \xrightarrow{\beta'} \mathbf{C},$$

такие, что $\alpha = \alpha' \circ o$, $\beta = \beta' \circ o$, и убеждаемся, что $\alpha' \geq \beta' \circ \mathfrak{B}(w)$. Применяя предложение 19, строим морфизм $\overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)} \xrightarrow{\overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)}(\alpha',\beta')} \mathbf{C}$ и полагаем

$$\overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta) = \overline{\mathrm{cyl}}_{\mathfrak{B}(w)}(\alpha',\beta') \circ o.$$

В4. Надо удостовериться в $\overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)$-призматичности гомеоморфизма $G \times \mathrm{id}$. Однако это сразу следует из вида (33) элементов минимальной базы $\overline{\mathrm{Cyl}}_w$. Далее, предложение 19 и универсальность o-стрелок гарантируют нам, что при таком определении $\overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta))$ верно, что

$$h_0^*(G \times \mathrm{id}, \overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)) = (G,\alpha) \text{ и } h_1^*(G \times \mathrm{id}, \overline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)) = (G,\beta). \quad \square$$

Аналогично доказывается следующее предложение.

Предложение 32. *Пусть на B зафиксировано две топологии $\mathcal{R},\mathcal{T}$, причем $\mathcal{R}\trianglelefteq\mathcal{T}$. Пусть $(B,\mathcal{R})\xrightarrow{w}(B,\mathcal{T})$ – морфизм ослабления топологии. Пусть $\mathbf{C}$ – некоторый подпосет $\mathbf{Al}(X)$. Пусть фиксировано два морфизма $(B,\mathcal{R})\xrightarrow{\alpha}\mathbf{C}$, $(B,\mathcal{T})\xrightarrow{\beta}\mathbf{C}$, такие, что $\alpha\trianglelefteq\beta\circ w$. Пусть послойный гомеоморфизм $G\in\mathrm{PL}_B(X)$ как α-призматичен, так и β-призматичен.*

Тогда найдется топология $\underline{\mathrm{Cyl}}_w$ на $B\times[0,1]$ и морфизм $(B\times[0,1],\underline{\mathrm{Cyl}}_w)\xrightarrow{\underline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)}C$, такой, что гомеоморфизм $G\times\mathrm{id}\in\mathrm{PL}_{B\times[0,1]}$ призматичен относительно $\underline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta)$ и $h_0^*(G\times\mathrm{id},\underline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta))=(G,\alpha)$, $h_1^*(G\times\mathrm{id},\underline{\mathrm{Cyl}}_w(\alpha,\beta))=(G,\beta)$.

Предложение 33. *Пусть на B зафиксировано две топологии $\mathcal{R},\mathcal{T}$. Пусть $\mathfrak{B}(B,\mathcal{R})\xrightarrow{\phi}\mathfrak{B}(B,\mathcal{T})$ – морфизм, такой, что для любого $R\in\mathfrak{B}(B,\mathcal{R})$ имеет место включение $R\subset\phi(R)$. Пусть $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{Al}(X)$ и фиксированы морфизмы $(B,\mathcal{T})\xrightarrow{\beta}\mathbf{C}$ и $(B,\mathcal{R})\xrightarrow{\alpha}\mathbf{C}$, такие, что $\alpha\geq\beta'\circ\phi\circ\circ$. Пусть есть β-призматический гомеоморфизм $G\in\mathrm{PL}_B(X)$. Тогда*

A. *Гомеоморфизм G призматичен относительно α.*

B. *Существует топология Александрова $\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi$ на $B\times[0,1]$ и морфизм*

$$(B\times[0,1],\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi)\xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha,\beta)}\mathbf{C},$$

такие, что гомеоморфизм $G\times\mathrm{id}\in\mathrm{PL}_{B\times[0,1]}$ призматичен относительно $\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha,\beta)$ и

$$\langle G\times\mathrm{id},\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha,\beta)\rangle\lfloor_{h_0}=\langle G,\alpha\rangle,\quad\langle G\times\mathrm{id},\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha,\beta)\rangle\lfloor_{h_1}=\langle G,\beta\rangle.$$

Доказательство. A. Очевидно.

B. 1. Рассмотрим общее усиление $\mathcal{R}\vee\mathcal{T}$ топологий $\mathcal{R},\mathcal{T}$ на B. Пусть

$$(B,\mathcal{R})\xleftarrow{w_0}(B,\mathcal{R}\vee\mathcal{T})\xrightarrow{w_1}(B,\mathcal{T})$$

– морфизмы ослабления топологий.

В. 2.1. Рассмотрим $(B, \mathcal{R} \vee \mathcal{T}) \overset{\alpha \circ w_0}{\longrightarrow} \mathbf{C}$ и $(B, \mathcal{R} \vee \mathcal{T}) \overset{\gamma = \beta \circ w_1}{\longrightarrow} \mathbf{C}$. Гомеоморфизм G является как α-призматическим, так и γ-призматическим. Докажем, что набор $\langle w_0, \gamma, \alpha, G\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 32, а именно, что $\gamma \leq \alpha \circ w_0$.

В. 2.2. По предложению 18 элемент $S \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{R} \vee \mathcal{T})$ нумеруется единственной парой $R_S \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{R})$, $T_S \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{T})$, такой, что $s(R_S) \cap s(T_S) \neq \emptyset$, $R_S \cap T_S = S$, $w_0(S) = R_S$, $w_1(S) = T_S$. Отметим, что в этом случае $\phi(R_S) \supseteq T_S$. Действительно, $\phi(R_S) \supseteq R_S$ и $s(T_S) \cap R_s \neq \emptyset$, следовательно, $s(T_S) \cap \phi(R_S) \neq \emptyset$, а из двойственности между топологиями Александрова и предпорядками следует, что это возможно только при $\phi(R_S) \supseteq T_S$.

В. 2.3. Итак, $\gamma(S) = \beta(T_S) \leq \beta(\phi(R_S)) \leq \alpha(R_S) = \alpha \circ w_0(S)$. Таким образом, набор $\langle w_0, \gamma, \alpha, G\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 32.

В. 3. Набор $\langle w_1, \gamma, \beta, G\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 31 по построению.

В. 4. Применяем предложение 32 и строим гомеоморфизм

$$(B \times [0,1], \underline{\mathrm{Cyl}}_{w_0}) \overset{\underline{\mathrm{Cyl}}_{w_0}(\gamma,\alpha)}{\longrightarrow} \mathbf{C}.$$

Применяем предложение 31 и строим гомеоморфизм

$$(B \times [0,1], \overline{\mathrm{Cyl}}_{w_1}) \overset{\overline{\mathrm{Cyl}}_{w_0}(\gamma,\beta)}{\longrightarrow} \mathbf{C}.$$

Рассмотрим диаграмму вложений в PL :

$$B \times [0,1] \overset{h_0}{\leftarrow} B \overset{h_0}{\rightarrow} B \times [0,1].$$

Мы получаем условие на призматические гомеоморфизмы:

$$\langle G \times \mathrm{id}, \underline{\mathrm{Cyl}}_{w_0}(\gamma, \alpha)\rangle\lfloor_{h_0} = \langle G, \gamma\rangle = \langle G \times \mathrm{id}, \overline{\mathrm{Cyl}}_{w_1}(\gamma, \beta)\rangle\lfloor_{h_0}.$$

По предложению 17 определены склейки. Мы полагаем

$$\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi = \underline{\mathrm{Cyl}}_{w_0} \sqcup_{h_0,h_0} \overline{\mathrm{Cyl}}_{w_1},$$

$$\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha, \beta) = \underline{\mathrm{Cyl}}_{w_0}(\gamma, \alpha) \sqcup_{h_0,h_0} \overline{\mathrm{Cyl}}_{w_1}(\gamma, \beta).$$

Склеенный гомеоморфизм $G \times [0,1] \sqcup_{h_0,h_0} G \times [0,1]$ автоматически оказывается $\widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\alpha, \beta)$-призматическим. $\square$

7.2. Триангуляция послойного гомеоморфизма. Пусть $G \in \mathrm{PL}_B(X)$, $\mathbf{C} \subset \mathbf{Al}(X)$. Пусть f – некоторая $\mathbf{C}$-раскраска B. Будем говорить, что f – $\mathbf{C}$-*триангуляция* G, если G призматичен относительно $\operatorname{Max} f$ (см. (23)). В частности, в соответствии с замечанием §7.0.4 для $\mathtt{Q}$-призматического гомеоморфизма $G \in \mathrm{PL}_k(X)$, $\mathtt{Q}$ есть частный случай $\mathbf{R}(X)$-триангуляции гомеоморфизма G. Очевидным образом, если $|K| = B$ и $K \to \mathcal{QN}\mathbf{R}(X)$ – некоторая $\mathbf{R}(X)$-триангуляция G, то для всякого симплекса $s \in K$ гомеоморфизм $G\lfloor_s$ призматичен относительно $\mathcal{Q}\lfloor_s$ в смысле определения §3.2.2.

Предложение 34. *Пусть есть пара замкнутых полиэдров (Y, Z), гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}_Y(X)$, CPL-топология Александрова $\mathcal{T}$ на Y, индуцированная топология $\mathcal{T}\lfloor_Z$ на Z, множество топологий Александрова $\mathbf{C} \subset \mathbf{Al}(X)$ и морфизм $(\mathrm{X}, \mathcal{T}) \to \xi\mathbf{C}$, такой, что G призматичен относительно ξ. Пусть f_Z – некоторая триангуляция $\xi\lfloor_Z$, являющаяся триангуляцией $G\lfloor_Z$. Тогда найдется триангуляция f морфизма ξ, продолжающая f_Z и триангулирующая G.*

Доказательство. Это прямое следствие предложения 24 и предложения 31 A.

8. Шаровые комплексы, согласованные с дизъюнктными конфигурациями шаров

8.1. Введем общие определения. Подмножеству A множества S сопоставим топологию Александрова $\mathcal{D}_A$ на S с базой $\{A\} \cup \{s\}_{s \in S \setminus A}$. Очевидным образом, если $A, B \subseteq S$, $A \subseteq B$, то $\mathcal{D}_A \trianglelefteq \mathcal{D}_B$. Тем самым,

$$2^S \hookrightarrow \mathcal{D}\mathbf{Al}(S) \tag{34}$$

– вложение посетов.

Обозначим через $\mathbf{D}(X)$ посет замкнутых шаров полной размерности на многообразии X. При этом мы полагаем

$$D_0 \underset{\mathbf{D}(X)}{<} D_1 \Leftrightarrow D_0 \subset \operatorname{int} D_1.$$

Обозначим через $\mathbf{D}^\infty(X)$ посет конечных наборов дизъюнктных замкнутых шаров полной размерности на многообразии X. При этом мы полагаем

$$A_0 \underset{\mathbf{D}^\infty(X)}{<} A_1 \Leftrightarrow \cup_{D \in A_0} D \subset \cup_{D \in A_1} \operatorname{int} D.$$

Пусть K – симплициальное многообразие. Симплициальная структура порождает локально коническую структуру на $|K|$ (см. [26]). Назовем замкнутый шар $B \subset |K|$ согласованным с K, если он

1) является коническим,

2) обладает следующим свойством: если $B \cap s \neq \emptyset$, где $s \in K$, то $\operatorname{int} B \cap s \neq \emptyset$.

На рис. 11 (a) изображены конические относительно триангуляции шары, не удовлетворяющие условию 2), а на рис. 11 (b) – удовлетворяющие условию 2).

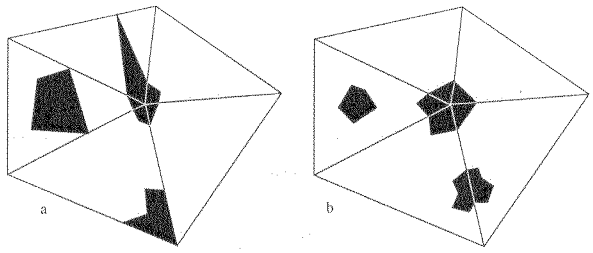


Рис. 11.

Через $\mathbf{D}_c^\infty(K)$ мы обозначим подпосет посета конфигураций дизъюнктных замкнутых шаров $\mathbf{D}^\infty(|K|)$, образованный согласованными с K шарами.

С помощью функтора $\mathcal{D}$ мы отождествляем $\mathbf{D}(X)$, $\mathbf{D}^\infty(X)$, $\mathbf{D}_c^\infty(K)$ с подпосетами $\mathbf{Al}(X)$.

8.2. Нам потребуется следующее предложение.

Предложение 35. *Пусть есть конечный посет P и морфизм посетов $P \xrightarrow{\phi} \mathbf{D}_c^\infty(K)$. Тогда найдется морфизм $P \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}_c^\infty(K)$, такой, что для любого $p \in P$ верно, что $\xi(p) > \phi(p)$, т.е. для любого p всякий шар из $\phi(p)$ лежит во внутренности некоторого шара из $\xi(p)$.*

Доказательство. Пользуясь конечностью P, мы можем индукцией по убыванию (или возрастанию) ранга заменять конфигурации конических шаров на конфигурации их малых конических окрестностей. $\square$

8.3. Пусть есть $\mathtt{Q} \in \mathbf{R}(X)$, пусть есть триангуляция $K \trianglelefteq \mathtt{Q}$ и $\mathtt{D} \in \mathbf{D}_c^\infty(K)$. Мы говорим, что конфигурация шаров $\mathtt{D}$ **вписана в** $\mathtt{Q}$, если внутренность каждого шара из $\mathtt{D}$ находится во внутренности некоторой старшей клетки $\mathtt{Q}$. Мы говорим, что подразбиение $\mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \mathtt{Q}$ **не задевает** $\mathtt{D}$, если для всякого шара $D \in \mathtt{D}$ верно, что $\mathtt{Q}_0|_{\operatorname{int} D} = \mathtt{Q}|_{\operatorname{int} D}$.

Предложение 36. *Пусть $\mathtt{Q} \in \mathbf{R}(X)$, $K \trianglelefteq \operatorname{sd}_1\mathtt{Q}$ и B – некоторый конический относительно K, согласованный с K замкнутый n-мерный шар с центром в b. Мы можем построить структуру шарового комплекса $\mathtt{C}(B)$ на B, такую что, клетки комплекса разбиты на два дизъюнктных подмножества $I\mathtt{C}(B)$ и $S\mathtt{C}(B)$ так, что*

клетки $S\mathtt{C}(B)$ образуют шаровой комплекс на сфере ∂B,

клетки $I\mathtt{C}(B)$ – это клетки, задевающие $\operatorname{int} B$;

при этом для всякой клетки $D \in I\mathtt{C}(B)$ найдется клетка $D' \in \mathtt{Q}$, такая, что $D \cap \operatorname{int} B = D' \cap \operatorname{int} B$.

Доказательство. 1. В силу согласованности для всякого шара $Q \in \mathtt{Q}$ верно следующее: $Q \cap B$ пусто, если $b \notin Q$.

2. Рассмотрим $\widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b$ – множество всех шаров $\mathtt{Q}$, содержащих точку b. В $\widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b$ есть единственный шар A, такой, что $b \in \operatorname{relint} A$. В силу теоремы об инвариантности звезды для любого $D \in \widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b$ пересечение $D \cap B$ – шар, являющийся конусом над $S(D) = \partial B \cap D$. При этом $S(D)$ – шар при $D \neq A$ и $S(D)$ – сфера при $D = A$. Для $Q \in \widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b$ положим $I(Q) = B \cap Q$, $S(Q) = \partial B \cap Q$.

3. Положим $I\mathtt{W}(B) = \{I(Q)\}_{Q \in \widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b}$. Положим

$$S\mathtt{W}(B) = \{S(Q)\}_{Q \in \widetilde{\operatorname{star}}_{\mathtt{Q}} b}.$$

Рассмотрим набор замкнутых подмножеств $\mathtt{W}(B) = I\mathtt{W}(B) \cup S\mathtt{W}(B)$. Этот набор обладает такими свойствами: $\mathtt{W}(B)$ – покрытие B замкнутыми множествами, такое, что внутренности элементов образуют разбиение; граница всякого элемента $\mathtt{W}(B)$ составлена из элементов покрытия, и при этом все элементы – шары, за исключением $S(A)$. Если мы удалим $S(A)$ из $\mathtt{W}(B)$ и заменим на множество $\mathtt{T}S(A)$ клеток любой триангуляции $S(A)$, то мы получим на B шаровой комплекс $\mathtt{C}(B)$ с разложением $I\mathtt{C}(B) = I\mathtt{W}(B)$, $S\mathtt{C}(B) = (S\mathtt{W}(B) \setminus S(A)) \cup \mathtt{T}S(A)$, по построению удовлетворяющим утверждениям предложения. $\square$

Лемма 6 (О функториальном вписывании дизъюнктных конфигураций шаров в шаровые комплексы). *Пусть* Λ *– конечный посет. Рассмотрим некоторую диаграмму* $\Lambda \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbf{R}(X)$. *Сопоставим этой диаграмме некоторую триангуляцию общего подразбиения* $K \trianglelefteq \mathcal{Q}_\lambda$ *для всякого* $\lambda \in \Lambda$. *Пусть фиксирована произвольная диаграмма* $\Lambda \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}^\infty_c(K)$. *Утверждается, что существует пара диаграмм* $\Lambda \xrightarrow{\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1} \mathbf{R}(X)$ *и пара естественных преобразований* $\mathcal{Q} \underset{\triangleright}{\overset{\alpha}{\longleftarrow}} \mathcal{Q}_0 \underset{\trianglelefteq}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} \mathcal{Q}_1$, *таких, что при всех* $\lambda \in \Lambda$ *подразбиения* α_λ *не задевают шаров* $\xi(\lambda)$ *и конфигурация шаров* $\xi(\lambda)$ *вписана в* $\mathcal{Q}_1(\lambda)$.

Доказательство. 1. Отметим следующий факт: если есть шаровой комплекс $\mathtt{L}$ на многообразии X^n и клеточно вложенный в $\mathtt{L}$ шаровой n-мерный шар $\mathtt{B} \subseteq \mathtt{L}$, то, выбросив из $\mathtt{L}$ клетки, задевающие внутренность шара $|B|$, и добавив сам шар $|B|$, мы получаем снова шаровой комплекс на X. Обозначим его через $\mathtt{L}/\mathtt{B}$. По определению имеется каноническое подразбиение $\mathtt{L} \trianglelefteq \mathtt{L}/\mathtt{B}$. Аналогично, если в $\mathtt{L}$ вложен дизъюнктный набор шаров $\{\mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_l\}$, то корректно определен шаровой комплекс

$$\mathtt{L} \trianglelefteq \mathtt{L}/\{\mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_l\} = (\ldots((\mathtt{L}/\mathtt{B}_1)/\mathtt{B}_2)/\mathtt{B}_3 \ldots)/\mathtt{B}_l.$$

2. Пусть посет Λ имеет ранг r. Пусть

$$\Lambda^r \hookrightarrow \Lambda^{r-1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Lambda^0 = \Lambda$$

– фильтрация Λ подпосетами, где подпосет Λ_k образован всеми элементами Λ, имеющими ранг не меньше k. Обозначим через $\mathcal{Q}^r$ ограничение $\mathcal{Q}|_{\Lambda^r}$.

Мы строим естественные преобразования $\mathcal{Q} \underset{\triangleright}{\overset{\alpha}{\longleftarrow}} \mathcal{Q}_0 \underset{\trianglelefteq}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} \mathcal{Q}_1$ индуктивно по обратной ранговой фильтрации

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}^r & \mathcal{Q}^r_0 \arrow[l, "\alpha^r"', "\rhd"] \arrow[r, "\beta^r", "\unlhd"'] & \mathcal{Q}^r_1 \\
\mathcal{Q}^{r-1} \arrow[u, hook] & \mathcal{Q}^{r-1}_0 \arrow[u, hook] \arrow[l, "\alpha^{r-1}"', "\rhd"] \arrow[r, "\beta^{r-1}", "\unlhd"'] & \mathcal{Q}^{r-1}_1 \arrow[u, hook] \\
\vdots \arrow[u, hook] & \vdots \arrow[u, hook] & \vdots \arrow[u, hook] \\
\mathcal{Q}^0 \arrow[u, hook] & \mathcal{Q}^0_0 \arrow[u, hook] \arrow[l, "\alpha^0"', "\rhd"] \arrow[r, "\beta^0", "\unlhd"'] & \mathcal{Q}^0_1 \arrow[u, hook] \\
\mathcal{Q} \arrow[u, equal] & \mathcal{Q}_0 \arrow[u, equal] \arrow[l, "\alpha"', "\rhd"] \arrow[r, "\beta", "\unlhd"'] & \mathcal{Q}_1 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

3. Пусть $\lambda \in \Lambda^r$. Построим для $\mathcal{Q}(\lambda)$ диаграмму

$$\mathcal{Q}(\lambda) \rhd \mathcal{Q}_0(\lambda) \unlhd \mathcal{Q}_1(\lambda),$$

которая доставит $\alpha^r(\lambda), \beta^r(\lambda)$-компоненты необходимых преобразований. Выберем некоторые линейные триангуляции сферических шаровых комплексов $\partial\mathtt{C}_{\mathcal{Q}(\lambda)}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$, где $\mathtt{C}_{\mathcal{Q}(\lambda)}(D)$ построены по предложению 36. Тем самым мы получаем некоторые затрагивающие только граничную сферу шаровые подразбиения $\mathtt{T}(D) \unlhd \mathtt{C}_{\mathcal{Q}(\lambda)}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$. Продолжим геометрические симплициальные комплексы $\partial\mathtt{T}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$, до триангуляции $X \setminus \cup_{D\in\xi(\lambda)} \operatorname{int} D$, подразбивающей все подполиэдры $B \setminus \cup_{D\in\xi(\lambda)} \operatorname{int} D$, $B \in \mathcal{Q}(\lambda)$. Мы получили не задевающее шаров $\xi(\lambda)$ подразбиение $\mathcal{Q} \rhd \mathcal{Q}_0(\lambda)$, при этом T_D, $D \in \xi(\lambda)$, – вложенные в $\mathcal{Q}_0(\lambda)$ шары. По п. 1 доказательства мы полагаем

$$\mathcal{Q}_0(\lambda) \unlhd \mathcal{Q}_0(\lambda)/\{T_D\}_{D\in\xi(\lambda)} = \mathcal{Q}_1(\lambda).$$

По построению шары $\xi(\lambda)$ вписаны в $\mathcal{Q}_1(\lambda)$. Построив

$$\mathcal{Q}(\lambda) \rhd \mathcal{Q}_0(\lambda) \unlhd \mathcal{Q}_1(\lambda)$$

при всех $\lambda \in \Lambda^r$, мы получаем $\mathcal{Q}^r \underset{\rhd}{\overset{\alpha^r}{\longleftarrow}} \mathcal{Q}^r_0 \underset{\unlhd}{\overset{\beta^r}{\longrightarrow}} \mathcal{Q}^r_1$.

4. Шаг индукции. Допустим, что построено $\mathcal{Q}^{k+1} \xleftarrow[\triangleright]{\alpha^{k+1}} \mathcal{Q}_0^{k+1} \xrightarrow[\trianglelefteq]{\beta^{k+1}} \mathcal{Q}_1^{k+1}$. Продолжим построение на Λ^k. Пусть $\lambda \in \Lambda$, $\operatorname{rank}\lambda = k$. Рассмотрим верхний идеал $\lambda^{\leq} = \{\mu \in \Lambda | \lambda \leq \mu\}$.

Выберем некоторые линейные триангуляции сферических шаровых комплексов $\partial \mathtt{C}_{\mathcal{Q}(\lambda)}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$. Тем самым мы получаем некоторые затрагивающие только граничную сферу шаровые подразбиения $\mathtt{T}(D) \trianglelefteq \mathtt{C}_{\mathcal{Q}(\lambda)}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$. Продолжим геометрические симплициальные комплексы $\partial\mathtt{T}(D)$, $D \in \xi(\lambda)$, до триангуляции $X \setminus \cup_{D \in \xi(\lambda)} \operatorname{int} D$, подразбивающей все подполиэдры $B \setminus \cup_{D \in \xi(\lambda)} \operatorname{int} D$, где $B \in \mathcal{Q}_0(\mu)$, $\mu \in \lambda^{\leq}$. Мы получили не задевающее шаров $\xi(\lambda)$ подразбиение $\mathcal{Q}(\lambda) \triangleright \mathcal{Q}_0(\lambda)$, причем T_D, $D \in \xi(\lambda)$, – вложенные в $\mathcal{Q}_0(\lambda)$ шары, и по п. 1 мы можем положить

$$\mathcal{Q}_0(\lambda) \trianglelefteq \mathcal{Q}_0(\lambda)/\{T_D\}_{D \in \xi(\lambda)} = \mathcal{Q}_1(\lambda).$$

По построению шары $\xi(\lambda)$ вписаны в $\mathcal{Q}_1(\lambda)$. Нам надо проверить, что при всяком $\lambda \leq \mu$ автоматически имеет место коммутативная диаграмма подразбиений шаровых комплексов

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}(\mu) & \mathcal{Q}_0(\mu) \arrow[l, "\triangleright"'] \arrow[r, "\trianglelefteq"'] & \mathcal{Q}_1(\mu) \\
\mathcal{Q}(\lambda) \arrow[u, "\trianglelefteq"] & \mathcal{Q}_0(\lambda) \arrow[l, "\triangleright"'] \arrow[r, "\trianglelefteq"'] \arrow[u, "\trianglelefteq"] & \mathcal{Q}_1(\lambda) \arrow[u, "\trianglelefteq"]
\end{tikzcd}.$$

Для этого достаточно убедиться, что $\mathcal{Q}_0(\lambda)$ действительно подразбивает $\mathcal{Q}_0(\mu)$ и $\mathcal{Q}_1(\lambda)$ действительно подразбивает $\mathcal{Q}_1(\mu)$. В такой проверке нам помогает то, что $\xi(\mu) \geq \xi(\lambda)$ в смысле порядка $\mathbf{D}_c^{\infty}(K)$. Следовательно, $\mathcal{Q}_0(\mu)|_{\operatorname{int} B} = \mathcal{Q}(\mu)|_{\operatorname{int} B}$ при $B \in \xi(\lambda)$ в силу того, что $\alpha(\mu)$ не задевает шаров $\xi(\mu)$, а следовательно, не задевает и шаров $\xi(\lambda)$. Отсюда следует, что $\mathcal{Q}_0(\lambda)|_B \trianglelefteq \mathcal{Q}_0(\mu)|_B$ при $B \in \xi(\lambda)$, и по построению на дополнении к шарам $\operatorname{int} \xi(\lambda)$ также имеет место подразбиение, значит, и в целом $\mathcal{Q}_0(\lambda)$ действительно подразбивает $\mathcal{Q}_0(\mu)$. Аналогичное рассуждение выказывает, что $\mathcal{Q}_1(\lambda)$ подразбивает $\mathcal{Q}_1(\mu)$. $\square$

Предложение 37. *Пусть* $\mathtt{Q} \in \mathbf{T}(X)$, $K \trianglelefteq \operatorname{sd}_1 \mathtt{Q}$ *и* B *– некоторый конический относительно* K*, согласованный с* K *замкнутый* n*-мерный шар с центром в* b*. Пусть есть два замкнутых шара* B_0, B_1*, конических относительно* K*, согласованных с* K*, с общим центром* b*,* $B \subset \operatorname{int} B^1$*,* $B_1 \subset \operatorname{int} B_0$*.*

В этих условиях найдутся две кусочно-линейных триангуляции шара $\mathtt{E}_0B_0$, $\mathtt{E}_1B_0$, *такие, что*

(a) $\mathtt{E}_0B_0 \trianglelefteq \mathtt{C}_{\mathtt{Q}}B_0$, *где* $\mathtt{C}_{\mathtt{Q}}B_0$ *построен по предложению* 36*;*

(b) $\mathtt{E}_0B_0\lfloor_{\operatorname{int} B} = \mathtt{Q}\lfloor_{\operatorname{int} B}$*;*

(c) $\mathtt{E}_0B_0 \trianglelefteq \mathtt{E}_1B_0$, $\partial\mathtt{E}_0B_0 = \partial\mathtt{E}_1B_0$*;*

(d) $\mathtt{E}_1B_0\lfloor_{B_1}\underset{\mathrm{PL}}{\approx}[\Delta^n]$.

Доказательство. См. рис. 12.

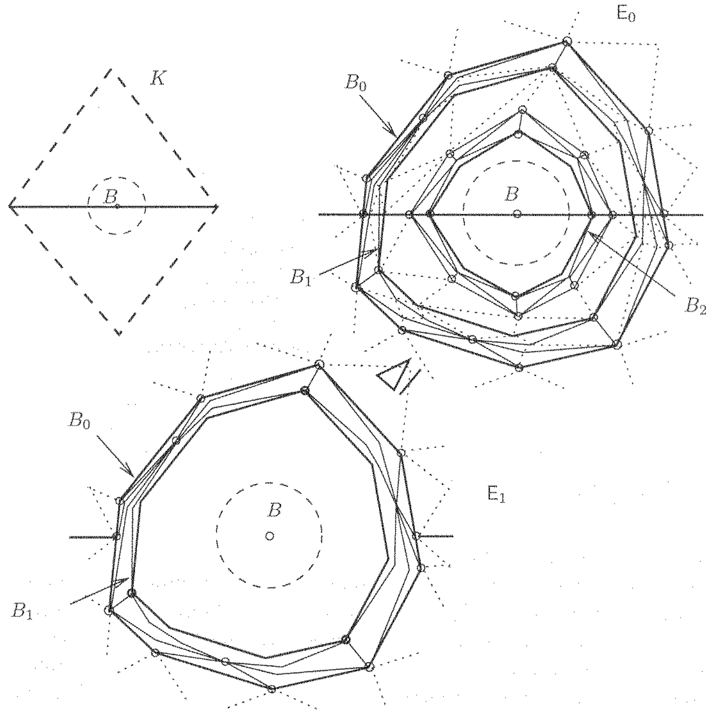


Рис. 12.

1. Сначала по предложению 36 построим $\mathtt{C}_{\mathtt{Q}}B_0$ и линейно триангулируем его границу произвольным образом. Это будет линейная триангуляция $\mathtt{T}_0 = \partial\mathtt{E}_0B_0 = \partial\mathtt{E}_1B_0$. Далее кусочно-линейно

отобразим $[\Delta^n]$ на B_1. Обозначим через $\mathtt{T}_1$ получившуюся триангуляцию B^1 симплексом. Построим кусочно-линейную триангуляцию слоя $B^0 \setminus \operatorname{int} B^1$, продолжающую на краях T_0 и ∂T_1. Так мы построили триангуляцию $E_1 B_0$, удовлетворяющую условию (d).

2. Теперь мы строим триангуляцию $\mathtt{E}_0 B_0$, удовлетворяющую условиям (a), (b), (c). Для этого нам понадобится еще один конический относительно $\mathcal{K}$ шар B_2, согласованный с K, с центром b, такой, что $B \subset \operatorname{int} B_2$, $B_2 \subset \operatorname{int} B_1$. С помощью псевдорадиальной проекции с центром в b отобразим и на B, и на B_2 замкнутую звезду точки b в $\mathtt{Q}$. Так получились триангуляции $\mathtt{T}_2$ B_2 и $\mathtt{T}$ B, такие, что $\mathtt{T}\lfloor_{\operatorname{int} B} = \mathtt{Q}|_{\operatorname{int} B}$ и $\mathtt{T}_2\lfloor_{\operatorname{int} B_2} = \mathtt{Q}\lfloor_{\operatorname{int} B}$. Далее мы произвольным образом линейно триангулируем $B_0 \setminus \operatorname{int} \mathtt{B}_2$ так, чтобы триангуляция совпадала с T_0 на ∂B_0 и подразбивала $\mathtt{E}_1$ и $D \cap B_0 \setminus \operatorname{int} \mathtt{B}_2$ при всех $D \in \mathtt{Q}$. Получили триангуляцию $\mathtt{T}_{0,2}$ на $B_0 \setminus \operatorname{int} \mathtt{B}_2$. Далее мы можем продолжить $T_{0,2}$ до триангуляции $\mathtt{T}_2'$ шара B_2 так, чтобы $\partial \mathtt{T}_2' = \mathtt{T}_{0,2}\lfloor_{\partial B_2}$, $\mathtt{T}_2'|_{B_0} = \mathtt{T}$ и $\mathtt{T}_2' \trianglelefteq \mathtt{T}^2$. Объединяя $\mathtt{T}_{0,2}$ и $\mathtt{T}_2$ по общей части, получаем $\mathtt{E}_0 B_0$. □

Лемма 7 (О функториальном вписывании дизъюнктных конфигураций шаров в комбинаторные многообразия)**.** *Пусть Λ – конечный посет. Рассмотрим некоторую диаграмму $\Lambda \xrightarrow{\mathcal{K}} \mathbf{T}(X)$. Сопоставим этой диаграмме некоторую триангуляцию общего подразбиения $K \trianglelefteq \mathcal{K}_\lambda$ для всякого $\lambda \in \Lambda$. Пусть фиксирована произвольная диаграмма $\Lambda \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}_c^\infty(K)$. Утверждается, что существует пара диаграмм $\Lambda \xrightarrow{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1} \mathbf{T}(X)$ и пара естественных преобразований $\mathcal{K} \underset{\triangleright}{\overset{\alpha}{\leftarrow}} \mathcal{K}_0 \underset{\trianglelefteq}{\overset{\beta}{\rightarrow}} \mathcal{K}_1$, таких, что при всех $\lambda \in \Lambda$ подразбиения α_λ не задевают шаров $\xi(\lambda)$ и конфигурация шаров $\xi(\lambda)$ вписана в $\mathcal{K}_1(\lambda)$.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство леммы 6 с заменой конструкции из предложения 36 на конструкцию из предложения 37. □

8.4.

Лемма 8. *Пусть есть конечный симплициальный комплекс $\mathtt{Y}$, $Y = |\mathtt{Y}|$, и его подкомплекс $\mathtt{Z} \subseteq \mathtt{Y}$, $Z = |\mathtt{Z}|$.*

Пусть есть $G_1, \ldots, G_m, U \in \mathrm{PL}_Y(X)$ и $\mathcal{Q}$ – $\mathbf{R}(X)$-раскраска $\mathtt{Y}$, индуцирующая раскраску $\mathcal{Q}_{\mathtt{Z}}$ подкомплекса $\mathtt{Z}$.

Пусть есть K – общая триангуляция всех комплексов

$$\{\mathtt{Q}\}_{\mathtt{Q}\in \mathrm{Max}\,\mathcal{Q}(y), y\in Y}.$$

Пусть есть OPL*-топология $\mathcal{T}$ на Y и предпучок Александрова $(Y,\mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}^{\infty}_{c}(K)$.*

Пусть раскраска $\mathcal{Q}$ $\mathbf{R}(X)$-триангулирует $G_1,\dots,G_m$ и раскраска $\mathcal{Q}_Z$ $\mathbf{R}(X)$-триангулирует $U\lfloor_Z$.

Пусть одновременно $G_1,\dots,G_m,U$ призматичны относительно ξ.

Рассмотрим клеточный комплекс $\mathtt{Y}\times[I]$ и его подкомплекс $\Pi = \mathtt{Z}\times[I]\cup \mathtt{Y}\times\{1\}$.

Тогда найдется триангуляция $\mathtt{U}\trianglelefteq \mathtt{Y}\times\mathtt{I}$ и ее $\mathbf{R}(X)$-раскраска $\widetilde{\mathcal{Q}}$ со следующими свойствами:

$\widetilde{\mathcal{Q}}|_{\mathtt{Y}\times\{0\}} \trianglelefteq \mathcal{Q}$;

$\widetilde{\mathcal{Q}}$ *триангулирует* $\widetilde{G}_1,\dots,\widetilde{G}_m$, *где* $\widetilde{G}_i = G_i\times \mathrm{id}\in \mathrm{PL}_{Y\times I}(X)$;

$\widetilde{\mathcal{Q}}|_{\Pi}$ *триангулирует* $\widetilde{U}\lfloor_{\Pi}$, *где* $\widetilde{G}_i = G\times\mathrm{id}\in \mathrm{PL}_{Y\times I}(X)$, $\widetilde{U} = U\times\mathrm{id}\in \mathrm{PL}_{Y\times I}(X)$.

Доказательство. 1. Сначала мы отметим общий факт: если CPL-топология Александрова $\mathcal{T}'$ на Y строго аппроксимирует (§6.8.1) OPL-топологию Александрова $\mathcal{T}$ и $(Y,\mathcal{T}') \xrightarrow{\xi'} \mathbf{D}^{\infty}_{c}(K)$ – индуцированный морфизм, то всякий ξ-призматический гомеоморфизм $f\in \mathrm{PL}_Y(X)$ является ξ'-призматическим. По предложению 26 строгая аппроксимация $\mathcal{T}'$ для $\mathcal{T}$ всегда найдется. Ее-то мы и зафиксируем.

2. Теперь мы возьмем общее усиление CPL-топологий $\mathcal{A}^c(\mathtt{Y})\vee \mathcal{T}'$ и канонические морфизмы ослабления

$$(Y,\mathcal{A}^c(\mathtt{Y})) \xleftarrow{\varphi_{\mathcal{A}^c(\mathtt{Y})}} (Y,\mathcal{A}^c(\mathtt{Y})\vee\mathcal{T}') \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{T}}} (Y,\mathcal{T}').$$

Рассмотрим отображение

$$(Y,\mathcal{A}(\mathtt{Y})\vee\mathcal{T}') \xrightarrow{\gamma=(\mathrm{Max}\,\mathcal{Q}\circ\varphi_{\mathcal{A}^c(\mathtt{Y})})\times(\xi'\circ\varphi_{\mathcal{T}'})} \mathbf{R}(X)\times\mathbf{D}^{\infty}_{c}(K).$$

В этой ситуации по предложению 25 найдется конечный посет O, такой, что $\mathrm{Ord}(O)$ линейно триангулирует Y, $|\mathrm{Ord}(O)| = Y$, топология $\mathcal{A}^c(\mathtt{Y}) \vee \mathcal{T}'$ слабее $\mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O))$ и диаграмма сплошных стрелок

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O)) \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa(O)"'] & (Y, \mathcal{A}^c(\mathtt{Y}) \vee \mathcal{T}) \arrow[d, "\gamma"] \\
O \arrow[r, dotted, "P_R \times P_D"'] & \mathbf{R}(X) \times \mathbf{D}^\infty_c(K)
\end{tikzcd}$$

однозначно пополняется пунктирной (здесь верхняя стрелка

$$(Y, \mathcal{A}^c(\mathrm{Ord}(O)) \to (Y, \mathcal{A}^c(\mathtt{Y}) \vee \mathcal{T})$$

– морфизм ослабления топологии).

3. Далее воспользуемся леммой 6 и построим пару функторов $O \xrightarrow{P_0, P_1} \mathbf{R}(X)$ и два естественных преобразования $P_R \underset{\triangleright}{\overset{\alpha}{\leftarrow}} \mathcal{K}_0 \underset{\trianglelefteq}{\overset{\beta}{\rightarrow}} P_1$, таких, что при всех $o \in O$ подразбиения α_o не задевают шаров $P_D(o)$ и конфигурация шаров $P_D(o)$ вписана в $P_1(o)$.

4. Теперь мы можем дважды воспользоваться рассуждениями §6.7.4 для α и для β и, склеив на $Y \times [0, \frac{1}{2}, 1]$ две раскраски $[\mathrm{ord} O \times \mathbf{1}] \xrightarrow{\Xi(\alpha)} \mathbf{R}(X)$ и $[\mathrm{ord} O \times \mathbf{1}] \xrightarrow{\Xi(\beta)} \mathbf{R}(X)$, получить нужные $\mathtt{U}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}$. $\square$

9. Некоторая схема непослойной деформации послойного гомеоморфизма

Наш ключевой технический инструмент – набор лемм о фрагментации послойного кусочно-линейного гомеоморфизма тривиального расслоения на кубе. Эти леммы – прямолинейное многомерное обобщение хорошо известного одномерного случая – фольклорной леммы о фрагментации одномерного слоения или изотопии (записанной в PL-ситуации в книжке Хадсона). Очевидно, что данное обобщение не может представлять собой ничего нового и тем более сложного, но нам не удалось найти ссылок.

9.1. Операция $\rtimes$. Рассмотрим послойный гомеоморфизм $H \in \mathrm{PL}_B(X)$ тривиального расслоения с базой B: $H(x, b) = (H\lfloor_b(x), b)$. Рассмотрим некоторое отображение $X \times C \xrightarrow{F} X \times B$, послойное относительно проекции на X: $F(x,c)=(x,F\lfloor_x(c))$. Паре

$$
\begin{tikzcd}
X\times C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X\times B \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\times B \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X\times B \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

мы сопоставляем отображение

$$
\begin{tikzcd}
X\times C \arrow[rr, "F\rtimes H"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X\times C \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

послойное относительно проекции на C и определенное соответствием

$$(x,c)\overset{F\rtimes H}{\mapsto}(H\lfloor_{(F\lfloor_x(c))}(x),c). \tag{35}$$

Заметим сразу, что в общем случае $F\rtimes H$ является только послойным отображением, но не послойным гомеоморфизмом.

9.2. Отметим частный случай конструкции $\rtimes$. Рассмотрим вложение

$$X\times B\overset{i^0=\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times d^0}{\longrightarrow}X\times B\times I.$$

Пусть $X\times B\times I\xrightarrow{F}X\times B$ – отображение, послойное относительно проекции на X и дополнительно обладающее свойством $F\circ i^0=\mathrm{id}$. Пусть $H\in \mathrm{PL}_B(X)$. Обозначим через h_t вложение $B\overset{h_t}{\hookrightarrow}B\times I$: $h_t(b)=(b,t)$. Индуцированное вложением h_t отображение $(F\rtimes H)\lfloor_{h_t}\colon X\times B\to X\times B$, послойное относительно проекции на B, вообще говоря, не является гомеоморфизмом при $t\neq 0$. Но при $t=0$ по построению мы имеем $(F\rtimes H)\lfloor_{h_0}\equiv H$. Таким образом, в этой ситуации $F\rtimes H$ есть однопараметрическая деформация H в классе послойных отображений.

9.3. Свойства призматичности операции $\rtimes$. Пусть гомеоморфизм H призматичен относительно морфизма $(B,B^{\mathrm{triv}})\xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}}\mathbf{Al}(X)$, отправляющего все B в топологию Александрова $\mathcal{L}$ на X. Тогда по определению §7.0.3 определена топология $\mathcal{L}'=H^{-1}\mathcal{L}$ и морфизм $(B,B^{\mathrm{triv}})\xrightarrow{H^{-1}\delta'_{\mathcal{L}}}\mathbf{Al}(X)$, посылающий все B в $\mathcal{L}'$, при этом для любого $b\in B$ верно, что $(X,\mathcal{L})\xrightarrow{H^{-1}\lfloor_b}(X,\mathcal{L}')$ – гомеоморфизм пространств Александрова, индуцирующий постоянный, не зависящий от b изоморфизм $\mathfrak{B}(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{\widetilde{H}^{-1}} \mathfrak{B}(X,\mathcal{L}')$.

Предложение 38. *Допустим, есть некоторая топология Александрова $\mathcal{L}$ на X. Допустим, H призматичен относительно морфизма $(B, B^{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} \mathbf{Al}(X)$, отправляющего все B в $\mathcal{L}$.*

Тогда $F \rtimes H^{-1}$ обладает следующим свойством: для всякого $L \in \mathfrak{B}(X,\mathcal{L})$, для всякой точки $c \in C$ верно, что $(F \rtimes H^{-1})\lfloor_c(L) \subseteq \widetilde{H}^{-1}(L)$

Доказательство. По определению 35

$$(F \rtimes H^{-1})\lfloor_c(x) = H^{-1}\lfloor_{(F\lfloor_x(c))}(x). \tag{36}$$

Правая часть формулы (36) содержится в $\widetilde{H}^{-1}(L)$ всякий раз, когда $x \in L$. □

Тем самым, если в условиях предложения 38 так случилось, что $F \rtimes H^{-1}$ – послойный гомеоморфизм, то $(F \rtimes H^{-1})^{-1}$ – призматический гомеоморфизм относительно $(C, C^{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} \mathbf{Al}(X)$.

Предложение 39. *Допустим, есть некоторая топология Александрова $\mathcal{L}$ на X. Допустим, H призматичен относительно морфизма $(B, B^{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} \mathbf{Al}(X)$, отправляющего все B в $(X,\mathcal{L})$. Допустим, $F \rtimes H^{-1}$ – послойный гомеоморфизм. Тогда обратный послойный гомеоморфизм призматичен относительно $(C, C^{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}}} \mathbf{Al}(X)$, при этом $(F \rtimes H^{-1})\mathcal{L} \equiv H^{-1}\mathcal{L}$ и $\widetilde{F \rtimes H}^{-1} \equiv \widetilde{H}^{-1}$.*

Доказательство. Утверждение предложения 38 влечет идентичное утверждение с заменой $\mathfrak{B}(X,\mathcal{L})$ на разбиение $\Sigma(X,\mathcal{L})$ (см. §6.3.1). В наших условиях из взаимной однозначности отображений $F \rtimes H^{-1}\lfloor_c$ мы получаем, что элементы разбиений отображаются "на" и, следовательно, элементы минимальных баз отображаются "на". Что и доставляет требуемое утверждение для $(F \rtimes H^{-1})^{-1}$. □

Далее мы обобщим предыдущие рассуждения на случай произвольного призматического гомеоморфизма H, предполагая естественную блочную структуру F.

Предложение 40. *Пусть на C и на B зафиксированы топологии Александрова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ соответственно. Пусть $\mathfrak{B}(C,\mathcal{T}) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{B}(B,\mathcal{R})$*

– некоторый морфизм. Пусть фиксирован морфизм $(B, \mathcal{R}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{Al}(X)$ и мы предполагаем, что $H \in \mathrm{PL}_B(X)$ призматичен относительно ξ. Пусть отображение F, для которого треугольник

$$\begin{tikzcd} X \times C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X \times B \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативен, обладает следующим “блочным” свойством: для любого $T \in \mathfrak{B}(C, \mathcal{T})$ верно, что $F(X \times T) = X \times \phi(T)$. Предположим, что $F \rtimes H^{-1}$ – послойный гомеоморфизм. В этих условиях гомеоморфизм $(F \rtimes H^{-1})^{-1}$ призматичен относительно $(\xi' \circ \phi)$.

Доказательство. Мы находимся в условиях предложения 39 на каждом отдельным блоке $X \times T$. Склейка утверждений предложения 39 по всем $T \in \mathfrak{B}(C, \mathcal{T})$ доставляет утверждение текущего предложения. □

10. Системы графиков

10.1. Пусть $\mathbf{k}$ – конечное множество индексов. Куб $I^{\mathbf{k}}$ мы считаем координатным кубом в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}$ с координатами t_k, $k \in \mathbf{k}$. Для подмножества $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{k}$ и $\epsilon \in \{0,1\}^{\mathbf{k} \setminus \mathbf{s}}$ мы обозначаем через $I^{\mathbf{s},\epsilon}$ грань куба $I^{\mathbf{k}}$, определенную равенством $t_i = \epsilon_i$ для координат с индексами из $\mathbf{k} \setminus \mathbf{s}$. “Координатные” грани $I^{\mathbf{s},\mathbf{0}}$ мы обозначаем через $I^{\mathbf{s}}$.

Пусть фиксировано $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{k}$ и набор $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i \in \mathbf{s}}$ подполиэдров $X \times I^{\mathbf{k}}$. Рассмотрим следующее условие на Γ:

gf: Для любого подмножества $\mathbf{l} \subseteq s$ существует отображение $X \times I^{\mathbf{k} \setminus \mathbf{l}} \xrightarrow{f_{\mathbf{l}}} I^{\mathbf{l}}$, такое, что $\Gamma_{\mathbf{l}} = \bigcap\limits_{i \in \mathbf{l}} \Gamma_i = \Gamma f_{\mathbf{l}}$, где $\Gamma f_{\mathbf{l}}$ – график отображения $f_{\mathbf{l}}$ в $X \times I^{\mathbf{k}}$.

Если условие **gf** выполнено, то отображения $\{f_{\mathbf{l}}\}_{\mathbf{l} \subseteq \mathbf{s}}$ определяются по Γ единственным образом.

Пусть N – натуральное число. Через $\{\{N\}\}$ мы обозначаем множество чисел $\{0, \ldots, N\}$. Определим множество $\mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$. Элементом $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$ мы считаем набор $\{\Gamma_i^j\}_{i \in \mathbf{k}, j \in \{\{N\}\}}$ подполиэдров $X \times I^{\mathbf{k}}$, такой, что выполнены аксиомы **gf1**, **gf2**.

gf1: Для любого подмножества $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{k}$ и любого отображения $\mathbf{s} \xrightarrow{b} \{\{N\}\}$ для набора подполиэдров $\{\Gamma_i^{b(i)}\}_{i \in \mathbf{s}}$ выполнено условие **gf**.

Это означает, что существует отображение $X \times I^{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}} \xrightarrow{f^b} I^{\mathbf{s}}$, такое, что $\Gamma^b = \bigcap_{i\in\mathbf{s}} \Gamma_i^{b_i} = \Gamma f^b$, где Γf^b – график отображения f^b в $X \times I^{\mathbf{k}}$.

Отображения f^b определяются по Γ единственным образом. Если выполнена аксиома **gf1**, то, в частности, $\Gamma_i^j = \Gamma f^{i\mapsto j}$ для некоторого единственного отображения $X \times I^{\mathbf{k}\setminus\{i\}} \xrightarrow{f^{i\mapsto j}} I^{\{i\}}$. Эти специальные отображения $f^{i\mapsto j}$ мы обозначаем через f_i^j. Далее, мы предполагаем, что для определенных по Γ с помощью аксиомы **gf1** отображений f_i^j выполнено требование

gf2: $0 \equiv f_i^0 \le f_i^1 \le \cdots \le f_i^{N-1} \le f_i^N \equiv 1$ при любых $i \in \mathbf{k}$.

10.2. Нам требуется использовать в качестве индексов отображения конечных множеств в N. Введем некоторые обозначения и соглашения.

Пусть фиксированы два подмножества $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ множества $\mathbf{k}$. Пусть фиксированы два отображения $\mathbf{s} \xrightarrow{c} \mathrm{N}$, $\mathbf{r} \xrightarrow{d} \mathrm{N}$, такие, что $c|_{\mathbf{s}\cap\mathbf{r}} \equiv d|_{\mathbf{s}\cap\mathbf{r}}$. Тогда через $c \sqcup d$ мы обозначаем отображение $\mathbf{s}\cup\mathbf{r} \xrightarrow{c\sqcup d} \mathrm{N}$, такое, что $c \sqcup d|_{\mathbf{s}} \equiv c$, $c \sqcup d|_{\mathbf{r}} \equiv d$. Для всякой числовой функции $\mathrm{N} \xrightarrow{p} \mathrm{N}$ и $a \in \mathrm{N}^{\mathbf{k}}$ через $p(a) \in \mathrm{N}^{\mathbf{r}}$ мы обозначаем результат покомпонентного применения p к a.

10.3. Всякому $\mathbf{s} \subset \mathbf{k}$ и отображению $\mathbf{s} \xrightarrow{b} \{\{N\}\}$ отвечает отображение

$$\mathbf{GF}(X,\mathbf{k},N) \xrightarrow{\delta_b} \mathbf{GF}(X,\mathbf{k}\setminus\mathbf{s},N).$$

При $i \in \mathbf{k}\setminus\mathbf{s}$, $j \in \{\{N\}\}$ мы полагаем

$$(\delta^b\Gamma)_i^j = \pi_{x,t_{\mathbf{k}\setminus s}}(\Gamma^{b\sqcup(i\mapsto j)}) = \Gamma f_i^{b\sqcup(i\mapsto j)}, \tag{37}$$

где $\pi_{x,t_{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}} : X \times I^{\mathbf{k}} \to X \times I^{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}$ – координатная проекция.

10.4. Пусть есть отображение $\mathbf{k} \xrightarrow{a} \{\{2N-2\}\}$. Определим полиэдр $\Omega_a^0(\Gamma) \subset X \times I^{\mathbf{k}}$. Положим

$$(\Omega_a^0)^o = \{(x,t_{\mathbf{k}}) | \forall i : a_i = 2l_i - 1 : t_i = f_i^{l_i}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}})\} = \bigcap_{a_i=2l_i-1} \Gamma_i^{l_i},$$

$$(\Omega_a^0)^e = \{(x,t_{\mathbf{k}}) | \forall i : a_i = 2l_i : f_i^{l_i}(x,t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}) \le t_i \le f_i^{l_i+1}(x,t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}})\} = \\ = \bigcap_{a_i=2l_i} ((\Gamma_i^{l_i+1})^{\le} \cap (\Gamma_i^{l_i})^{\ge}).$$

(Тут через $(\Gamma_i^j)^{\geq}$ и $(\Gamma_i^j)^{\leq}$ обозначены замкнутые надграфик и подграфик Γ_i^j соответственно.) Положим

$$\Omega_a^0 = (\Omega_a^0)^o \cap (\Omega_a^0)^e. \tag{38}$$

Положим

$$\Omega^0(\Gamma) = \{\Omega_a^0\}_{a \in \{\{2N-2\}\}}.$$

10.5. Пусть фиксированы $\mathbf{s} \subset \mathbf{k}$, $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$. Тогда в соответствии с §10.3 определено $\delta^b\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k} \setminus \mathbf{s}, N)$. Выясним, как соотносятся $\Omega^0(\Gamma)$ и $\Omega^0(\delta^b\Gamma)$. Пусть $\mathbf{k} \setminus \mathbf{s} \xrightarrow{c} \{\{2N-1\}\}$. В соответствии с (37) есть канонические взаимообратные гомеоморфизмы

$$\Omega_c^0(\delta^b\Gamma) \underset{f^b}{\overset{\pi_{x,t_{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}}}{\rightleftarrows}} \Omega_{c \sqcup 2b-1}^0(\Gamma). \tag{39}$$

10.6. Построим усеченную пирамиду $T^{\mathbf{k}}(N) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{k}} \times \mathbb{R}^{\{v\}}$, где $\mathbb{R}^{\{v\}}$ означает экземпляр $\mathbb{R}$ с координатной функцией v; через e_v мы обозначаем соответствующий координатный орт.

Обозначим через $[\![2N-1]\!]$ отрезок $[0, 2N-1] \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $T^{\mathbf{k}}$ усеченную пирамиду в $\mathbb{R}^{\mathbf{k}} \times \mathbb{R}^{\{v\}}$, являющуюся выпуклой оболочкой двух вложенных кубов: $T^{\mathbf{k}} = \operatorname{conv}(I^{\mathbf{k}}, e_v + [\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}})$. На рис. 13 представлена трапеция T^1.

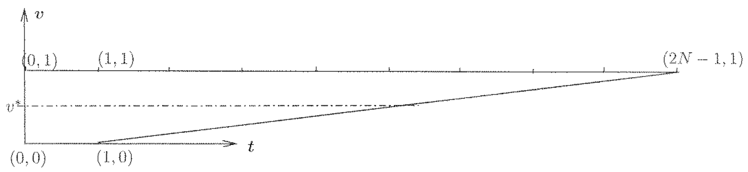


Рис. 13.

Трапеция $T^{\mathbf{k}}$ есть расслоенное по v произведение $\mathbf{k}$ экземпляров T^1. Есть вложения

$$I^{\mathbf{k}} \xrightarrow{h_0} T^{\mathbf{k}} \xleftarrow{h_1} [\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}},$$

где $h_0(t_{\mathbf{k}}) = (t_{\mathbf{k}}, 0_v)$, $h_1(t_{\mathbf{k}}) = (t_{\mathbf{k}}, 1_v)$. Мы обозначаем образы h_0 и h_1 через H_0^k и $H_1^{\mathbf{k}}$ соответственно. Каждой грани куба $I^{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s},\epsilon} \subset I^{\mathbf{k}}$ отвечает вложение $T^{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}} \overset{d_{s,\epsilon}}{\hookrightarrow} T^{\mathbf{k}}$, определенное соответствием

$$(t_{\mathbf{s}}, v) \mapsto (t_{\mathbf{s}}, g^{\epsilon}_{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}(t_{\mathbf{s}}, v)),$$

где
$$g_i^\epsilon(t_{\mathbf{s}}, v) = \begin{cases} 1 + 2(N-1)v & \text{при } \epsilon_i = 1, \\ 0 & \text{при } \epsilon_i = 0. \end{cases}$$

Образ $d_{s,\epsilon}$ мы обозначим через $T^{\mathbf{s},\epsilon} \subseteq T^{\mathbf{k}}$. Обозначим через $W^{\mathbf{k}}$ объединение всех полиэдров $\cup_{i\in\mathbf{k},\epsilon_i=0,1} T^{\mathbf{k}\setminus\{i\},\epsilon_i}$. Обозначим через $h^0(W^{\mathbf{k}})$ и $h^1(W^{\mathbf{k}})$ края $W^{\mathbf{k}}$, отвечающие $v=0$ и $v=1$ соответственно.

Предложение 41. *Существует* неканонический *клеточный* PL-*гомеоморфизм* $[I^{\mathbf{k}} \times I^v] \to [T^{\mathbf{k}}]$, *при котором* $I^{\mathbf{k}} \times 0$ *переходит в* $H_0^{\mathbf{k}}$, $I^{\mathbf{k}} \times 1$ *переходит в* $H_1^{\mathbf{k}}$, *грань* $I^{\mathbf{s},\epsilon} \times I^{\{v\}}$ *переходит в* $T^{\mathbf{s},\epsilon}$, $W^{\mathbf{k}}$ *переходит в* $\partial I^{\mathbf{k}} \times I^{\{v\}}$.

Доказательство. Это утверждение тривиально во всех смыслах. Акцент сделан, как обычно в кусочно-линейной топологии, на неканоничности PL-гомеоморфизма. Канонического, линейного на гранях гомеоморфизма $I^{\mathbf{k}} \times I^{\{v\}} \longrightarrow T^{\mathbf{k}}$ не существует. □

10.7. Построим семейство замкнутых подполиэдров $\Omega(\Gamma) = \{\Omega_a\}_{a\in\{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}}$ полиэдра $X \times T^{\mathbf{k}}$. При $x^* \in X$ обозначим $\Omega_a^0(x^*) = \{(t_{\mathbf{k}}) | (x^*, t_{\mathbf{k}}) \in \Omega_a^0\} \subset I^{\mathbf{k}}$. Определим
$$\Omega_a(x, v) = \Omega_a^0(x) \oplus 2vI^{o(a)} + 2\left[\frac{a}{2}\right] v \subset \mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tag{40}$$
где [..] – целая часть; по соглашению §10.2, мы рассматриваем $2[\frac{a}{2}]$ как целочисленный вектор; $\oplus$ – сумма Минковского;
$$o(a) = \{i \in \mathbf{k} | a_i \text{ – нечетно }\}.$$

Определим отображение
$$\Omega_a(x, v) \xrightarrow{F_a\lfloor_{x,v}} \Omega_a^0(x) \tag{41}$$
следующим образом:
$$F_a\lfloor_{x,v}(t_{\mathbf{k}}) = (t_{e(a)}, f^{\frac{O(a)-1}{2}}(x, t_{e(a)})), \tag{42}$$
где
$$e(a) = \{i \in \mathbf{k} | a_i \text{ – четно }\}$$
и $O(a) = a|_{o(a)} : o(a) \to \mathrm{N}$. Определим
$$\Omega_a = \{(x, t_{\mathbf{k}}, v) | t_{\mathbf{k}} \in \Omega_a(x, v)\} \tag{43}$$

и, наконец, положим

$$\Omega_a \xrightarrow{F_a} \Omega_a^0 : F_a(x, t_{\mathbf{k}}, v) = F_a\lfloor_{x,v}(t_{\mathbf{k}}). \qquad (44)$$

(В соответствии с (39) образ F_a действительно лежит в Ω_a^0.)

10.8. Рассмотрим множества $\Omega_a^1(x) = \Omega_a(x, 1) \subset [\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}}$. Для $a \in \{\{2N-2\}\}$ определим в $[\![2N-1]\!]$ отрезок

$$\Lambda_a = \begin{cases} [2l, 2l+1] & \text{при} \quad a = 2l, \\ [2l-1, 2l+1] & \text{при} \quad a = 2l-1. \end{cases}$$

При $a \in \{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}$ определим параллелепипед $\Lambda_a = \prod_{i\in\mathbf{k}} \Lambda_{a_i}$. Множество замкнутых параллелепипедов $\{\Lambda_a\}_{a\in\{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}}$ есть база некоторой CPL-топологии Александрова $\Lambda(N, \mathbf{k})$на $[[2N-1]]^{\mathbf{k}}$.

Предложение 42. *Для любых $a \in \{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}$, $x \in X$ верно, что $\Omega_a^1(x) \subset \Lambda_a$.*

Доказательство. Это сразу следует из формул (40). □

10.9. Тут мы докажем следующее предложение.

Предложение 43.

1. *Множество полиэдров $\Omega(\Gamma)$ – покрытие $X \times T^{\mathbf{k}}$.*

2. *Полагая $F_\Gamma|_{\Omega_a} = F_a$, мы получаем корректно определенное, послойное относительно проекции на X отображение $X \times T^{\mathbf{k}} \xrightarrow{F_\Gamma} X \times I^{\mathbf{k}}$.*

Доказательство. Доказательство можно провести индукцией по числу элементов $\mathbf{k}$.

1. $\#\mathbf{k} = 1$. В этом случае мы находимся в классической ситуации доказательства Хадсона [13, теорема 6.2, с. 130] и все легко нарисовать. При фиксированном $x^* \in X$ множества $\Omega_j(x^*)$ образуют покрытие двумерной трапеции T^1 параллелограммами и треугольниками (см. рис. 14). При этом множества вида $\Omega_{2l}(x^*)$ – параллелограммы, а множества вида $\Omega_{2l-1}(x^*)$ – треугольники. Наши отображения F_a проецируют параллелограммы на основание параллельно боковому ребру, а треугольники в вершину, естественно склеиваясь в отображение F_Γ.

2. Шаг индукции.

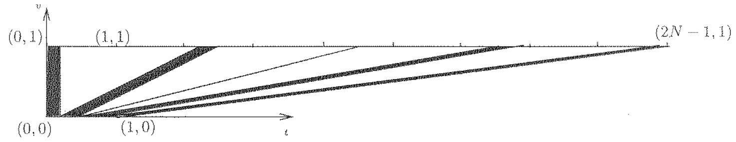


Рис. 14.

2.1. Можно построить $2N$ штук новых функций $T^{\mathbf{k}\setminus\{i\}} \xrightarrow{\overline{f}_i^j} \mathbb{R}^{\{i\}}$ с номерами из $\{\{2N-1\}\}$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \overline{f}_i^{2l}(\Gamma) &= f_i^l \circ F_{\delta_i^l\Gamma}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v) + 2lv \quad \text{при} \quad l = 0, \dots, N-1, \\ \overline{f}_i^{2l-1}(\Gamma) &= f_i^l \circ F_{\delta_i^l\Gamma}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v) + (2l-2)v \quad \text{при} \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{45}$$

В силу индукционного предположения это корректно определенные функции. Положим

$$\overline{\Gamma}_i^j = \{(x, t_{\mathbf{k}}, v) | t_i = \overline{f}_i^j(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v)\}.$$

По построению

$$\overline{f}_i^{2l} \equiv \overline{f}_i^{2l-1} + 2v. \tag{46}$$

Наборы $\overline{f}_i^j$ монотонны при всяком $i \in \mathbf{k}$:

$$0 \equiv \overline{f}_i^0 \leq \overline{f}_i^1 \leq \dots \leq \overline{f}_i^{2N-1} \equiv 1 + 2(N-1)v.$$

Для $\mathbf{s} \xrightarrow{c} \{\{2N-1\}\}$ определим отображение $X \times T^{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}} \xrightarrow{\overline{f}^c} \mathbb{R}^{\mathbf{s}}$ правилом

$$\overline{f}^c(x, t_{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}, v) = f^{[\frac{c+1}{2}]} \circ F_{\delta^{[\frac{c+1}{2}]}\Gamma}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\mathbf{s}}, v) + 2\left[\frac{c}{2}\right]v. \tag{47}$$

Мы получаем, что

$$\Gamma\overline{f}^c = \cap_{i\in\mathbf{s}}\overline{\Gamma}_i^{c(i)}. \tag{48}$$

2.2. Далее, следует убедиться, что определение (43) таково, что для любого $a \in \{\{2N-2\}\}$ верно равенство

$$\Omega_a = \{(x, t_{\mathbf{k}}, v) | \overline{f}_i^{a_i}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v) \leq t_i \leq \overline{f}_i^{a_i+1}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v)\}. \tag{49}$$

Тем самым, Ω_a – покрытие $X \times T^{\mathbf{k}}$.

2.3. Построим отображение

$$X \times T^{\mathbf{k}} \supset \bigcup_{i\in\mathbf{k}, j\in\{\{2N-1\}\}} \overline{\Gamma}_i^j \xrightarrow{\widetilde{F}} \bigcup_{i\in\mathbf{k}, j\in\{\{N\}\}} \Gamma_i^j \subset X \times I^{\mathbf{k}},$$

определяя $\widetilde{F}|_{\overline{\Gamma}_i^j}$ правилом

$$(x, t_{\mathbf{k}}, v) \mapsto f^{[\frac{j+1}{2}]} \circ F_{\delta_i^{[\frac{j+1}{2}]}\Gamma}(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v). \tag{50}$$

Надо проверить, что отображение $\widetilde{F}|_{\overline{\Gamma}_i^j}$ корректно определено. Для этого надо убедиться, что правило (50) обладает следующим свойством: если $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in \overline{\Gamma}_{i_1}^{j_1} \cap \overline{\Gamma}_{i_2}^{j_2}$, то $\widetilde{F}|_{\overline{\Gamma}_{i_1}^{j_1}}(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) = \widetilde{F}|_{\overline{\Gamma}_{i_2}^{j_2}}(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$. Это проверяется в двух случаях: при $i_1 \neq i_2$ и при $i_1 = i_2$. При $i_1 \neq i_2$ мы пользуемся (48) и (47). При $i_1 = i_2$ следует расписать (50) непосредственно.

2.3. Далее, из (49) следует, что для каждого полиэдра Ω_a его граничные точки $\partial\Omega_a$ лежат в $\bigcup_{i\in\mathbf{k}, j\in\{\{2N-1\}\}} \overline{\Gamma}_i^j$ и для всякой граничной точки $(x, t_{\mathbf{k}}, v) \in \partial\Omega_a$ имеем $F_a(x, t_{\mathbf{k}}, v) = \widetilde{F}(x, t_{\mathbf{k}}, v)$. Это наблюдение завершает доказательство шага индукции. $\square$

10.10. Выделим отдельно следующие факты относительно отображения F_Γ. Пусть $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in T^{\mathbf{k}}$, $v^* > 0$. Фиксируем $i \in \mathbf{k}$, $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество точек

$$V_\epsilon^i = \{(x^*, t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}), t_i, v^*)| \operatorname{mod} t_i - t_i^* < \varepsilon\}.$$

Предложение 44. *Если выполнено одно из двух условий*

(a) $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in \int \Omega_a$ *и* $a_i = 2l - 1$ *или*

(b) $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in \Omega_a$, $a_i = 2l$ *и* $\overline{f}^{a_i+1}(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) = \overline{f}^{a_i}(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$,

то найдется ε, *такой, что* $F_\Gamma|_{V_\varepsilon^i} \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. 1. Пусть $a \in \{\{2N-2\}\}$, a_i нечетно. Рассмотрим прямую $L_i(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$, проходящую через точку $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$ и параллельную координатной оси t_i. Тогда по определению Ω_a

$$L_i(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \cap \Omega_a =$$
$$= \{(x^*, t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, t_i, v^*)| \overline{f}_i^a(x^*, t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v^*) \le t_i \le \overline{f}^{a_i+1}(x^*, t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v^*)\}.$$

При этом по определению F_a имеем $F_a|_{L_i(x^*,t^*_{\mathbf{k}},v^*)\cap\Omega_a} \equiv \mathrm{const}$.

2. В соответствии с (46) длина отрезка $L_i(x^*,t^*_{\mathbf{k}},v^*)\cap\Omega_a$ равна $2v^*$.

3.1. Если выполнено условие (a), то утверждение предложения сразу верно в силу пп. 1 и 2 доказательства.

3.2. Если выполнено условие (b), то в соответствии с (46) точка $(x^*,t^*_{\mathbf{k}},v^*)$ лежит в $\Omega_b\cap\Omega_c$, где

$$b_j = \begin{cases} a_i - 1 & \text{при } \ j=i, \\ a_i & \text{при } \ j\neq i, \end{cases} \qquad c_j = \begin{cases} a_i + 1 & \text{при } \ j=i, \\ a_i & \text{при } \ j\neq i. \end{cases}$$

В соответствии с пп. 1 и 2 доказательства отображение F_Γ постоянно на двух начинающихся с точки $(x^*,t^*_{\mathbf{k}},v^*)$ замкнутых полуотрезках $L_i(x^*,t^*_{\mathbf{k}},v^*)$ длины $2v^*$. Следовательно, утверждение верно. □

10.11. Тут мы отметим ситуацию, при которой отображение F_Γ имеет блочную структуру (см. §9.3). Введем следующее предположение о системах графиков $\Gamma\in\mathbf{GF}(X,\mathbf{k},N)$:

gf3: Пусть M – натуральное число. Мы предполагаем, что число N кратно M: $N = MN'$. Далее, предполагаем, что в Γ графики $\Gamma_i^{lN'}$ – графики постоянных функций $f_i^{lN'} \equiv \frac{l}{M}$ при $i\in\mathbf{k}$, $l = 0,\ldots,M$.

Обозначим через $\mathbf{GF}(X,\mathbf{k},N,M)$ множество систем графиков, удовлетворяющих условию **gf3**. Рассмотрим на единичном интервале I структуру шарового комплекса $\frac{1}{M}[I] = (I,\overline{\Psi})$. Напомним, что шаровой комплекс мы отождествляем с CPL-пространством Александрова с минимальной базой – замкнутыми клетками. Множество клеток $\mathfrak{B}(\overline{\Psi})$ занумеруем множеством $\{\widetilde{\{2M-1\}}\} = \{-1,\ldots,2M-1\}$. Положим

$$\overline{\Psi}_{2l} = \left[\frac{l}{M},\frac{l+1}{M}\right]\subset I, \quad l = 0,\ldots,M-1,$$
$$\overline{\Psi}_{2l-1} = \left\{\frac{l}{M}\right\}\in I, \quad l = 0,\ldots,M.$$

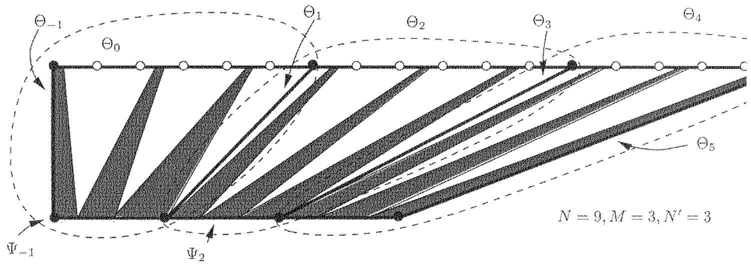
Продолжим $\frac{1}{M}[I]$ до CPL-топологии Александрова $\overline{\Theta}$ на T^1. Элементы минимальной базы $\mathfrak{B}(\overline{\Theta})$ нумеруются тем же множеством

$\{\{\widetilde{2M-1}\}\}$. Положим

$$\overline{\Theta}_{2l}=\begin{cases}\operatorname{conv}\left(\left(\dfrac{l}{M},0\right),\left(\dfrac{l+1}{M},0\right)(2lN',1),(2(l+1)N',1)\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } l=0,\dots,M-2,\\ \operatorname{conv}\left(\left(\dfrac{M-1}{M},0\right),(1,0),(2(M-1)N',1)(2N-1)\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } l=M-1,\end{cases} \tag{51}$$

$$\overline{\Theta}_{2l-1}=\begin{cases}\operatorname{conv}\left(\left(\dfrac{l}{M},0\right),(2lN',1)\right) & \text{при } \ l=0,\dots,M-1,\\ \operatorname{conv}((0,1),(2N-1)) & \text{при } \ l=M.\end{cases}$$

Проиллюстрируем громоздкие формулы простой картинкой:



(52)

Рассмотрим морфизм $\mathfrak{B}(\overline{\Theta}) \xrightarrow{\overline{\zeta}} \mathfrak{B}(\overline{\Psi})$, посылающий $\overline{\Theta}_a$ в $\overline{\Psi}_a$, где $a\in\{\{\widetilde{2M-1}\}\}$.

Предложение 45. *Пусть* $\Gamma\in\mathbf{GF}(X,\mathbf{1},N,M)$. *Тогда*

$$F_\Gamma(X\times\overline{\Theta}_a)=X\times\overline{\zeta}(\overline{\Theta}_a)=X\times\overline{\Psi}_a.$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник вида $\Omega_{2jN'-1}(x)\subset T^1$, $j=1,\dots,M-1$. Согласно **gf3**, имеем $f^{jN'}\equiv\frac{j}{M}$. Отсюда и из (49) следует, что при любом $x\in X$

$$\pi_{v,t}(\Omega_{2jN'-1}(x))\equiv\Omega_{2jN'-1}(x_2)=$$
$$=\{(t,v)|\frac{j}{M}\le t+2(jN'-1)v\le\frac{j}{M}+2jN'v\}\supset\overline{\Theta}_{2j-1}.$$

Остается, посмотрев на определение F_Γ, убедиться в справедливости утверждения. □

Переходя к общему $\mathbf{k}$, определяем комплекс $\frac{1}{M}[I^{\mathbf{k}}] = (\frac{1}{M}[I])^{\mathbf{k}} = (I^k, \overline{\Psi})$, где $\mathfrak{B}(\overline{\Psi}) = \{\overline{\Psi}_a\}_{a\in\{\{\widetilde{2M-1}\}\}^{\mathbf{k}}}$, $\overline{\Psi}_a = \overline{\Psi}_{a_1} \times \cdots \times \overline{\Psi}_{a_k}$. Определяем пространство Александрова $(T^{\mathbf{k}}, \overline{\Theta})$ как расслоенное по v произведение: $\mathfrak{B}(\overline{\Theta}) = \{\overline{\Theta}_a\}_{a\in\{\{\widetilde{2M-1}\}\}^{\mathbf{k}}}$,

$$\overline{\Theta}_a = \{(t_{\mathbf{k}}, v)|(t_i, v) \in \overline{\Theta}_{a_i}, i = 1, \dots, k\}.$$

Определяем морфизм $\mathfrak{B}(\overline{\Theta}) \xrightarrow{\overline{\zeta}} \mathfrak{B}(\overline{\Psi})$ правилом $\overline{\zeta}\overline{\Theta}_a = \overline{\Psi}_a$. Применяем предложение 45 к компонентам расслоенных произведений и получаем следующее предложение.

Предложение 46. *Пусть* $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N, M)$. *Тогда верно, что*

$$\forall a \in \{\{\widetilde{2M-1}\}\}^{\mathbf{k}} : F_\Gamma(X \times \overline{\Theta}_a) = X \times \overline{\zeta}(\overline{\Theta}_a) = X \times \overline{\Psi}_a.$$

Элементы минимальных баз $\mathfrak{B}(\Theta) = \{\Theta_a\}$ и $\mathfrak{B}(\Psi) = \{\Psi_a\}$ двойственных OPL-топологий $\Theta = \overline{\Theta}^c$ на $T^{\mathbf{k}}$ и $\Psi = \overline{\Psi}^c$ на $I^{\mathbf{k}}$ занумерованы тем же множеством $\{\{\widetilde{2M-1}\}\}$. Рассмотрим $\mathfrak{B}(\Theta) \xrightarrow{\zeta} \mathfrak{B}(\Psi)$, посылающий Θ_a в Ψ_a. Из двойственности и предложения 46 выводим, что верно следующее предложение.

Предложение 47. *Пусть* $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N, M)$. *Тогда верно, что*

$$\forall a \in \{\{\widetilde{2M-1}\}\}^{\mathbf{k}} : F_\Gamma(X \times \Theta_a) = X \times \zeta(\Theta_a) = X \times \Psi_a.$$

11. Гомотопия послойного гомеоморфизма, связанная с системой графиков

Пусть $G \in \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}} X$. Пусть $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$. Тогда мы говорим, что G и Γ согласованы, если $G^{-1}(\Gamma) \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$.

Лемма 9. *Если G и Γ согласованы, то $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^{-1}$ – послойный гомеоморфизм, $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^{-1} = F_{G^{-1}(\Gamma)} \rtimes G$.*

Доказательство. Равенство $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^{-1} = F_{G^{-1}(\Gamma)} \rtimes G$ является прямым следствием конструкции F_Γ (см. предложение 43). □

11.1. Наложим дополнительное требование на системы графиков $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$.

gf4: Функции $f_i^j(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}})$ не зависят от $t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}$ и не зависят от индекса i, т.е. для всякого $j \in \{\{N\}\}$ существует функция $X \xrightarrow{f^j} I$, такая, что для любого $i \in \mathbf{k}$ имеет место равенство $f_i^j(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}) = f^j(x)$.

Обозначим через $\mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N)$ подмножество $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N)$, удовлетворяющее условию **gf4**, и, соответственно, через $\mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N, M)$ обозначим подмножество $\Gamma \in \mathbf{GF}(X, \mathbf{k}, N, M)$, удовлетворяющее условию **gf4**.

11.2. Плоские точки послойного гомеоморфизма. Нам необходимо сделать общее отступление о “плоских” точках послойного гомеоморфизма. Пусть $G \in \mathrm{PL}_B(X)$ и $(x, b) \in X \times B$.

Точку (x, b) мы называем плоской точкой гомеоморфизма *G, если для некоторой окрестности $b \in V \subset B$ верно следующее: для всякой точки $b' \in V$ имеет место равенство $G^{-1}\lfloor_{b'}(x) = G^{-1}\lfloor_b(x)$.*

Переформулируем определение плоской точки G в призматических терминах. Рассмотрим на X топологию Александрова δ_x с минимальной базой, состоящей из двух элементов $\mathfrak{B}(X, \delta_x) = \{\{X\}, \{x\}\}$. Рассмотрим постоянный морфизм пространств Александрова

$$(V, V^{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\zeta_{V,x}} (X, \delta_x).$$

Предложение 48. *Точка (x, b) является плоской точкой G тогда и только тогда, когда для некоторой окрестности $b \in V \subset B$ гомеоморфизм $G^{-1}\lfloor_V$ призматичен относительно $\zeta_{v,x}$.*

Пусть $\mathbf{k} = \{1, \dots, k\}$. Пусть $G \in \mathrm{PL}_{\mathbb{R}^{\mathbf{k}}}(X)$, $(x, b) \in X \times \mathbb{R}^{\mathbf{k}}$, $i \in \mathbf{k}$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}$. Рассмотрим прямую $l_i(b) = \{b + e_i t | t \in \mathbb{R}\}$; таким образом, $l_i(b)$ – прямая, проходящая через точку b, параллельная i-й координатной прямой.

Мы говорим, что *G* горизонтален в точке *(x, b)* в направлении *i, если есть окрестность $b \in V \subset \mathbb{R}^{\mathbf{k}}$, такая, что для любой точки $b' \in V$ гомеоморфизм $G\lfloor_{l_i(b')}$ плоский в (x, b').*

Предложение 49. *Если $G \in \mathrm{PL}_{\mathbb{R}^{\mathbf{k}}}(X)$ и $(x, b) \in X \times \mathbb{R}^{\mathbf{k}}$ таковы, что G горизонтален во всех направлениях $i \in \mathbf{k}$, то (x, b) – плоская точка G.*

Доказательство. Мы можем считать, что найдется малый открытый куб $Q \subset \mathbb{R}^{\mathbf{k}}$ с ребрами, параллельными координатным осям, и центром в точке b, такой, что для любой точки $b' \in Q$ гомеоморфизм $\mathrm{PL}\lfloor_{l_i(b')}$ горизонтален в (x, b') в любом направлении $i \in \mathbf{k}$. До всякой точки $b' \in Q$ мы можем добраться по компактной ломаной, находящейся внутри Q и составленной из отрезков, параллельных координатным осям. Отсюда и из условия следует, что $G^{-1}\lfloor_{b'}(x) = G^{-1}\lfloor_{b}(x)$. $\square$

11.3. Обозначим через $(T^{\mathbf{k}})^{v^*}$ множество $\{(t_{\mathbf{k}}, v) \in T^{\mathbf{k}} | v = v^*\}$.

Предложение 50. *Пусть* $\Gamma \in \mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N)$. *Пусть* $G \in \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}}$ – *согласованный с* Γ *послойный гомеоморфизм. Пусть* $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in X \times T^{\mathbf{k}}$, $v^* > 0$. *Тогда верно следующее:*

Если послойный гомеоморфизм $F_\Gamma \rtimes G^{-1}\lfloor_{(T^{\mathbf{k}})^{v^*}}$ не горизонтален *в направлении* i *в точке* $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$, *то найдется такой мультииндекс* $a \in \{\{2N-1\}\}$, *что* $a_i = 2l$, $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in \Omega_a$ *и* $x^* \in \mathrm{supp}(f_i^{l+1} - f_i^l)$.

Доказательство. Мы рассматриваем два случая:

1. Пусть для всех a, таких, что $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*) \in \Omega_a$, верно, что a_i нечетно. Это значит, что $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$ лежит в дополнении к замкнутому множеству $\cup_{a \in \{\{2N-2\}\}, i \in e(a)} \Omega_a$. В соответствии с доказательством предложения 43 это значит, что a лежит во внутренности некоторого Ω_a, такого, что $i \in o(a)$. Тогда из определения F_a, определения $F_\Gamma \rtimes G^{-1}$ и предложения 44 (a) следует, что $F_\Gamma \rtimes G^{-1}$ горизонтален в $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$ в направлении i.

2. Пусть найдется $a \in \{\{2N-1\}\}$, такой, что $a_i = 2l$ и $x^* \notin \mathrm{supp}(f_i^{l+1} - f_i^l)$. В этом случае в соответствии с доказательством предложения 43 точка $t^*_{\mathbf{k}}$ лежит $\Omega_i^{2l-1}(x^*, v^*) \cap \Omega_i^{2l+1}(x^*, v^*)$, где

$$\Omega_i^j(x^*, v^*) = \{t_{\mathbf{k}} | \overline{f}_i^j(x^*, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v^*) \le t_i \le \overline{f}_i^{j+1}(x^*, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}, v^*)\}.$$

Специфика условия **gf4** проявляется в том, что в этом случае

$$\overline{f}_i^j = f_i^{[\frac{j+1}{2}]}(x^*) + 2[\frac{j}{2}]v^* \equiv \mathrm{const}.$$

Таким образом, в некоторой открытой окрестности точки $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}, v^*)$ в $T^{\mathbf{k}}(x^*, v^*)$ все точки удовлетворяют условиям (44), что доказывает предложение. $\square$

11.4. Пусть G и Γ согласованы. Опишем строение гомеоморфизма $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^1 \in \mathrm{PL}_{[\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}}}(X)$.

Введем на кубе $[\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}}$ OPL-топологию Александрова $\mathcal{E}(N, k)$. Сначала рассмотрим на отрезке $[\![2N-1]\!]^1 = [0, 2N-1]$ минимальную базу $\mathfrak{B}([\![2N-1]\!]^1, \mathcal{E}(N, 1))$ топологии Александрова

$\mathcal{E}(N,1)$, элементы которой занумерованы точками $\{\{2N-2\}\}^1 = \{0,1,\dots,2N-2\}$. Положим

$$E_i = \begin{cases} (i-1, i+2), & \text{если } 2 \le i \le 2N-4 \text{ четно,} \\ (i, i+1), & \text{если } 1 \le i \le 2N-3 \text{ нечетно,} \\ (0,2), & \text{если } i = 0, \\ (2N-3, 2N-1), & \text{если } i = 2N-2. \end{cases}$$

Если на числах из $\{\{2N-2\}\}^1$ завести частичный порядок $\underset{e}{\le}$, порожденный отношением “четное число больше двух соседних нечетных”, то получаем, что $E_i \subseteq E_j$ тогда и только тогда, когда $i \underset{e}{\le} j$. Тем самым, установлен канонический изоморфизм посетов

$$\mathfrak{B}([\![2N-1]\!]^1, \mathcal{E}(N,1)) \approx \{\{2N-2\}\}^1_{\underset{e}{\le}}. \tag{53}$$

Определим

$$([\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}}, \mathcal{E}(N,\mathbf{k})) = ([\![2N-1]\!]^1, \mathcal{E}(N,1))^{\mathbf{k}}. \tag{54}$$

Возводя в степень изоморфизм (53), получаем канонический изоморфизм

$$\mathfrak{B}([\![2N-1]\!]^1, \mathcal{E}(N,\mathbf{k})) \approx \{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}_{\underset{e}{\le}} \tag{55}$$

(тут мы обозначаем степень $(\underset{e}{\le})^{\mathbf{k}}$ частичного порядка $\underset{e}{\le}$ тем же символом $\underset{e}{\le}$). То есть элементы минимальной базы $\mathfrak{B}([\![2N-1]\!]^{\mathbf{k}}, \mathcal{E}(N,k))$ занумерованы элементами $\{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}$, при этом $E_{a_{\mathbf{k}}} = \prod_{i\in\mathbf{k}} E_{a_i}$, $E_a \subset E_b \Leftrightarrow a \underset{e}{\le} b$.

Пусть есть система графиков $\Gamma \in \mathbf{GF}(X,\mathbf{k},N)$ и выполнена аксиома **gf4**. Сопоставим $a \in \{\{2N-2\}\}$ подмножество

$$\widetilde{J}_\Gamma(a) \subset X,\ \widetilde{J}_\Gamma(a) = \bigcup_{i\in e(a), a_i = 2l_i} \operatorname{supp}(f_i^{l_i+1} - f_i^{l_i}). \tag{56}$$

Положим $J_\Gamma(a) = \mathcal{D}_{\widetilde{J}_\Gamma(a)}$ (функтор $\mathcal{D}_{\text{star}}$ определен в §8.1). Мы получаем некоторый морфизм посетов

$$\{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}_{\underset{e^{\mathbf{k}}}{\le}} \xrightarrow{J_\Gamma} \mathbf{Al}(X).$$

Пользуясь изоморфизмом (55), определяем морфизм

$$(\llbracket 2N-1\rrbracket^{\mathbf{k}}, \mathcal{E}(N,\mathbf{k})) \xrightarrow{\mathbf{J}_\Gamma} \mathbf{Al}(X)$$

как композит

$$(\llbracket 2N-1\rrbracket^{\mathbf{k}}, \mathcal{E}(N,\mathbf{k})) \xrightarrow{o} \mathfrak{B}(\llbracket 2N-1\rrbracket^{\mathbf{k}}, \mathcal{E}(N,\mathbf{k})) \approx$$
$$\approx \{\{2N-2\}\}^{\mathbf{k}}_{\underset{e}{\leq}} \xrightarrow{J_\Gamma} \mathbf{Al}(X).$$

11.5. Свойства призматичности $F_\Gamma \rtimes G^{-1}$. Тут мы соберем в итоговую лемму необходимые нам общие свойства призматичности $F_\Gamma \rtimes G^{-1}$.

Предложение 51. *Пусть есть система графиков $\Gamma \in \mathbf{GF}(X,\mathbf{k},N)$ и выполнена аксиома* **gf4**. *Если G и Γ согласованы, то послойный гомеоморфизм $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^1$ призматичен относительно $\mathbf{J}_\Gamma$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathcal{E}(N,\mathbf{k}) = \Lambda(N,\mathbf{k})^c$$

(см. §10.8 и §6.1.4). Из предложения 42 тогда следует, что для точки $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}) \in X \times \llbracket 2N-1\rrbracket^{\mathbf{k}}$ верно следующее: если $t^*_{\mathbf{k}} \in E_a$ и $(x^*, t^*_{\mathbf{k}}) \in \Omega^1_c(\Gamma)$, то $c \underset{e}{\leq} a$. Сравнивая это обстоятельство с предложениями 42 и 49, получаем, что верно следующее утверждение: если $t^*_{\mathbf{k}} \in E_a$ и $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^1$ не горизонтален в точке $(x^*, t^*_{\mathbf{k}})$, то x^* содержится в $\widetilde{J}_\Gamma(a)$, а это и означает в точности $\mathbf{J}_\Gamma$-призматичность $(F_\Gamma \rtimes G^{-1})^1$. □

Итак, с системой графиков $\Gamma \in \mathbf{HGF}(X,\mathbf{k},N,M)$ связаны следующие объекты:

1) OPL-топология Александрова $\Theta = \Theta(M)$ на $T^{\mathbf{k}}(N)$ и морфизм

$$\mathfrak{B}(\Theta) \xrightarrow{\zeta} \mathfrak{B}(\Psi) = \mathfrak{B}(\frac{1}{M}[I]^{\mathbf{k}})^{\mathrm{op}}$$

(см. §10.11);

2) OPL-топология Александрова $\mathcal{E} = \mathcal{E}(N)$ на $T^{\mathbf{k}}_1 = T^{\mathbf{k}}_1(N) \approx \llbracket 2N-1\rrbracket^{\mathbf{k}}$ и морфизм $(T^{\mathbf{k}}_1, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{J}_\Gamma} \mathbf{Al}(\mathbf{X})$ (см. §11.4), такие, что топология $\mathcal{E}$ на $T^{\mathbf{k}}_1$ вписана в топологию $\Theta^{\mathrm{op}}\lfloor_{T^{\mathbf{k}}_1}$ на $H^{\mathbf{k}}_1$.

Лемма 10. *Если послойный гомеоморфизм G согласован с $\Gamma \in \mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N, M)$, то*

(a) $F_\Gamma \rtimes G^{-1}\lfloor_{H_1^{\mathbf{k}}}$ *призматичен относительно* $\mathbf{J}_\Gamma$*;*

(b) *если* $\mathcal{L} \in \mathbf{Al}(X)$ *и послойный гомеоморфизм G призматичен относительно* $\delta_{\mathcal{L}}$*, то и* $F_\Gamma \rtimes G^{-1}$ *призматичен относительно* $\delta_{\mathcal{L}}$*;*

(c) *если послойный гомеоморфизм* $G\lfloor_{\partial I^{\mathbf{k}}}$ *призматичен относительно произвольного морфизма* $(\partial I^{\mathbf{k}}, \Psi\lfloor_{\partial I^{\mathbf{k}}}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{Al}(X)$*, то послойный гомеоморфизм* $F_\Gamma \rtimes G^{-1}\lfloor_{T_1^{\mathbf{k}}}$ *призматичен относительно морфизма*

$$(T^{\mathbf{k}_1}, \Theta\lfloor_{T_1^{\mathbf{k}}}) \xrightarrow{\xi \circ \zeta|_{\mathfrak{B}(\Theta^{\mathrm{op}}\lfloor_{T^{\mathbf{k}}})^{oo}}} \mathbf{Al}(X). \tag{57}$$

Доказательство. Утверждение (a) есть специальный случай утверждения предложения 51. Утверждение (b) следует из предложения 39. Утверждение (c) следует из предложения 50 и предложения 40. $\square$

12. Функции Хадсона и их графики

Здесь мы пользуемся конструкцией из [13, теорема 6.2, с. 130, и следствия].

Хадсон предлагает особенно простой вид необходимых для фрагментации функций и их графиков.

Пусть K – симплициальный комплекс, триангулирующий X, $|K| \xrightarrow{t} X$ – триангуляция. Пусть $f : |K| \to I$ – функция, линейная на всех симплексах K (т.е. f определяется своими значениями в вершинах K). Будем называть такие функции *функциями Хадсона на симплициальном комплексе* K. Функции $X \xrightarrow{g} I$, имеющие разложение

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "t^{-1}"'] & & I \\ & {|K|} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

где f – функция Хадсона на K, будем называть *функциями Хадсона на триангуляции* t *многообразия* X.

Обозначим множество всех функций Хадсона на триангуляции t через $\mathrm{Hud}(t)$. Диаметр $\mathrm{diam} f$ функции Хадсона определяется как

$$\max_{\{x,y\in X\}} |f(x)-f(y)|.$$

Диаметр измеряет близость функции f к постоянной функции. Множество $\mathrm{Hud}_\delta(t)$ всех функций Хадсона диаметра, не превышающего δ, есть компактный конечномерный полиэдр.

Пусть $\mathcal{G}$ – компактное семейство гомеоморфизмов $\mathrm{PL}_{I^k}(X)$, т.е. $\mathcal{G}=\{G_b\}_{b\in B}\subset \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}}$, B – компактный полиэдр, и при этом отображение $B\times X\times I^{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{G}} X\times I^{\mathbf{k}}$, определенное соответствием $(b,x,t_{\mathbf{k}})\mapsto (G_b(x,t_{\mathbf{k}}))$, кусочно-линейно.

Пусть фиксировано подмножество $\mathbf{s}\subseteq\mathbf{k}$ и задан индексированный $\mathbf{s}$ набор функций $f_{\mathbf{s}}, f_i\in\mathrm{Hud}(t)$. Рассмотрим набор подполиэдров $\Gamma_{\mathbf{s}}$, где $\Gamma_i=\{(x,t_{\mathbf{k}})|t_i=f_i(x)\}$.

Гомеоморфизм $G\in\mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}}(X)$ согласован с $f_{\mathbf{s}}$, если одновременно и Γ_s, и $G^{-1}(\Gamma_{\mathbf{s}})$ удовлетворяют условию $\mathbf{gf}$ из §10.1.

Предложение 52. *В наших условиях найдется число $\delta(\mathcal{G})>0$, такое, что если $\mathrm{diam} f_i\le\delta$ для любого $i\in\mathbf{s}$, то набор $f_{\mathbf{s}}$ согласован одновременно со всеми послойными гомеоморфизмами компактного семейства гомеоморфизмов $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Мы по индукции по числу функций в наборе $f_{\mathbf{s}}$ применяем рассуждение Хадсона.

(1) Пусть $\#\{\mathbf{s}\}=1$, $\mathbf{s}=\{i\}$. Нам надо доказать, что существует такое $\delta>0$, что если $\mathrm{diam} f_i\le\delta$, то всякий лист

$$L_{(x^*,t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}})}(G)=\{(x,t_{\mathbf{k}})|x=G(x^*)\lfloor_{t_{\mathbf{k}}}, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}=t^*_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}\}$$

всякого $G\in\mathcal{G}$ задевает Γ_i по единственной точке. Рассмотрим проекцию $X\times I^{\mathbf{k}}\xrightarrow{\pi_{\{i\}}} I^{\{i\}}$. Гомеоморфизмы компактного семейства $\mathcal{G}$ являются послойными относительно π_i, и поэтому рассуждение Хадсона к ним применимо.

(2) Предположим, что мы умеем доказывать этот факт при $\#\{\mathbf{s}\}\le l-1$. Пусть $\#\{\mathbf{s}\}=l$.

Выберем $i\in\mathbf{s}$. По предшествующему шагу найдем такое $\delta>0$, что если $\mathrm{diam}(f_i)\le\delta$, то f_i согласовано с $\mathcal{G}$. С функцией f_i и согласованным с ней гомеоморфизмом G ассоциирован гомеоморфизм $W(f_i,G)\in\mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}\setminus\{i\}}}(X)$, определяемый следующим образом.

Обозначим через $X \times I^{\mathbf{k}\setminus\{i\}} \xrightarrow{G^{-1}f_i} I^{\{i\}}$ функцию, графиком которой, по определению согласованности, является $G^{-1}(\Gamma_i)$. Положим

$$W(f_i, G)\lfloor_{t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}}(x) = G\lfloor_{(t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}(x), t_i = G^{-1}f_i(x, t_{\mathbf{k}\setminus\{i\}}))}(x).$$

Множество гомеоморфизмов

$$\mathcal{W} = \{W(f_i, G)\}_{f_i \in \mathrm{Hud}_\delta, G \in \mathcal{G}} \subset \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}\setminus\{i\}}}(X)$$

есть компактное семейство гомеоморфизмов из $\mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}\setminus\{i\}}}(X)$, а для него по индукционному предположению δ существует для набора функций Хадсона $f_{\mathbf{s}\setminus\{i\}}$. Осталось сделать наблюдение, что набор функций Хадсона $f_{\mathbf{s}\setminus\{i\}}$, согласованный с $\mathcal{W}$, объединенный вместе с функцией Хадсона $f_{\{i\}}$, согласованной с $\mathcal{G}$, образуют согласованный с $\mathcal{G}$ набор $f_{\mathbf{s}}$. □

С триангуляцией $|K| \xrightarrow{t} X$ связано множество $\dot{\mathrm{star}}_v(t)$ открытых шаров звезд триангуляции.

Для компактного семейства гомеоморфизмов $\mathcal{G} \in \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}}(X)$, натуральных чисел N, M и триангуляции t многообразия X мы назовем **системой Хадсона** систему графиков $\Gamma \in \mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N, M)$, такую, что Γ согласована одновременно со всеми гомеоморфизмами из $\mathcal{G}$ и, кроме того, для любых i, j выполнено условие $\mathrm{supp}(f_i^{j+1} - f_i^j) \in \dot{star}_v(t)$.

В итоге построений этого пункта мы получаем следующее утверждение.

Лемма 11. *Для любого компактного семейства гомеоморфизмов $\mathcal{G} \in \mathrm{PL}_{I^{\mathbf{k}}}(X)$, любой триангуляции $|K| \xrightarrow{t} X$ и натурального числа M существует натуральное число $N(\mathcal{G})$ и система Хадсона*

$$\mathrm{H}(\mathcal{G}, t, M) \in \mathbf{HGF}(X, \mathbf{k}, N(\mathcal{G}), M).$$

Доказательство. Следует занумеровать любым способом $v_1, \ldots,$ v_V вершины K. Выберем специальную последовательность $\{h_j\}_{j=0,\ldots,V}$ функций Хадсона на K. Положим $h_0 \equiv 0$; для $j = 1, \ldots, V$ определим функции на вершинах следующим образом:

$$h_j(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i < j, \\ 0 & \text{при} \quad i \geq j. \end{cases}$$

Ясно, что $0 = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_V$, и при этом $\mathrm{supp}(h_{j+1} - h_j) = \dot{\mathrm{star}}\,(v_j)$.

Далее следует выбрать $\delta(\mathcal{G})$ по предложению 52 и выбрать натуральное число M, такое, что $\frac{1}{M} < \delta$.

Теперь мы определяем определяющую $\mathrm{H}(\mathcal{G}, t, M)$ систему функций $\{f_i^j\}_{i \in \mathbf{k}, j \in \{\{MV\}\}}$, полагая $f_i^j = \frac{l}{M} + \frac{1}{M} h_{j'}$ при $j = lV + j'$, $0 < j' < V$. □

12.1. Сравнивая леммы 11 и 12, мы получаем, что для компактного семейства гомеоморфизмов $\mathcal{G} \subset \mathrm{PL}_{I^k}(X)$ и системы Хадсона $\mathrm{H}(\mathcal{G}, t, M)$ образ предпучка Александрова $\mathbf{J}_{\mathrm{H}(\mathcal{G}, t, M)}$ лежит в подпосете $\dot{star}^k(t) \subset \mathbf{Al}(X)$, порожденном объединениями не более чем k штук открытых звезд t.

13. Малые шары, разделение малых шаров

Нам нужна серия предложений о "разделении" конфигураций шаров на симплициальном многообразии K. Мы говорим, что набор шаров $\{A_i\}_i \in \mathbf{D}^\infty(K)$ **разделяет** (некоторый, не обязательно дизъюнктный) набор шаров $\{B_j\}_j$, $B_j \subset |K|$, если $\cup_i B_j \underset{X}{\subseteq} \cup_i A_i$.

Рассмотрим компактное симплициальное геометрическое многообразие K размерности n. Через $\mathrm{star}(K)$ обозначим покрытие полиэдра $|K|$ замкнутыми звездами K.

Обозначим через $\mathrm{sd}_i K$ i-е барицентрическое подразбиение K.

Предложение 53. *При $i \geq j \geq 0$ покрытие $\mathrm{star}(\mathrm{sd}_i K)$ вписано в покрытие $\mathrm{star}(\mathrm{sd}_j K)$.*

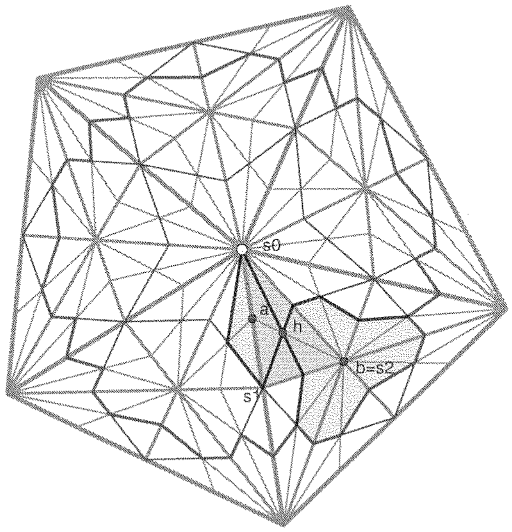
Доказательство. Это общее тривиальное свойство измельчений комплексов:

$$K_0 \trianglelefteq K_1 \Rightarrow \mathrm{star}(K_0) \ \text{ вписано в } \ \mathrm{star}(K_1). \qquad \square$$

Предложение 54. *Для любых двух шаров $a, b \in \mathrm{star}(\mathrm{sd}_2 K)$, таких, что $a \cap b \neq \emptyset$, найдется шар $c \in \mathrm{star}(K)$, такой, что $a \cup b \subseteq c$.*

Доказательство. Напомним, что вершины $\mathrm{sd}_1 K$ занумерованы симплексами K, ребра $\mathrm{sd}_1 K$ – 2-флагами симплексов K, ..., k-симплексы $\mathrm{sd}_1 K$ – k-флагами K. Итак, пусть $a, b \in \mathrm{star}(\mathrm{sd}_2 K)$ и $a \cap b \neq \emptyset$. Пусть t – вершина $\mathrm{sd}_2 K$, лежащая в $a \cap b$. Поскольку комплекс $\mathrm{sd}_2 K$ покрыт симплексами старшей размерности $\mathrm{sd}_1 K$, вершина t лежит в некотором полном флаге $s_0, \ldots, s_n$. Утверждается, что замкнутая звезда $|\mathrm{star}_K(s_0)|$ содержит $|a \cup b|$ (см. рис.

15).



Это следует из двух наблюдений:

1. $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$ есть полный подкомплекс $\mathrm{sd}_2 K$, в том смысле, что если вершины симплекса $\mathrm{sd}_2 K$ лежат в $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$, то и сам симплекс лежит в $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$.

2. Минимальная длина цепочки ребер, соединяющей t с любой вершиной $\mathrm{sd}_2\mathrm{link}_K(s_0)$, не меньше 2 (и, следовательно, минимальная длина цепочки ребер, соединяющая t с любой вершиной, не лежащей в $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$, не меньше 3), а минимальная длина цепочки ребер, соединяющая t с любой вершиной $a \cap b$, не превосходит 2.

Из п. 2 следует, что все вершины $a \cap b$ лежат в $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$; тогда из п. 1 следует, что и все симплексы $a \cap b$ лежат в $\mathrm{sd}_2\mathrm{star}_K(s_0)$. $\square$

Легко удостовериться в том, что верно следующее утверждение.

Предложение 55. *При $i \geq 2$ всякая звезда симплекса $\mathrm{sd}_i K$ либо сама является согласованным с K шаром, либо содержится в согласованной с K звезде $\mathrm{sd}_{i-1} K$.*

Рассмотрим множество $\mathbf{B}(X)$ всех замкнутых PL-шаров, вложенных в многообразие X. Обозначим через $\mathbf{B}^\infty(X)$ множество всех конечных подмножеств $\mathbf{B}(X)$. На $\mathbf{B}^\infty(X)$ есть два порядка:

1) порядок **по включению**:

$$\{B_i\}_i \sqsubseteq \{C_j\}_j \Leftrightarrow \{B_i\}_i \underset{\mathbf{B}(X)}{\subseteq} \{C_j\}_j;$$

2) порядок **по покрытию**:

$$\{B_i\}_i \preccurlyeq \{C_j\}_j \Leftrightarrow \cup_i B_i \underset{X}{\subseteq} \cup_j C_j.$$

Рассмотрим бесконечную последовательность

$$K = \mathrm{sd}_0 K \rhd \mathrm{sd}_1 K \rhd \mathrm{sd}_2 K \rhd \ldots.$$

Обозначим $\mathbf{S}_l K = \cup_{i=l}^{\infty} \mathrm{star}\,\mathrm{sd}_i K \subset \mathbf{B}(|K|)$.

Предложение 56 (О разделении малых согласованных шаров)**.** *Пусть есть n штук согласованных с K шаров из $\mathbf{S}_i K$, $i \geq 3n-2$; тогда найдется набор из не более чем n дизъюнктных согласованных с K шаров из $\mathbf{S}_{i-3(n-1)}K$, разделяющий данный.*

Доказательство. Проводим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение тривиально. Допустим, что утверждение верно при $n = k-1$, $k \geq 2$, и докажем шаг индукции.

Пусть дан набор $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ согласованных с K шаров из $\mathbf{S}_i K$. Тогда либо они уже дизъюнктны и утверждение верно, либо $a_i \cap a_j \neq \emptyset$ для некоторой пары $i, j \in 1, \ldots, k$, $i \neq j$. Применяя предложения 53 и 54 и пользуясь тем, что $\mathrm{sd}_i K = \mathrm{sd}_2 \mathrm{sd}_{(i-2)} K$, мы находим шар $c' \in \mathbf{S}_{i-2}K$, такой, что $a_i \cup a_j \subset c'$. Отметим, что по предположению $i \geq 3k-2$ и $k \geq 2$. Следовательно, верно неравенство $i-2 \geq 3k-4 \geq 2$ и для шара c' выполнено предположение предложения 55. Следовательно, найдется согласованный с K шар $c \in \mathbf{S}_{i-3}K$, содержащий c'. Определим новый набор согласованных с K шаров $B = \{c\} \cup (A \setminus \{a_i, a_j\})$. По построению B покрывает A, имеет $k-1$ элементов, лежит в $\mathbf{S}_{i-3}$ и для него утверждение верно по индукционному предположению. В силу транзитивности $\preccurlyeq$ шаг индукции доказан. □

Обозначим через $\mathbf{S}_j^i K \subset \mathbf{B}^\infty(|K|)$ множество всех конечных неупорядоченных наборов из не более чем i шаров из $\mathbf{S}_j K$.

Очевидно, что порядок $\sqsubseteq$ на $\mathbf{B}^\infty(|K|)$ сильнее, чем порядок $\preccurlyeq$, т.е. $(A \sqsubseteq B) \Rightarrow (A \preccurlyeq B)$. Обозначим через $\mathbf{B}^\infty(|K|)_\sqsubseteq \xrightarrow{\beta} \mathbf{B}^\infty(|K|)_\preccurlyeq$

тривиальный морфизм ослабления порядка, порожденный тождественным отображением на элементах. Посет $(\mathbf{S}^i_j K)_{\preccurlyeq}$ мы обозначаем через $\mathbf{T}^i_j K$, а $(\mathbf{S}^i_j K)_{\sqsubseteq}$ обозначаем тем же символом $\mathbf{S}^i_j K$. Через $\mathbf{D}^i_j K \hookrightarrow \mathbf{T}^i_j K$ обозначим подпосет $\mathbf{T}^i_j K$, образованный всеми дизъюнктными наборами согласованных с K шаров.

Очевидно, что $\mathbf{S}^{i_0}_{j_0} K \hookrightarrow \mathbf{S}^{i_1}_{j_1} K$ и $\mathbf{T}^{i_0}_{j_0} K \hookrightarrow \mathbf{T}^{i_1}_{j_1} K$, если одновременно $i_0 \leq i_1$ и $j_0 \geq j_1$, т.е. $\mathbf{S}^{\bullet}_{\bullet} K, \mathbf{T}^{\bullet}_{\bullet} K$ – двойные фильтрации $\mathbf{S}^{\infty}_0 K$ и $\mathbf{T}^{\infty}_0 K$ соответственно.

13.1. Нам необходимо специальное обозначение: через $\widetilde{n}$ обозначим число $3(\sum_{j=1}^{j=n} l! - n)$. Есть рекуррентное соотношение $\widetilde{n} = \widetilde{n-1} + 3(n!-1)$. Далее, композит

$$\mathbf{S}^n_i K \xrightarrow{\beta} \mathbf{T}^n_i K \hookrightarrow \mathbf{T}^{n!}_{i-\widetilde{n}-1} K$$

обозначим через α^n_i.

Предложение 57 (О функториальном разделении малых шаров). *Для любого геометрического симплициального многообразия K, всякого натурального n и $i \geq \widetilde{n}+2$ существует естественное преобразование θ^n_i морфизма посетов $\mathbf{S}^n_i K \xrightarrow{\alpha^n_i} \mathbf{T}^{n!}_{i-\widetilde{n}-1} K$ в некоторый морфизм посетов $\mathbf{S}^n_i K \xrightarrow{\gamma^n_i} \mathbf{D}^{n!}_{i-\widetilde{n}-1} K \hookrightarrow \mathbf{T}^{n!}_{i-\widetilde{n}-1} K$.*

Доказательство. Индукция по n.

1. Пусть $n = 1$. Тогда $n! = 1$, $\widetilde{n} = 0$, структура посета на $\mathbf{S}^n_i K$ тривиальна. Определим $\mathbf{S}^n_i K \xrightarrow{\gamma^1_i} \mathbf{D}^1_{i-1} K$, выбрав некоторым способом, по предложению 55, для всякого шара $B \in \mathbf{S}^n_i$ некоторый содержащий его согласованный с K шар $\gamma^1_i(B)$ из $\mathbf{D}^1_{i-1} K$. Имеем $B \subseteq \gamma^1_i(B)$, т.е. $\alpha^1_i(B) \preccurlyeq \gamma^1_i(B)$, тем самым θ^1_i определено.

2. Предположим, $\theta^{n-1}_i, \gamma^{n-1}_i$ уже построены. Отметим, что $\mathbf{S}^i_j K$, $\mathbf{T}^i_j K$ – усеченные верхние полурешетки (супремум существует, если существует верхняя граница). При этом $\mathbf{S}^i_j K$ свободна. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{S}^n_i K \arrow[r, dotted, "\delta_n"] & \boldsymbol{T}^{n!}_{i-\widetilde{n}-1} K \\
\boldsymbol{S}^{n-1}_i K \arrow[u, hook] \arrow[r, "\gamma^{n-1}_i"'] & \boldsymbol{D}^{(n-1)!}_{i-\widetilde{n-1}+1} K \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad (58)$$

В силу свободы $\mathbf{S}_i^n K$ продолжение $\delta_{\mathbf{n}}$ канонически определено, и на наборе $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{S}_i^n K$ из n штук шаров оно определяется правилом

$$\delta_n(\{A_i\}_{i=1}^n) = \vee_{i=1}^n \gamma_i^{n-1}(\{A_j\}_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}).$$

Таким образом, $\delta_n(\{A_i\}_{i=1}^n)$ состоит из не более чем $n!$ шаров. Из той же свободы $\mathbf{S}_i^n$ следует, что выбирая по предложению 56 произвольное разделяющее покрытие набора шаров $\delta_n(\{A_i\}_{i=1}^n)$, мы получаем естественное преобразование $\delta_n \xrightarrow[\bullet]{\vartheta_n} \gamma_n$ функтора δ_n в некоторый функтор

$$\mathbf{S}_i^n K \xrightarrow{\gamma_n} \mathbf{D}_{i-\tilde{n}-1}^{n!} K.$$

Теперь мы можем положить $\theta_n = \vartheta_n \psi_n$, где ψ_n канонически определено коммутативностью квадрата морфизмов функторов

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\alpha}_i^n \arrow[r, dotted, "\psi_n"] & \boldsymbol{\delta}_n \\
\boldsymbol{\alpha}_i^{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\theta_{n-1}"'] & \boldsymbol{\gamma}_i^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

тут слева – каноническое вложение в качестве подфунктора, а справа – вложение, определенное диаграммой (58). □

14. Лемма о призматической фрагментации конечного семейства послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения на кубе

Тут мы собираем накопленный в §§9–13 материал в следующую лемму, обобщающую в нужном нам виде конструкцию Хадсона фрагментации изотопии на многомерный случай.

Лемма 12 (О призматической фрагментации конечного семейства послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения на кубе)**.** *Пусть фиксированы следующие данные:* $\mathtt{Q} \in \mathbf{R}(X)$, *набор гомеоморфизмов* $G_1, \dots, G_m, U \in \mathrm{PL}_{I^k}(X)$, *триангуляция* $\mathtt{K} \trianglelefteq \mathtt{Q}$, *натуральное число* $M \geq 1$, *предпучок Александрова*

$$\left(\partial \frac{1}{M}[I^k]\right)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}_c^{\infty}(K).$$

Мы предполагаем, что гомеоморфизмы $G_1, \dots, G_m$ *призматичны относительно* δ_{Q} *и что гомеоморфизмы* $G_1\lfloor_{\partial I^k}, \dots, G_m\lfloor_{\partial I^k}, U\lfloor_{\partial I^k}$ *призматичны относительно* ξ.

При этих условиях найдется семейство гомеоморфизмов

$$\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_m, \widetilde{U} \in \mathrm{PL}_{\,I^k\times I}(X),$$

таких, что $\widetilde{G}_i\lfloor_{I^k\times\{0\}}= G_i$, $\widetilde{U}\lfloor_{I^k\times\{0\}}= U$*; найдется* OPL*-топология* $\mathcal{T}$ *на кубическом ведре* $\Xi = \partial I^k \times I \cup I^k \times \{1\}$*, такая, что* $\mathcal{T}|_{\partial I^k\times\{0\}} = (\partial\frac{1}{M}[I^k])^{\mathrm{op}}$*; найдется предпучок Александрова* $(\Xi, \mathcal{T}) \xrightarrow{\widetilde{\xi}} \mathbf{D}_c^{\infty}(K)$*, продолжающий* ξ*, для которых верно следующее:*

Гомеоморфизмы $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_m$ *призматичны относительно* δ_{Q}*, гомеоморфизмы* $\widetilde{G}_1\lfloor_{\Xi}, \dots, \widetilde{G}_m\lfloor_{\Xi}, \widetilde{U}\lfloor_{\Xi}$ *призматичны относительно* $\widetilde{\xi}$*. При этом если гомеоморфизм* U *был* δ_{Q}*-призматичен, то и гомеоморфизм* $\widetilde{U}$ *можно выбрать* δ_{Q}*-призматическим.*

Доказательство.

0. В доказательстве мы строим

— шесть наборов $\langle G_1^j, \dots, G_m^j, U^j, \mathcal{T}^j, \xi^j\rangle$, где $G_i^j, U^j \in PL_{I^k}$, $j = 0, \dots, 5$, $\mathcal{T}^j$ – топология Александрова на ∂I^k, $(\partial I^k, \mathcal{T}^j) \xrightarrow{\xi^j} \mathbf{D}_c^{\infty}(K)$;

— пять наборов $\langle G_1^{j,j+1}, \dots, G_1^{j,j+1}, U^{j,j+1}, \mathcal{T}^{j,j+1}, \xi^{j,j+1}\rangle$, где $G_i^{j,j+1}$ $, U^{j,j+1} \in \mathrm{PL}_{\,I^k\times I}$, $j = 0, \dots, 4$, $(\partial I^k \times I, \mathcal{T}^{j,j+1}) \xrightarrow{\xi^{j,j+1}} \mathbf{D}_c^{\infty}(K))$;

— и отдельно топологию $\mathcal{E}$ на I^k и морфизм $(I^k, \mathcal{E}) \xrightarrow{\psi} \mathbf{D}_c^{\infty}(K)$,

такие, что

$G_i^{j,j+1}\lfloor_{I^k\times 0}= G^j$,

$G_i^{j,j+1}\lfloor_{I\times 1}= G^{j+1}$,

$U^{j,j+1}\lfloor_{I\times\{0\}}= U^j$,

$U_i^{j,j+1}\lfloor_{I\times\{1\}}= U^{j+1}$,

$h^0\xi^{j,j+1} = \xi^i$, $h^1\xi^{j,j+1} = \xi^{j+1}$,

$G_i^0 = G_i$, $U_i^0 = U$, $\xi^0 = \xi$, $\partial\psi = \xi^7$,

$G_i^j\lfloor_{\partial I^k}, U^j\lfloor_{\partial I^k}$ призматичны относительно ξ^j,

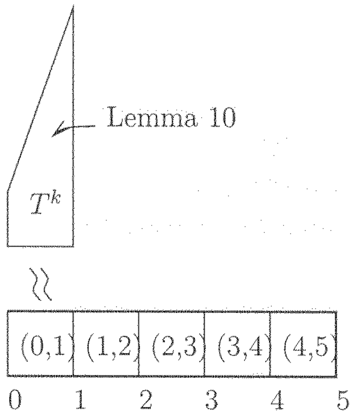
G^7, U^7 призматичны относительно ψ,

$G_i^{j,j+1}\lfloor_{\partial I^k}, U^{j,j+1}\lfloor_{\partial I^k}$ призматичны относительно $\xi^{j,j+1}$,

все $G_i^j, G_i^{j,j+1}$ призматичны относительно Q и

$U^j, U^{j,j+1}$ призматичны относительно Q, если U призматичен относительно Q.

Имея эти данные, мы можем склеить по предложению 29 гомеоморфизмы на $\mathrm{PL}_{I^k\times[0,6]}$ и, сделав линейную замену в базе, превратить их в нужный набор призматических гомеоморфизмов из $\mathrm{PL}_{I^k\times I}$.



1. Воспользуемся предложением 35 и построим некоторый морфизм
$$\Big(\partial I^k, \mathcal{A}\Big(\frac{1}{M}\partial I^B ig)\Big) \xrightarrow{\eta} \mathbf{D}_c^\infty(K),$$
такой, что $\eta > \xi$.

2. Выберем симплициальное подразбиение $K' \trianglelefteq K$, подразбивающее одновременно все шары, возникающие во всех конфигурациях $\eta(y)$, $y \in \partial I^{\mathbf{k}}$, и во всех конфигурациях $\xi(y)$, $y \in \partial I^{\mathbf{k}}$. Таких шаров конечное число, и потому такое общее подразбиение K' существует.

3. Построим по лемме 11 число N и семейство графиков Хадсона $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{G_1, \dots, G_m, U\}, \mathrm{sd}_{\widetilde{k}} K', M) \in \mathbf{HGF}(X, k, N, M)$, где $\mathrm{sd}_{\widetilde{k}}$ определено в §13.1.

4. Строим $G^{0,1}, U^{0,1}, \xi^{0,1}$.

Мы применяем лемму 10. Определим послойные гомеоморфизмы тривиального расслоения $X \times T^k \xrightarrow{\pi_2} T^k$: $\overline{G}_i^{0,1} = F_{\mathcal{H}} \rtimes G_i$, $i = 1, \dots, m$, и $\overline{U}^{0,1} = F_{\mathcal{H}} \rtimes U$. На $T^{\mathbf{k}}$ есть OPL-топология Александрова $\Theta(M)$. Предложение 11 определяет PL-гомеоморфизм φ, одновременно являющийся гомеоморфизмом пространств Александрова

$$
\begin{tikzcd}
(T^{\mathbf{k}}, \Theta) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & (\frac{1}{M}[I^k])^{\mathrm{op}} \times I^{\mathrm{triv}} \arrow[dl] \\
& I^{\mathrm{triv}} &
\end{tikzcd}
$$

и такой, что $\varphi|_{H_0^k} = \mathrm{id}$, $\varphi(H_1^k) = I^k \times \{1\}$, $\varphi(W^k) = (\partial I^k) \times I$. Полагаем $G_i^{0,1} = \overline{G}_i^{0,1} \circ \varphi^{-1}$, $i = 1, \dots, m$, и $U^{0,1} = \overline{U}^{0,1} \circ \varphi^{-1}$.

В соответствии с утверждением (b) леммы 10 гомеоморфизмы $G_i^{0,1}$ призматичны относительно $\mathtt{Q}$ и $U^{0,1}$ призматичен относительно $\mathtt{Q}$, если U был призматичен относительно Q.

Определяем $\mathcal{T}^{0,1}$ как $\varphi^{-1}\Theta = \mathcal{A}^c(\partial \frac{1}{N}[I^k] \times I^{\mathrm{triv}})$. Определяем $\overline{\xi}^{0,1}$ в соответствии с (57) и $\xi^{0,1} = \overline{\xi}^{0,1} \circ \varphi^{-1} : (\partial I^k \times I, \mathcal{T}^{0,1}) \to \mathbf{D}_c^{\infty}(K)$. В соответствии с утверждением (c) леммы 10 гомеоморфизмы $G_i^{0,1}\lfloor_{(\partial I^k) \times I}$ и $U^{0,1}\lfloor_{(\partial I^k) \times I}$ призматичны относительно $\xi^{0,1}$.

5. Определяем G_i^j, U^j, $G_i^{j,j+1}$, $U^{j,j+1}$ при $j \geq 1$.

Положим $G_i^1 = G_i^{0,1}\lfloor_{I^k \times \{1\}}$ и $U^1 = U^{0,1}\lfloor_{I^k \times \{1\}}$. При $j \geq 1$ положим $G_i^j \equiv G_i^1$ и $G_i^{j,j+1} \equiv G_i^1 \times \mathrm{id}$. Положим $U^j \equiv U^1$ и $U^{j,j+1} \equiv U^1 \times \mathrm{id}$.

6. Определим $\mathcal{E}$ и ψ.

6.1. В соответствии с утверждением (a) леммы 10 гомеоморфизмы G_i^1 призматичны относительно $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{\mathcal{H}} \circ \varphi^{-1}$, где $(I^k, \mathcal{E} = \varphi^{-1}\mathcal{E}(N)) \xrightarrow{\mathbf{J}'} \mathbf{Al}(X)$ и топология $\mathcal{E}|_{\partial I^k}$ вписана в топологию $\mathcal{A}(\frac{1}{M}\partial[I^k])$ на I^k.

6.2. Теперь к $\mathbf{J}'$ мы применяем предложение 57 о функториальном разделении малых шаров и получаем морфизм $(I^k, \mathcal{E}) \xrightarrow{\psi} \mathbf{D}_c^{k!}(\mathrm{sd}_1 K')$, такой, что G_i^1 и U^1 призматичны относительно ψ.

7. Определяем $\mathcal{T}^{1,2}$ и $\xi^{1,2}$, $\mathcal{T}^2$, ξ^2.

Заметим, что топология $\mathcal{A}(\frac{1}{M}\partial[I^k])$ плотна (§6.4), следовательно, по предложению 15 существует морфизм $\mathfrak{B}\partial(I^k, \mathcal{E}) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{B}(\frac{1}{M}\partial[I^k])^{\mathrm{op}}$, такой, что для любого $E \in \mathfrak{B}(I^k, \mathcal{E})$ верно, что $E \subset \phi(E)$. Теперь мы применяем предложение 22 к $\xi^1 = \xi$, ϕ. Полагаем $\mathcal{T}^2 = \partial\mathcal{E}$, $\xi^2 = \xi^1 \circ \phi \circ o : (\partial I^k, \mathcal{E}^2) \to \mathbf{D}_c^{\infty}(K)$. Полагаем

$\mathcal{T}^{1,2} = \widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi$ и $\xi^{1,2} = \widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\xi^1, \xi^2)$. Предложение 22 утверждает, что $G_i^{1,2}, U^{1,2}$ призматичны относительно $\xi^{1,2}$.

Далее, полагаем $\mathcal{T}^5 = \mathcal{T}^4 = \mathcal{T}^3 = T^2 = \partial\mathcal{E}$.

8. Определяем $\xi^{2,3}$.

Положим $\xi^3 = \eta \circ \phi \circ o : \partial(I^k, \mathcal{E}) \to \mathbf{D}_c^\infty(K)$. Имеем $\eta > \xi$, следовательно, $\xi^2 < \xi^3$. Применяем предложение 32 при $\alpha = \xi^2$, $\beta = \xi_3$, $w = \mathrm{id}$. Определяем $\mathcal{T}^{2,3} = \underline{\mathrm{Cyl}}_{\mathrm{id}}$, $\xi^{2,3} = \underline{\mathrm{Cyl}}_{\mathrm{id}}(\xi^3, \xi^2)$. По предложению 32 гомеоморфизмы $G_i^{2,3}$, $U^{2,3}$ призматичны относительно $\xi^{2,3}$.

9. Определяем $\xi^{3,4}$, $\xi^{4,5}$.

Построим морфизм $\partial(I^k, \mathcal{E}) \xrightarrow{\xi^4} \mathbf{D}_c^{k!}\mathrm{sd}_1 K'$. Положим

$$\xi^4(b) = \{\text{подмножество множества шаров из } \psi(b), \\ \text{задевающих шары из } \xi^2(b)\}.$$

Гомеоморфизмы G_i^3, U^3 одновременно ξ^2-призматичны и ψ-призматичны, следовательно, они и ξ^4-призматичны. По построению $\psi|_{\partial I^k} = \xi^5 > \xi^4 < \xi^3$. Теперь мы применяем предложение 31 к данным $\langle \xi^3, \xi^4, \mathrm{id}\rangle$ и определяем $\xi^{3,4} = \overline{\mathrm{Cyl}}_{\mathrm{id}}(\xi^3, \xi^4)$. Далее мы применяем предложение 32 к данным $\langle \xi^4, \xi^5, \mathrm{id}\rangle$ и определяем $\xi^{4,5} = \underline{\mathrm{Cyl}}_{\mathrm{id}}(\xi^4, \xi^5)$. □

15. Доказательство леммы о совместной триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов

Тут мы докажем две леммы 13 и 14, последняя из которых – $\frown$-лемма для пары ($\underline{\mathrm{Prism}}^m(X) \times \mathrm{PL}\,(X)$, $\underline{\mathrm{Prism}}^{m+1}(X)$). Это завершает доказательство теоремы A. Наш план состоит в сравнении $\mathbf{R}(X)$-триангулированных послойных гомеоморфизмов и $\mathbf{D}^\infty(X)$-призматических, для которых мы доказали удобную лемму 12 о призматической фрагментации конечного семейства послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения на кубе. Лемма 13 будет посвящена приведению $G_1, \ldots, G_m, U \in \underline{\mathrm{Prism}}^m(X) \times \mathrm{PL}\,(X)$ к удобному $\mathbf{D}^\infty(X)$-призматическому виду. В последней $\frown$-лемме 14 показывается, как можно с помощью леммы 8 триангулировать получившееся семейство $\mathbf{D}^\infty(X)$-призматических гомеоморфизмов.

15.1. Локальная лемма. Тут мы доказываем, что некоторые данные о призматичности семейства гомеоморфизмов тривиального расслоения на “симплициальном ведре” всегда продолжаются до подобных же данных на заполнении ведра.

Зафиксируем следующие данные:

- $Q \in \mathcal{N}_k\mathbf{R}(X)$, $Q = (\mathsf{Q}_0 \trianglelefteq \mathsf{Q}_1 \trianglelefteq \vdots \trianglelefteq \mathsf{Q}_k)$;
- стандартную Q-раскраску упорядоченного симплициального комплекса $[\Delta^k]$ и порожденный этой раскраской морфизм $(\Delta^k, \mathcal{A}^c([\Delta^k])) \xrightarrow{\mathrm{Max}Q} \mathbf{R}(X)$ (см. (23));
- призму $\Delta^k \times I$ со структурой клеточного комплекса $[\Delta^k] \times [0,1]$;
- индуцированный проекцией $[\Delta^k] \times [0,1] \xrightarrow{\pi} [\Delta^k]$ морфизм
$$(\Delta^k \times I, \mathcal{A}^c([\Delta^k] \times [0,1])) \xrightarrow{\alpha(Q)=\mathrm{Max}Q\}\lfloor_\pi} \mathbf{R}(X);$$
- “нижнее симплициальное ведро”
$$\underline{\Gamma}^k = \Delta^k \times \{0\} \cup \partial\Delta^k \times I \subset \Delta^k \times I$$
с индуцированной вложением клеточной структурой $[\underline{\Gamma}^k]$;
- открытую кусочно-линейную топологию Александрова $\mathcal{T}$ на крае ведра
$$\partial\Delta^k \overset{\mathrm{id}\times\{1\}}{\hookrightarrow} \underline{\Gamma}^k;$$
- общую триангуляцию $K \trianglelefteq \mathsf{Q}_i$, $i = 0, \dots, k$;
- морфизм $(\partial\Delta^k \times \{1\}, \mathcal{T}) \xrightarrow{\xi} \mathbf{D}_c^\infty(K)$;
- набор послойных гомеоморфизмов тривиального расслоения над “ведром”
$$G_1, \dots, G_m, U \in \mathrm{PL}_{\underline{\Gamma}^k}(X).$$

Лемма 13. *Предположим, что введенные выше данные удовлетворяют следующим условиям:*

(1) $G_1, \dots, G_m$ *призматичны относительно* $\alpha(Q)\lfloor_{\underline{\Gamma}^k}$*;*

(2) $G_1\lfloor_{\partial\Delta^k\times\{1\}}, \dots, G_m\lfloor_{\partial\Delta^k\times\{1\}}, U\lfloor_{\partial\Delta^k\times\{1\}}$ *призматичны относительно* ξ*;*

(3) *если гомеоморфизм* $U\lfloor_{d_i\Delta^k\times\{0\}}$ *призматичен относительно* $\alpha(Q)\lfloor_{d_i\Delta^k\times\{0\}}$*, то и его “продолжение на стенку ведра”* $U\lfloor_{d_i\Delta^k\times I}$ *призматично относительно* $\alpha(Q)\lfloor_{d_i\Delta^k\times I}$.

Утверждается, что в данной ситуации найдутся

- OPL*-топология Александрова* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *на* $\Delta^k \times \{1\}$;
- *морфизм* $(\Delta^k \times \{1\}, \widetilde{\mathcal{T}}) \xrightarrow{\widetilde{\xi}} \mathbf{D}_c^\infty(K)$;
- *набор послойных гомеоморфизмов* $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_m, \widetilde{U} \in \mathrm{PL}_{\Delta^k \times I}(X)$,

такие, что

(1) $\widetilde{\mathcal{T}}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\}} = \mathcal{T}$, $\widetilde{\xi}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\}} = \xi$;

(2) $\widetilde{G}_i\lfloor_{\underline{\Gamma}^k} = G_i$, $i = 1, \dots, m$, $\widetilde{U}\lfloor_{\underline{\Gamma}^k} = U$;

(3) $\widetilde{G}_i\lfloor_{\Delta^k \times \{1\}}$, $i = 1, \dots, m$, *и* $\widetilde{U}\lfloor_{\Delta^k \times \{1\}}$ *призматичны относительно* $\widetilde{\xi}$;

(4) $\widetilde{G}_i$, $i = 1, \dots, m$, *призматичны относительно* $\alpha(Q)$, *и в том случае, когда* $U\lfloor_{\Delta^k \times \{0\}}$ *призматичен относительно* Q, *его продолжение* $\widetilde{U}$ *можно выбрать* $\alpha(Q)$*-призматическим.*

Доказательство. Заполнение $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{G_i}$, $i = 1, \dots, m$, $\widetilde{U}$ ведра мы составляем из трех кусков (см. рис. 16), последний и главный из которых мы получаем применением леммы 12, а два предыдущих нужны для подгонки наших исходных данных к форме, приемлемой для применения леммы 12.

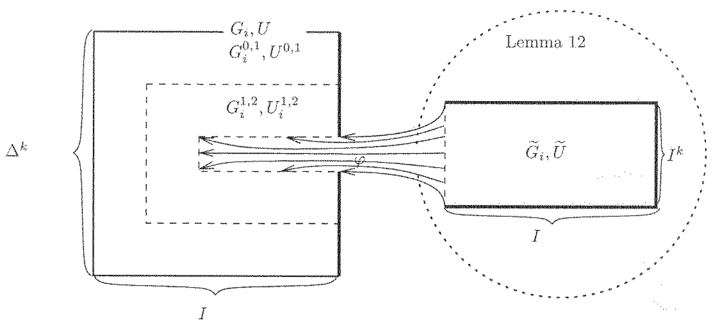


Рис. 16.

1. Данные, необходимые нам для склейки заполнения ведра, таковы:

- фиксированный гомеоморфизм куба на симплекс $I^k \xrightarrow{\varphi} \Delta^k$;

- $G_i^{j,j+1} \in \mathrm{PL}_{\Gamma^k \times I}(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1$; $U^j \in \mathrm{PL}_{\Delta^k \times I}$, $j = 0, 1$;
- $\widehat{G}_i \in \mathrm{PL}_{I^k \times I}(X)$, $i = 1, \ldots, m$; $\widehat{U} \in \mathrm{PL}_{I^k \times I}(X)$;
- топологии $\mathcal{T}^{j,j+1}$ на $\partial\Delta^k \times I$ и топология $\widehat{\mathcal{T}}$ на "верхнем кубическом ведре" $\overline{\Xi}^k = \partial I^k \times I \cup I^k \times \{1\}$;
- морфизмы $(\partial\Delta^k \times I, \mathcal{T}^{j,j+1} \stackrel{\xi^{j,j+1}}{\rightarrow} \mathbf{D}_c^\infty(K))$ при $j = 0, 1$ и морфизм $(\overline{\Xi}^k, \widehat{\mathcal{T}}) \stackrel{\widehat{\xi}}{\rightarrow} \mathbf{D}_c^\infty(K))$.

Пусть выполнены следующие условия:

(a) $G_i^{0,1}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{0\}} = G_i$, $i = 1, \ldots, m$; $U^{0,1}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{0\}} = U$; $\xi^{0,1}\lfloor \partial\Delta \times \{0\} = \xi$;

(a1) $G_i^{0,1}$, $i = 1, \ldots, m$, призматичны относительно δ_{Q_k}; $U^{0,1}$ призматичен относительно δ_{Q_k}, если U призматичен относительно $\alpha(Q)$;

(a2) $G_i^{0,1}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\} \times I}$ и $U_i^{0,1}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\} \times I}$ призматичны относительно $\xi^{0,1}$;

(b) $G_i^{1,2}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{0\}} = G_i^{0,1}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{1\}} = G_i^1$, $i = 1, \ldots, m$; $U^{1,2}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{0\}} = U^{0,1}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{1\}} = U^1$; $\xi^{1,2}\lfloor \partial\Delta \times \{0\} = \xi^{0,1}\lfloor \partial\Delta \times \{1\}$;

(b1) $G_i^{1,2}, i = 1, \ldots, m$ – δ_{Q_k}-призматичны; $U^{1,2}$ – δ_{Q_k}-призматичен, если $U^{0,1}\lfloor_{\Gamma^k \times \{1\}}$ – δ_{Q_k}-призматичен;

(b2) $G_i^{1,2}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\} \times I}$ и $U_i^{1,2}\lfloor_{\partial\Delta^k \times \{1\} \times I}$ – $\xi^{1,2}$-призматичны;

(c) $\widehat{G}_i\lfloor_{I^k \times \{0\}} = (G^{1,2}\lfloor_{\Gamma^k \times \{1\}})\lfloor_\varphi = G_i^2$, $i = 1, \ldots, m$; $\widehat{U}\lfloor_{I^k \times \{0\}} = (U^{1,2}\lfloor_{\overline{\Gamma}^k \times \{1\}})\lfloor_\varphi = U^2$; $\widehat{\xi}\lfloor_{I^k \times \{0\}} = (\xi^{1,2}\lfloor_{\Gamma^k \times \{1\}})\lfloor_\varphi$;

(c1) $\widehat{G}_i$, $i = 1, \ldots, k$ призматичны относительно δ_{Q_k}; $\widehat{U}$ призматичен относительно δ_{Q_k}, если $\widehat{U}\lfloor_{I^k \times \{0\}}$ призматичен относительно δ_{Q_k};

(c2) $\widehat{G}_i\lfloor_{\overline{\Xi}^k}$, $i = 1, \ldots, k$, $\widehat{U}\lfloor_{\overline{\Xi}^k}$ призматичны относительно $\widehat{\xi}$.

Если у нас есть данные, удовлетворяющие вышеприведенным условиям, то мы склеиваем кусочно-линейный $(k+1)$-мерный шар

P как копредел диаграммы сплошных стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & P & & \\
\Gamma^k\times I \arrow[urr, dashed] & & \Gamma^k\times I \arrow[u, dashed] & & I^k\times I \arrow[ull, dashed] \\
 & \Gamma^k \arrow[ul, "\mathrm{id}\times\{1\}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\times\{0\}"'] & & I^k \arrow[ul, "\varphi\times\{1\}"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}\times\{0\}"'] &
\end{tikzcd}$$

Граница шара P составлена из двух k-мерных шаров Γ^k и S

$$\begin{tikzcd}
 & & S & & \\
\partial\Delta^k\times I \arrow[urr, dashed] & & \partial\Delta^k\times I \arrow[u, dashed] & & \Xi^k \arrow[ull, dashed] \\
 & \partial\Delta^k \arrow[ul, "\mathrm{id}\times\{1\}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\times\{0\}"'] & & \partial I^k \arrow[ul, "\varphi\times\{1\}"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}\times\{0\}"'] &
\end{tikzcd} \tag{59}$$

Далее мы определяем $\widetilde{G}'_i$, $\widetilde{U}'\in \mathrm{PL}_P(X)$ как склейки (см. §7.1.1):

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{G}'_i, \widetilde{U}' & & \\
G_i^{0,1}, U^{0,1} \arrow[urr, dashed] & & G_i^{1,2}, U^{1,2} \arrow[u, dashed] & & \widehat{G}_i, \widehat{U} \arrow[ull, dashed] \\
 & G_i^1, U^1 \arrow[ul, "\lfloor_{\mathrm{id}\times\{1\}}"] \arrow[ur, "\lfloor_{\mathrm{id}\times\{0\}}"'] & & G_i^2, U^2 \arrow[ul, "\lfloor_{\varphi\times\{1\}}"'] \arrow[ur, "\lfloor_{\mathrm{id}\times\{0\}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Определяем топологию $\widetilde{\mathcal{T}}'$ на шаре S и морфизм $(S,\widetilde{\mathcal{T}}')\xrightarrow{\widetilde{\xi}'}\mathbf{D}^\infty_c(K)$ как естественную склейку топологий $\mathcal{T}^{0,1}$, $\xi^{0,1}$, $\mathcal{T}^{1,2}$, $\xi^{1,2}$ и $\widehat{\mathcal{T}}$, $\widehat{\xi}$ в соответствии с диаграммой (59). Выберем произвольный гомеоморфизм $\Delta^k\times I\xrightarrow{\psi} P$, неподвижный на Γ^k и переводящий $\Delta^k\times\{1\}$ в S. Тогда, полагая $\widetilde{G}_i=\widetilde{G}'_i\lfloor_\psi$, $\widetilde{U}=\widetilde{U}'\lfloor_\psi$, $\widetilde{\mathcal{T}}=\widetilde{\mathcal{T}}'\lfloor_\psi$ и $\widetilde{\xi}=\widetilde{\xi}'\lfloor_\psi$, мы получим требуемые леммой данные, удовлетворяющие условиям (1)–(4) в силу справедливости условий (a) … (c2) для ингредиентов склейки.

2. Теперь мы предъявим все требуемые п. 1 доказательства ингредиенты.

2.A. Положим $G_i^{0,1} = G_i \times \mathrm{id}$, $U^{0,1} = U \times \mathrm{id} \in \mathrm{PL}\,(X)_{\Gamma^k \times I}$. Построим плотную топологию Александрова $\mathcal{T}^1$ на $\partial\Delta^k$, усиливающую топологию $\mathcal{T}$. Такое усиление всегда существует по предложению 23. Пусть $(\partial\Delta^k, \mathcal{T}^1) \xrightarrow{w} (\partial\Delta^k, \mathcal{T})$ – морфизм ослабления. Обозначим через $I \xrightarrow{\mathrm{inv}} I$ линейный гомеоморфизм $\mathrm{inv}(t) = -t+1$, меняющий ориентацию отрезка на обратную: $\mathrm{inv}(0) = 1$, $\mathrm{inv}(1) = 0$. По предложению 31 построим топологию $\overline{\mathrm{Cyl}}_w$ на $\partial\Delta^k \times I$ и положим $\mathcal{T}^{0,1} = \overline{\mathrm{Cyl}}_w\lfloor_{\mathrm{inv}}$ (т.е. переменим ориентацию параметра в конструкции предложения 31). Положим $\xi^1 = \xi \circ w$ и $\xi^{0,1} = \overline{\mathrm{Cyl}}_w(\xi^1 \circ w, \xi)\lfloor_{\mathrm{inv}}$. В этом случае, пользуясь утверждением предложения 31, мы получаем для $G_i^{0,1}, U^{0,1}, \xi^{0,1}$ справедливость утверждений (a), (a1), (a2).

2.B. Положим $G_i^{1,2} = G_i \times \mathrm{id}$, $U^{1,2} = U \times \mathrm{id} \in \mathrm{PL}\,(X)_{\Gamma^k \times I}$. Топология $\mathcal{T}^1\lfloor_\varphi$ есть OPL-топология на ∂I^k. По лемме Лебега [14] найдется такое натуральное число M, что база топологии $\mathcal{A}^c(\partial\frac{1}{M}[I^k])$ окажется вписана в базу топологии $\mathcal{T}^1\lfloor_\varphi$. Значит, и $\mathfrak{B}(A^c(\partial\frac{1}{M}[I^k])\lfloor_{\varphi^{-1}})$ вписана в $\mathfrak{B}(\mathcal{T}^1)$. Поскольку топология $\mathcal{T}^1$ плотна, по предложению 15 найдется морфизм $\mathfrak{B}(A^c(\partial\frac{1}{M}[I^k])\lfloor_{\varphi^{-1}}) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{B}(\mathcal{T}^1)$, такой, что

$$\forall U \in \mathfrak{B}(A^c(\partial\frac{1}{M}[I^k])\lfloor_{\varphi^{-1}}) : \; U \subset \phi(U).$$

Полагаем $\mathcal{T}^2 = A^c(\partial\frac{1}{M}[I^k])\lfloor_{\varphi^{-1}}$, $\xi^{\cdot} = \xi'^1 \circ \phi \circ o$, $\mathcal{T}^{1,2} = \widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi\lfloor_{\mathrm{inv}}$ и $\xi^{1,2} = \widetilde{\mathrm{Cyl}}_\phi(\xi^1, \xi^{\cdot})\lfloor_{\mathrm{inv}}$ (см. предложение 33). В этом случае по предложению 33 для $G_i^{1,2}$, $U^{1,2}$, $\xi^{1,2}$ верны условия (b), (b1) (b2).

2.C. Рассмотрим индуцированные φ гомеоморфизмы $G^2 = G_i\lfloor_\varphi$, $U^2 = U\lfloor_\varphi \in \mathrm{PL}_{I^k}$. Мы попали в условия леммы 12: гомеоморфизмы ∂G_i^2, ∂U^2 призматичны относительно

$$\partial\frac{1}{M}[I^k]^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\xi^2 = \xi^{\cdot}\lfloor_\varphi} \mathbf{D}_c^\infty(K)$$

и $(G^2)_i$ призматичен относительно $\delta_{\mathtt{Q}_k}$. Следовательно, найдется топология $\widehat{\mathcal{T}}$ на верхнем кубическом ведре $\overline{\Xi}^k$, продолжающая $\partial\mathcal{A}^c\frac{1}{M}[I^k]$, найдется морфизм $(\overline{\Xi}^k, \widehat{\mathcal{T}}) \xrightarrow{\widehat{\xi}} \mathbf{D}_c^\infty(K)$, продолжающий ξ^2, найдутся $\delta_{\mathcal{Q}_k}$-призматические гомеоморфизмы $\widehat{G}_i, \widehat{U}$, такие, что $\widehat{G}_i\lfloor_{\Xi^k}, \widehat{U}\lfloor_{\Xi^k}$ призматичны относительно $(\overline{\xi}')^2$. При этом, если U^2 был призматичен относительно $\delta_{\mathcal{Q}_k}$, то и $\widehat{U}$ призматичен относительно δ_{Q_k}.

Таким образом, для $\widehat{G}_i$, $\widehat{U}$, $\widehat{\xi}$ выполнены условия (c), (c1), (c2) первого пункта доказательства. $\square$

15.2. Доказательство леммы о совместной триангуляции семейства послойных гомеоморфизмов.

Лемма 14 **($\frown$-лемма для пары** ($\underline{\mathrm{Prism}}^m(X) \times \mathrm{PL}(X)$, $\underline{\mathrm{Prism}}^{m+1}(X)$)**).** *Пусть* $\mathtt{B}$ *– конечный симплициальный шар,* $B = |\mathtt{B}|$ *и* $\mathtt{S} = \partial\mathtt{B}$, $S = |\mathtt{S}|$.

Пусть фиксированы $G_1, \ldots, G_m$, $U \in \mathrm{PL}_Y(X)$. *Пусть* $\mathcal{Q}$ *–* $R(X)$*-раскраска* $\mathtt{Y}$, *индуцирующая раскраску* $\mathcal{Q}_{\mathtt{S}}$ *подкомплекса* $\mathtt{S}$.

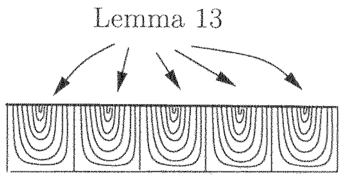
Предположим, что раскраска $\mathcal{Q}$ $\mathbf{R}(X)$*-триангулирует* $G_1, \ldots, G_m$ *и раскраска* $\mathcal{Q}_{\mathtt{S}}$ $\mathbf{R}(X)$*-триангулирует* ∂U.

В этих условиях найдется триангуляция $\mathtt{T}$ *шара* $B \times I$, *такая, что* $h^0\mathtt{T} = \mathtt{B}$, *найдется* $\mathbf{R}(X)$*-раскраска* $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *триангуляции* $\mathtt{T}$, *такая, что* $h^0\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$, *и найдутся гомеоморфизмы* $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_m, \widetilde{U}$, *такие, что* $h^0\widetilde{G}_i = G_i$, $h^0\widetilde{U} = U$, $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *триангулирует* $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_m$, $\widetilde{\mathcal{Q}}\lfloor_{T_\Lambda}$ *триангулирует* $\widetilde{U}\lfloor_\Lambda$. *Здесь* $\Lambda = S \times I \cup B \times \{1\}$ *и* $\mathtt{T}_\Lambda$ *– индуцированная триангуляция ведра* Λ.

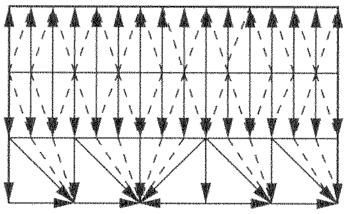
Доказательство. 1. Зафиксируем $\mathtt{K} \trianglelefteq \mathcal{Q}$. Рассмотрим клеточный комплекс $\Xi = \mathtt{B} \times [I]$ и построим морфизм $(|\Xi|, \mathcal{A}(\Xi)) \xrightarrow{\mathcal{Q}'} \mathbf{R}(X)$, $\mathcal{Q}' = \mathrm{Max}\mathcal{Q} \circ \pi_1$. Мы построим гомеоморфизмы $G'_1, \ldots, G'_m$, $U' \in \mathrm{PL}_{|\Xi|}$, OPL-топологию $\mathcal{T}$ на $B \times \{1\}$, морфизм $(B, \mathcal{T}) \xrightarrow{\xi'} \mathbf{D}^\infty_c(K)$, такие, что $G'_1, \ldots, G'_m$, U' продолжают $G_1, \ldots, G_m$; $G'_1, \ldots, G'_m$ призматичны относительно $\mathcal{Q}'$; $U'\lfloor_{S\times I}$ призматичен относительно $\mathcal{Q}'_{\mathtt{S}\times I}$; $h_1G'_i, h_1U'$ призматичны относительно ξ.

2. Для этого мы рассмотрим ведерные подкомплексы $\underline{\Xi}_i = B_i \cup B_{i-1} \times I$, $\overline{\Xi}_i = B_i \cup B_i \times I$ комплекса Ξ, где через B_i обозначен i-скелет. Будем строить G'_i, ξ_i индукцией по ведерным подкомплексам. На $\overline{\Xi}_0$ построение тривиально Далее мы заполняем ведра $\underline{\Xi}_1$, пользуясь леммой 13, получаем нужную структуру на $\overline{\Xi}_1$

и так далее достраиваем заявленные в п. 1 данные:



3. В результате п. 1, 2 мы оказываемся на $h^1|\Xi|$ в точности в ситуации леммы 8. Следовательно, найдется триангуляция $\mathtt{v} \trianglelefteq h_\Xi$, такая, что согласованная с ней общая триангуляция гомеоморфизмов $\mathcal{V}$ допускает подклейку конструкции леммы 8. Для завершения доказательства остается по предложению 34 продолжить триангуляцию $\mathcal{V}$ до триангуляции $G_1', \ldots, G_m'$, U', не меняющей триангуляции $\mathcal{Q}$.



$\square$

16. Случай комбинаторных многообразий. Теорема B

Доказательство теоремы B состоит в том, что все наши рассуждения остаются справедливы при замене посета $\mathbf{R}(X)$ на $\mathbf{T}(X)$ и $\mathfrak{R}(X)$ на $\mathbf{T}(X)$, за исключением одного единственного места – вместо леммы 6 мы должны в п. 3) доказательства леммы 8 сослаться на лемму 7. То есть мы должны использовать процедуру вписывания малых шаров в комбинаторные многообразия, которая чуть сложнее процедуры вписывания малых шаров в шаровые комплексы.

17. Комбинаторная модель PL_n-расслоений, касательного расслоения комбинаторного многообразия и отображения Гаусса

Традиционно, вслед за препринтом Милнора [22], группа PL_n определяется как симплициальная группа ростков PL-гомеоморфизмов тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$ в окрестности нулевого сечения. В этом параграфе мы пользуемся теорией моделей PL_n-расслоений Куипера–Лашофа [15, 16]. Обозначим через $\mathrm{PL}((\mathbb{R}^n,0))$ симплициальную группу PL-гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, сохраняющих неподвижным начало координат. Через $\mathrm{PL}(S^n,0,\infty)$ обозначим симплициальную группу PL-гомеоморфизмов сферы S^n, сохраняющих неподвижными две разные точки 0 и ∞. Через $\mathrm{PL}(S^n,\infty)$ мы обозначаем симплициальную группу PL-гомеоморфизмов сферы S^n, сохраняющих неподвижной точку ∞. В работе [16, лемма 1.6 на с. 248 и лемма 1.8 на с. 249] доказывается, что в цепочке разнонаправленных естественных гомоморфизмов симплициальных групп

$$\mathrm{PL}((\mathbb{R}^n,0)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{PL}_n \xleftarrow{\beta} \mathrm{PL}(S^n,0,\infty) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{PL}((S^n,\infty)) \qquad (60)$$

все гомеоморфизмы – симплициальные гомотопические эквивалентности. В формуле (60) гомоморфизм α посылает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n,0)$ в его росток в начале координат, β посылает гомеоморфизм $(S^n,0,\infty)$ в его росток в точке 0 и γ – вложение. Рассматриваемые как симплициальные группы автоморфизмов, группы $\mathrm{PL}((\mathbb{R}^n,0))$, $\mathrm{PL}(S^n,0,\infty)$, $PL((S^n,\infty))$ являются структурными группами кусочно-линейных расслоений Стинрода с отмеченными сечениями. Группе $\mathrm{PL}(\mathbb{R}^n,0)$ отвечают расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$ и нулевым сечением, группе $PL((S^n,\infty))$ отвечают расслоения со слоем S^n и отмеченным ∞-сечением, и группе $\mathrm{PL}((S^n,\infty))$ отвечают расслоения со слоем S^n и парой не имеющих общих точек сечений 0 и ∞. Группе PL_n естественно отвечают ростки $\mathbb{R}^n$ расслоений в окрестности нулевого сечения. Цепочка симплициальных гомотопических эквивалентностей (60) порождает цепь гомотопических эквивалентностей классифицирующих пространств

$$B\mathrm{PL}((\mathbb{R}^n,0)) \approx B\mathrm{PL}_n \approx \mathrm{PL}(S^n,0,\infty) \approx B\mathrm{PL}((S^n,\infty)) \qquad (61)$$

и, соответственно, следующую теорему.

Теорема 3 (теорема Куипера–Лашофа о моделях PL_n-расслоений). *Существует функториальное взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма* PL*-микрорасслоений и следующими классами изоморфизма* PL*-расслоений Стинрода:*

1) *со слоем $\mathbb{R}^n$ и нулевым сечением,*

2) *со слоем* S^n *и отмеченным сечением,*

3) *со слоем* S^n *и двумя различными во всех точках отмеченными сечениями.*

17.1. Доказательство теоремы С. В силу теории Куипера–Лашофа нам достаточно доказать, что

$$B\mathfrak{R}_n \approx B\mathrm{PL}\,(S^n, \infty). \tag{62}$$

Мы укажем, какие поправки следует внести в наши построения, чтобы получить доказательство утверждения (62).

Рассмотрим n-мерную PL-сферу S^n с раз и навсегда зафиксированной точкой ∞. Рассмотрим подпосет $\mathbf{R}_n$ посета $\mathbf{R}(S^n)$ (§2.6), образованный шаровыми комплексами, содержащими ∞ во внутренности некоторой максимальной клетки. Эту клетку мы называем отмеченной. Рассмотрим функтор $\mathbf{R}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathfrak{R}_n$, посылающий шар с точкой ∞ внутри в отмеченный шар. Рассмотрим m-симплекс

$$\mathtt{Q} = \mathtt{Q}_0 \trianglelefteq \mathtt{Q}_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \mathtt{Q}_n$$

симплициального множества $\mathcal{N}\mathbf{R}(X)$. Построим (§3.1) структуру клеточного расслоения $\mathtt{T}(\mathtt{Q}) \xrightarrow{\mathtt{e}(\mathtt{Q})} [\Delta^m]$ на тривиальном расслоении $S^n \times \Delta^m \xrightarrow{\pi_2} \Delta^m$ и дополнительно отметим постоянное сечение $\infty_m = \infty \times \Delta^m$. Обозначим через $\mathtt{e}^{\infty}(\mathtt{Q})$ пару $\langle \mathtt{e}(\mathtt{Q}), \infty_m \rangle$. Существует одна максимальная “отмеченная” призма $\mathtt{T}(\mathtt{Q})$, содержащая сечение ∞_m. Естественно определен (§3.2.2) $\mathtt{Q}$-призматический гомеоморфизм $G \in \mathrm{PL}\,(S^n, \infty)$. По построению $\mathtt{Q}$-призматический гомеоморфизм неподвижен на сечении ∞_m и переводит отмеченную призму в отмеченную призму. Возникает группоид $\mathrm{Prism}(S^n, \infty)$ призматических гомеоморфизмов, являющийся подгруппоидом $\mathrm{Prism}(S^n)$ (§3.2.3). Для $\mathrm{Prism}(S^n, \infty)$-гомеоморфизмов верна лемма 3 о продолжении, с тем замечанием, что параметрический трюк Александера можно заставить уважать одно отмеченное сечение (что эквивалентно тому, что $\mathrm{PL}\,(D^n, 0, \partial)$ стягиваемо [16, лемма 1.4, с. 248]). Такой версии леммы 3 достаточно для того, чтобы были верны все рассуждения §§3.3–3.7 и §4 о $\mathcal{W}$-конструкции для $\mathrm{Prism}(S^n, \infty)$ и $\mathrm{PL}\,(S^n, \infty)$. Тем самым, доказательство эквивалентности (62) сводится к следующей редакции геометрической леммы 5:

геометрическая реализация естественного вложения симплициальных множеств

$$\underline{\mathrm{Prism}}^N(S^n,\infty) \xrightarrow{j} \underline{\mathrm{Prism}}^{N-1}(S^n,\infty) \times \mathrm{PL}\,(S^n,\infty)$$

является гомотопической эквивалентностью.

Эта лемма автоматически доказывается последующей конструкцией фрагментации и хирургии, поскольку схема фрагментации послойного гомеоморфизма с помощью графиков Хадсона §§8–14 и вся хирургия обобщенных призматических гомеоморфизмов §6 автоматически сохраняют любое постоянное сечение. Следует сделать два замечания о возникающем выборе триангуляций. В лемме 12 следует позаботиться о том, чтобы триангуляция $\mathtt{K} \trianglelefteq \mathtt{Q} \in \mathbf{R}(S^n,\infty)$ содержала в качестве вершины отмеченную точку ∞. Тогда в порожденной фрагментации в конфигурациях малых замкнутых шаров §13 будут возникать либо шары, содержащие точку ∞ во внутренности, либо ее не задевающие. Поэтому конструкция леммы 6 "о функториальном вписывании дизъюнктных конфигураций шаров в шаровые комплексы" не выведет нас из $\mathbf{R}_n$ при соблюдении еще одного условия: все общие триангуляции, возникающие в доказательстве леммы 6, следует проводить в $\mathbf{R}_n$, что всегда возможно.

17.2. Теорема D.

17.2.1. Касательное микрорасслоение Милнора. Традиционно, касательное расслоение кусочно-линейного многообразия M^n определяется как касательное микрорасслоение [22]. Касательное микрорасслоение строится следующим образом.

Рассмотрим квадрат многообразия $M^n \times M^n$, его проекцию $M^n \times M \xrightarrow{t} M^n$ на первый аргумент и диагональное сечение $M \xrightarrow{0_t} M^n \times M^n : 0_t(x) = (x,x)$. Росток расслоения t в окрестности сечения 0_t называют касательным микрорасслоением многообразия M^n. В соответствии с теорией Куипера–Лашофа на M^n найдется единственное с точностью до изоморфизма $(S^n,0,\infty)$-расслоение $t_M^{0,\infty}$ такое, что его росток в окрестности нулевого сечения изоморфен касательному микрорасслоению t. Расслоение $t_M^{0,\infty}$ мы будем назвать касательным $(S^n,0,\infty)$-расслоением M^n. В свою очередь, касательному $(S^n,0,\infty)$-расслоению отвечает единственное с точностью до изоморфизма (S^n,∞)-расслоение

t_M^∞, получающееся забыванием 0-сечения. Такое расслоение мы будем называть касательным (S^n,∞)-расслоением M^n. Эти соответствия – взаимно однозначные соответствия классов изоморфизма расслоений. Это означает, что отображения Гаусса

$$M^n \xrightarrow{G} B\mathrm{PL}_n, \quad M^n \xrightarrow{G^{0,\infty}} B\mathrm{PL}\,(S^n,0,\infty), \quad M^n \xrightarrow{G^\infty} B\mathrm{PL}\,(S^n,\infty)$$

касательных расслоений t_M, $t_M^{0,\infty}$, t_M^∞ совпадают с точностью до гомотопии при отождествлении (61).

17.2.2. Доказательство теоремы D. По переформулировке (62) теоремы C имеет место гомотопическая эквивалентность $B\mathfrak{R}_n \approx B\mathrm{PL}\,(S^n\infty)$. Следовательно, для всякой $\mathfrak{R}_n$-раскраски $\mathcal{Q}$ локально упорядоченного симплициального комплекса K (см. §4.2) верно, что $|K| \xrightarrow{|\mathcal{Q}|} B\mathfrak{R}_n$ есть отображение Гаусса для (S^n,∞)-расслоения $\mathsf{e}^\infty(\mathcal{Q})$, где $\mathsf{e}^\infty(\mathcal{Q})$ склеено из призматических тривиализаций e^∞ над симплексами K (§17.1) с помощью индуцированных раскраской призматических гомеоморфизмов (§3.4.2).

Теперь для того, чтобы доказать теорему D, нам достаточно ассоциировать с функтором $\mathbf{G}$ $(S^n,0,\infty)$ расслоение $e^{0,\infty}(G)$, такое, что

1) забывание 0-сечения $e^{0,\infty}(G)$ доставит расслоение $\mathsf{e}^\infty(\mathbf{G})$;

2) росток $e^{0,\infty}(\mathbf{G})$ в окрестности нулевого сечения изоморфен t_M.

Это достигается очевидным выбором специальных ассоциированных с диагональной конструкцией Милнора призматических тривиализации при построении $\mathsf{e}^\infty(\mathbf{G})$.

Литература

1. D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Wlodarczyk, *Torification and factorization of birational maps.* — J. Amer. Math. Soc. **15**, No. 3 (2002), 531–572.
2. J. W. Alexander, *The combinatorial theory of complexes.* — Ann. Math. (2) **31**, No. 2 (1930), 292–320.
3. P. S. Alexandroff, *Discrete Räume.* — Mat. Sb. (N.S.) **2** (1937), 501–518.
4. L. Anderson, N. Mnev, *Triangulations of manifolds and combinatorial bundle theory: an announcement.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **267** (2000), 46–52.
5. F. G. Arenas, *Alexandroff spaces.* — Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **68**, No. 1 (1999), 17–25.
6. D. K. Biss, *The homotopy type of the matroid Grassmannian.* — Ann. Math. (2) **158**, No. 3 (2003), 929–952.
7. A. Björner, *Posets, regular CW complexes and Bruhat order.* — European J. Combin. **5**, No. 1 (1984), 7–16.

8. E. H. Brown, Jr., *Cohomology theories.* — Ann. Math. (2) **75** (1962), 467–484.
9. M. M. Cohen, *Simplicial structures and transverse cellularity.* — Ann. Math. (2) **85** (1967), 218–245.
10. G. P. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory.* Progress in Math., Vol. **174**. Birkhäuser Verlag, Basel (1999).
11. A. E. Hatcher, *Higher simple homotopy theory.* — Ann. Math. (2) **102**, No. 1 (1975), 101–137.
12. A. Heller, *Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes.* — Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 299–344.
13. J. F. P. Hudson, *Piecewise Linear Topology.* W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam (1969).
14. Дж. Келли, *Общая топология.* М.: Наука (1968).
15. N. H. Kuiper, R. K. Lashof, *Microbundles and bundles.* I. *Elementary theory.* — Invent. Math. **1** (1966), 1–17.
16. N. H. Kuiper, R. K. Lashof, *Microbundles and bundles.* II. *Semisimplical theory.* — Invent. Math. **1** (1966), 243–259.
17. N. Levitt, *Grassmannians and Gauss Maps in Piecewise-Linear Topology.* Lect. Notes Math., Vol. 1366. Springer-Verlag, Berlin (1989).
18. A. Lundell, S. Weingram, *The Topology of CW-Complexes.* Van Nostrand Reinhold, New York (1969).
19. J. P. May, *Classifying Spaces and Fibrations.* Mem. Amer. Math. Soc. **155** (1975).
20. M. C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.* — Duke Math. J. **33** (1966), 465–474.
21. D. McDuff, *On the classifying spaces of discrete monoids.* — Topology **18**, No. 4 (1979), 313–320.
22. J. Milnor, *Microbundles and Differential Structures* (mimeographed notes). Princeton University, September 1961.
23. R. Morelli, *The birational geometry of toric varieties.* — J. Algebraic Geom. **5**, No. 4 (1996), 751–782.
24. N. E. Mnëv, G. M. Ziegler, *Combinatorial models for the finite-dimensional Grassmannians.* — Discrete Comput. Geom. **10**, No. 3 (1993), 241–250.
25. D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group.* — Adv. Math. **28**, No. 2 (1978), 101–128.
26. C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Δ-sets.* I. *Homotopy theory.* — Quart. J. Math. **22** (1971), 321–338.
27. C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology.* Springer-Verlag, New York (1972).
28. M. Steinberger, *The classification of PL fibrations.* — Michigan Math. J. **33**, No. 1 (1986), 11–26.
29. J. H. C. Whietehead, *Simplicial spaces, nuclei and m-groups.* — Proc. London Math. Soc. **45** (1939), 243–327.
30. E. C. Zeeman, *Seminar on Combinatorial Topology* (mimeographed notes). I.H.E.S., Paris (1963).
31. E. C. Zeeman, *Relative simplicial approximation.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964), 39–43.

Mnev N. E. Combinatorial PL fiber bundles and fragmentation of a fiberwise homeomorphism.

Among other things, we prove that for any compact PL-manifold X there is a homotopy equivalence $BPL(X) \approx BT(X)$, where $T(X)$ is the category of abstract aggregations of triangulations of X. As a result, we get a functorial pure combinatorial models for PL fiber bundles. Special attention is paid to the case $X = \mathbb{R}^n$ and the combinatorial model of the Gauss map of a combinatorial manifold. The key trick which makes the proof possible is a collection of lemmas describing the fragmentation of a fiberwise homeomorphism.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: mnev@pdmi.ras.ru

Поступило 2 мая 2007 г.