Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 344, 2007 г.

М. В. Карев

ГОМОЛОГИИ ФЛОЕРА ДЛЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ С ТРИВИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

1. Введение

Гомологии Хегора–Флоера [6] родились как инвариант 3-многообразий, определенный через подсчет голоморфных дисков и диаграммы Хегора. В работах [7] и [8] был сконструирован аналог этого инварианта для гомологичных нулю узлов в замкнутом ориентированном 3-многообразии. Впоследствии ([4]) был найден замечательный способ подсчета этого инварианта для узлов в 3-сфере комбинаторными методами. Этот подход был развит в работе [5].

Пусть L – некоторое зацепление в 3-сфере, а $L^{\bigcirc}$ – его *расширение*, то есть зацепление, получаемое из L добавлением одной незаузленной компоненты, незацепленной со всеми остальными. Целью этой заметки является выражение гомологий Флоера расширенного зацепления $L^{\bigcirc}$ через гомологии Флоера зацепления L.

До сих пор неизвестно, обладают ли гомологии Флоера свойством функториальности, то есть верно ли, что гладкий кобордизм между зацеплениями индуцирует морфизм их гомологий Флоера, определяемый лишь изотопическим типом этого кобордизма. Несложно понять, что существует гладкий кобордизм между зацеплением и им же, но с добавленной незаузленной и незацепленной компонентой, состоящий в "рождении" полусферы. Проделанное нами вычисление, как мы надеемся, поможет пролить свет на вопрос об их функториальности.

Автор выражает глубокую благодарность С. В. Дужину за полезные дискуссии и замечания по тексту.

2. Определения

Для начала напомним определение гомологий Флоера с коэф-

Работа выполнена при частичной поддержке грантов НШ-8065.2006.2 и РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛ_а.

фициентами в поле $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ из статьи [5]. В ней можно найти и доказательства всех сформулированных в этой части утверждений.

Плоской решеточной диаграммой G называется лежащая на плоскости квадратная решетка из $n \times n$ ячеек, в которых расставлены крестики (X) и нолики (O) таким образом, что каждая строка и каждый столбец содержат ровно одну ячейку с меткой X и ровно одну ячейку с меткой O. Множество всех меток типа O мы будем обозначать через $\mathbb{O}$, а множество всех меток типа X – через $\mathbb{X}$. Пронумеруем как-нибудь элементы этих множеств: $\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^n, \mathbb{X} = \{X_i\}_{i=1}^n$.

Плоская решеточная диаграмма располагается на плоскости таким образом, что ее нижний левый угол находится в начале координат, стороны ее параллельны координатным осям, а каждая ячейка представляет собой квадратик 1×1. По диаграмме можно построить ориентированную плоскую диаграмму зацепления L, проводя горизонтальные дуги от O к X в каждой строке и вертикальные дуги от X к O в каждом столбце. Для каждой точки пересечения дуг мы будем предполагать, что вертикальная проходит над горизонтальной. Будем говорить, что плоская решеточная диаграмма G задает *решеточное представление* ориентированного зацепления L.

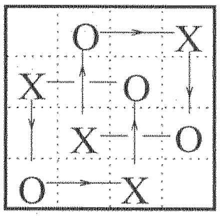

Рис. 1. Решеточное представление для зацепления Хопфа.

Любое ориентированное зацепление в S^3 допускает решеточное представление. Имеет место следующая теорема ([2, 3]):

Теорема 1. *Две решеточные диаграммы представляют один и тот же изотопический тип ориентированного зацепления L, если и только если они могут быть переведены одна в другую с помощью следующего набора элементарных движений:*

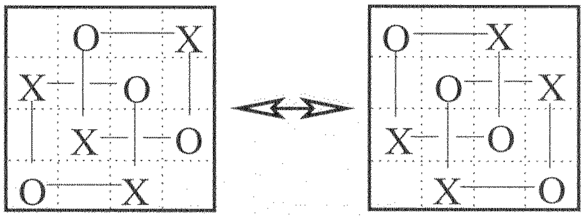

Рис. 2. Движение циклической перестановки.

- **Циклическая перестановка.** *Циклическая перестановка строк или столбцов решеточной диаграммы.*
- **Коммутация.** *Представим себе пару соседних столбцов решеточной диаграммы G, обладающих следующим свойством: вертикальная дуга между крестиком и ноликом в первом столбце и вертикальная дуга между крестиком и ноликом во втором столбце, будучи спроецированными на ось ординат, не пересекаются. Перестановка двух таких столбцов в диаграмме местами и дает нам коммутацию. Есть и аналогичное движение, когда вместо столбцов рассматриваются строки.*

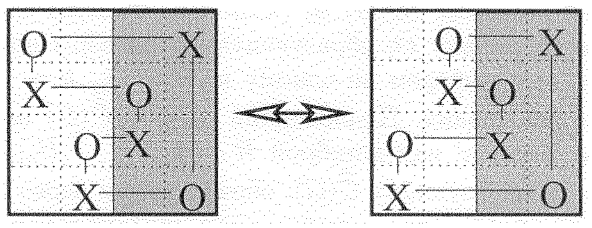

Рис. 3. Коммутация столбцов. Не меняющаяся часть диаграммы обозначена серым цветом.

- **Дестабилизация.** *Дестабилизация – это движение, которое уменьшает размер решетки на 1. Представим себе диаграмму, в которой есть столбец, где крестик и нолик расположены в соседних клетках. Тогда забывание разделительной линии между этими крестиком и ноликом и стирание этого столбца целиком даст нам дестабилизацию диаграммы. Аналогичная операция определена и для строк.*
- **Стабилизация.** *Стабилизация – это операция, обратная дестабилизации. Увеличивает размер решетки на 1.*

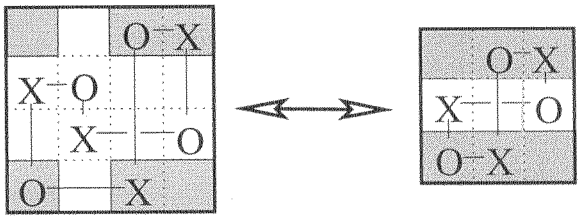

Рис. 4. Дестабилизация. Не меняющаяся часть диаграммы залита серым.

Отождествив верхний край плоской решеточной диаграммы с нижним и правый с левым, мы получим *торическую решеточную диаграмму*, которую мы тоже обозначим через G.

С полученной торической решеточной диаграммой G мы ассоциируем цепной комплекс $(\widehat{C}(G), \widehat{\partial})$ (*комплекс Флоера*) следующим образом. Сопоставим нолику O_i образующую U_i алгебры полиномов $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$. После чего выберем по одному нолику O_{i_k}, $k = 1, \dots, l$, в каждой компоненте зацепления. Подлежащий модуль $\widehat{C}(G)$ является свободным модулем ранга $n!$ над алгеброй $R = \mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]/\{U_{i_1} = 0, \dots, U_{i_l} = 0\}$. Система образующих $\widehat{C}(G)$, обозначаемая через $\mathbf{S}$, состоит из взаимно однозначных соответствий между вертикальными и горизонтальными окружностями, образующими решетку. Графически каждую образующую можно изображать в виде набора из n узлов решетки, обладающего тем свойством, что каждая горизонтальная и каждая вертикальная окружность содержат ровно одну точку.

На множестве образующих введена *масловская градуировка*, задаваемая по следующему правилу.

Пусть A и B – два конечных набора точек на плоскости. Обозначим через $\mathcal{I}(A, B)$ количество таких пар $a = (a_1, a_2) \in A$, $b = (b_1, b_2) \in B$, что $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$. Рассмотрим развертку для тора, разрезанного вдоль некоторой горизонтальной и некоторой вертикальной окружности, содержащую левый и нижний края. Образующая $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ и множество $\mathbb{O}$ могут быть представлены как набор точек в фундаментальной области. Определим масловскую градуировку как

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbb{O}) - \mathcal{I}(\mathbb{O}, \mathbf{x}) + \mathcal{I}(\mathbb{O}, \mathbb{O}) + 1.$$

Предложение 1. *Значение масловской градуировки M на образующей $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ не зависит от того, по каким именно окружностям мы разрезаем тор.*

Кроме того, на образующих также введена *александеровская (мульти)градуировка*, принимающая значения в группе $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^l$, где l обозначает число компонент рассматриваемого ориентированного зацепления; она определяется так.

Снова разрежем диаграмму вдоль каких-нибудь вертикальной и горизонтальной окружности и представим себе образующую $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ в виде набора точек в развертке тора. Билинейно продолжим функцию $\mathcal{I}(A, B)$ на формальные линейные комбинации наборов точек на плоскости. Положим $\mathcal{J}(A, B) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}(A, B) + \mathcal{I}(B, A))$. Будем считать, что каждый элемент множеств $\mathbb{X}_i \subset \mathbb{X}$ и $\mathbb{O}_i \subset \mathbb{O}$, составляющих i-ю компоненту зацепления, расположен в точке плоскости с полуцелыми координатами. Тогда александеровская мультиградуировка задается формулой

$$A_i(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbb{X} + \mathbb{O}), \mathbb{X}_i - \mathbb{O}_i) - \frac{n_i - 1}{2},$$

где n_i обозначает число ноликов, входящих в i-ю компоненту.

Существует аналог предложения 1 и для александеровской градуировки.

Предложение 2. *Значение A_i на любой образующей не зависит от выбора горизонтальной и вертикальной окружностей, по которым мы разрезаем тор.*

Теперь, наконец, перейдем к определению дифференциала в $(\widehat{C}(G), \widehat{\partial})$. Назовем образующие $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}$ *соседними*, если они отличаются положением ровно двух точек. Тогда дифференциал $\widehat{\partial}\mathbf{x}$ образующей $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ будет некоторой R-линейной комбинацией образующих, соседних с $\mathbf{x}$.

Прямоугольником, соединяющим соседние образующие $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ *и* $\mathbf{y} \in \mathbf{S}$, называется ориентированный прямоугольник, вложенный в тор, ребрами которого являются отрезки горизонтальных и вертикальных окружностей, такой, что его вершины – точки $x \in \mathbf{x}$ и $y \in \mathbf{y}$, не являющиеся общими для $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Предполагается, что ориентация прямоугольника наследуется с тора, а ориентация, индуцированная на его горизонтальных ребрах, задает направление от точки из $\mathbf{x}$ к точке из $\mathbf{y}$. Множество всех прямоугольников, соединяющих образующие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ обозначается $Rect(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

(если образующие не являются соседними то мы будем предполагать, что множество $Rect(\mathbf{x},\mathbf{y})$ пусто). Требование, наложенное на ориентацию горизонтальных сторон прямоугольника, приводит к тому, что $Rect(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq Rect(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

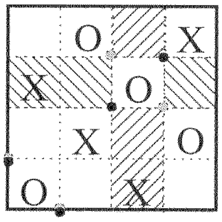

Рис. 5. Две образующие и соединяющие их прямоугольники. Начальная образующая обозначена серыми точками, конечная – черными.

Прямоугольник $r \in Rect(\mathbf{x},\mathbf{y})$ называется *пустым*, если его внутренность не содержит других точек из $\mathbf{x}$ (а следовательно, и из $\mathbf{y}$ тоже), а также крестиков и ноликов из набора $\{O_{i_k}\}$. Множество всех пустых прямоугольников, соединяющих образующие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, обозначается $Rect^{\circ}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Будем предполагать, что алгебра $R = \mathbb{F}_2[U_1,\dots,U_n]/\{U_{i_1} = 0,\dots,U_{i_l} = 0\}$ наделена масловской градуировкой, такой, что степень всех констант равна 0, а степень каждой из образующих U_j равна -2, и александеровской мультиградуировкой, определенной условиями, что уровень всех констант равен 0, а домножение на образующую U_j, отвечающую нолику O_j, составляющему i-ю компоненту зацепления, понижает i-й уровень градуировки на 1, а остальные уровни сохраняет.

Как уже было сказано, $\widehat{C}(G)$ – свободный модуль над кольцом R. Дифференциал $\widehat{\partial}$ является эндоморфизмом модуля $\widehat{C}(G)$ и определяется на образующих по следующему правилу:

$$\widehat{\partial}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}} \sum_{r\in Rect^{\circ}(\mathbf{x},\mathbf{y})} U_1^{O_1(r)}\dots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y},$$

где $O_i(r)$ принимает значение 1, если O_i лежит во внутренности прямоугольника r, и 0 в противном случае. Еще раз напомним, что прямоугольники, участвующие в определении дифференциала, не должны содержать в своей внутренности крестиков и ноликов выделенного набора $\{O_{i_k}\}$.

Предложение 3. *Эндоморфизм* $\widehat{\partial}$ *действительно является дифференциалом, то есть* $\widehat{\partial}^2 = 0$. *При этом он сохраняет уровень александеровской градуировки и понижает масловскую градуировку на 1. Гомологии комплекса* $(\widehat{C}(G), \widehat{\partial})$ *не зависят от конкретного выбора набора нoликов* $\{O_{i_k}\}$.

Нетрудно видеть, что если даны решеточная диаграмма G и диаграмма H, получаемая из G с помощью движения циклической перестановки, то соответствующие им комплексы $\widehat{C}(G)$ и $\widehat{C}(H)$ изоморфны. Верно и более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть решеточные диаграммы* G *и* H *могут быть соединены друг с другом некоторой последовательностью движений циклической перестановки, коммутации и стабилизации (дестабилизации). Тогда соответствующие им комплексы* $\widehat{C}(G)$ *и* $\widehat{C}(H)$ *квазиизоморфны, а гомологии их являются конечномерными градуированным* $\mathbb{F}_2$*-модулями. Таким образом, гомологии комплекса Флоера являются инвариантом зацепления.*

Вычисление гомологий $\widehat{C}(G)$ можно упростить, если ввести в рассмотрение еще один комплекс, тесно с ним связанный. *Абсолютно пустым прямоугольником*, соединяющим образующие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbf{S}$, назовем пустой прямоугольник, соединяющий эти образующие, вообще не содержащий нoликов в своей внутренности. Множество всех абсолютно пустых прямоугольников, соединяющих образующие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, обозначается $Rect^{\circ\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Обозначим через $(\widetilde{C}(G), \widetilde{\partial})$ комплекс, порожденный множеством образующих $\mathbf{S}$ над $\mathbb{F}_2$, с дифференциалом, определенным по правилу

$$\widetilde{\partial}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} \sum_{r \in Rect^{\circ\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \mathbf{y}.$$

Пусть V_i, где $i = 1, \dots, l$, обозначает двумерное мультиградуированное пространство над полем $\mathbb{F}_2$. Это пространство порождено двумя элементами: один из них имеет масловскую градуировку и все компоненты александеровской градуировки равные нулю, а второй имеет -1 в масловской градуировке и в i-й компоненте александеровской градуировки и ноль во всех остальных компонентах. Обозначим гомологии комплекса $\widehat{C}(G)$ через $\widehat{H}(G)$, а гомологии комплекса $\widetilde{C}(G)$ через $\widetilde{H}(G)$. Оказывается, гомологии $\widehat{H}(G)$ и $\widetilde{H}(G)$ отличаются друг от друга тензорным домножением на некоторое количество пространств V_i для разных i.

Предложение 4. *Имеет место мультиградуированный изоморфизм*

$$\widetilde{H}(G) \simeq \widehat{H}(G) \otimes \bigotimes_{i=1}^{l} V_i^{\otimes(n_i-1)}.$$

Эта теорема позволяет восстановить гомологии $\widehat{H}(G)$, являющиеся инвариантом зацепления L, по гомологиям $\widetilde{H}(G)$, которые проще вычислять.

Легче всего описать градуированное пространство $\widehat{H}(G)$ (или $\widetilde{H}(G)$) через его полином Пуанкаре. А именно, однородной компоненте $\widehat{H}_a^{a_1,\dots,a_l}(G)$ в гомологиях, имеющей масловскую градуировку a и александеровскую $(a_1,\dots,a_l)$, мы сопоставим моном $(\dim \widehat{H}_a^{a_1,\dots,a_l}(G))q^a {t_1}^{a_1}\dots {t_l}^{a_l}$. Прямой сумме однородных компонент сопоставляется сумма таких мономов. Легко видеть, что тензорному произведению градуированных пространств отвечает произведение их полиномов Пуанкаре. Мы будем обозначать полином Пуанкаре гомологий $\widehat{H}(G)$ через $\widehat{P}(G)$, а гомологий $\widetilde{H}(G)$ – через $\widetilde{P}(G)$. Таблицу значений $\widehat{P}$ для большого количества узлов можно найти в работе [1].

В терминах полиномов Пуанкаре предложение 4 формулируется так:

$$\widetilde{P}(G) = \widehat{P}(G) \cdot \prod_{i=1}^{l} (1 + q^{-1} t_i^{-1})^{(n_i-1)}.$$

3. Комплекс Флоера $\widetilde{C}(\cdot)$ для расширенного зацепления

Рассмотрим некоторое зацепление L. Найдем решеточную диаграмму для зацепления L и добавим отдельную компоненту в левый нижний угол в виде квадрата 2×2. Без ограничения общности можно считать, что в решеточной диаграмме зацепления, к которому мы добавляем отдельную компоненту, один из крестов расположен в левом нижнем углу диаграммы. Отдельная компонента может быть добавлена двумя способами: с ориентацией по часовой стрелке и против нее. Диаграмму с компонентой, ориентированной против часовой стрелки, мы будем обозначать через $G^{\circlearrowleft}$, по часовой – $G^{\circlearrowright}$. Довольно очевидно, что диаграммы $G^{\circlearrowleft}$ и $G^{\circlearrowright}$ могут быть переведены друг в друга с помощью движений циклической перестановки и коммутации. Перенумеруем компоненты зацепления так, чтобы добавляемая компонента имела номер

1, та компонента, которая ее “касается”, – номер 2, а остальные – как получится.

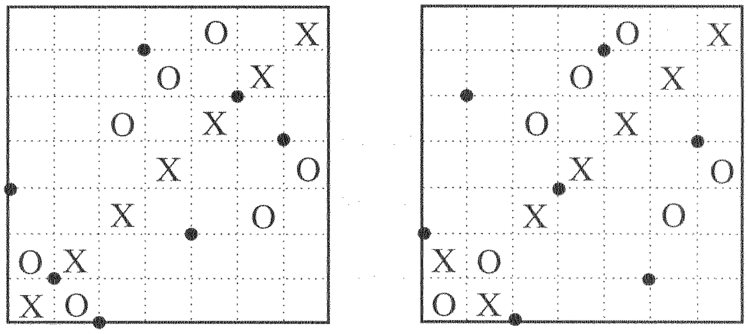

Рис. 6. Решеточные диаграммы $G^{\circlearrowleft}$ и $G^{\circlearrowright}$. На левой диаграмме нарисована одна из образующих $F_1^{\circlearrowleft}$, на правой – $F_2^{\circlearrowright}$.

Мы будем использовать то обстоятельство, что гомологии комплексов $\widetilde{C}(G^{\circlearrowleft})$ и $\widetilde{C}(G^{\circlearrowright})$ градуированно изоморфны, для того, чтобы свести их вычисление к вычислению гомологий некоторого подкомплекса в $\widetilde{C}(G^{\circlearrowright})$.

Обратим внимание на то, что оба рассматриваемых комплекса распадаются в прямую сумму двух подкомплексов. Первый из них мы будем обозначать $F_1^{\circlearrowleft}$ (соответственно $F_1^{\circlearrowright}$); он порожден всеми теми образующими, в которых одна из точек стоит в “центре” добавляемой компоненты. Прямое дополнение до него мы будем обозначать $F_2^{\circlearrowleft}$ (соответственно $F_2^{\circlearrowright}$).

Поточечно отождествляя образующие подкомплексов $F_1^{\circlearrowleft}$ и $F_1^{\circlearrowright}$, мы устанавливаем между ними изоморфизм. Однако этот изоморфизм будет иметь ненулевую степень: применяя формулу для вычисления александеровской мультиградуировки, мы видим, что первая ее компонента равна 0 для всех образующих подкомплекса $F_1^{\circlearrowleft}$ и -1 для всех образующих подкомплекса $F_1^{\circlearrowright}$. Их масловские градуировки тоже не совпадают: если масловская градуировка образующей из $F_1^{\circlearrowleft}$ равна k, то масловская градуировка ее образа в $F_1^{\circlearrowright}$ будет равна $k-1$. Остальные компоненты александеровской мультиградуировки для образующей и ее образа будут равны.

Аналогичным образом можно установить изоморфизм ненулевой степени между $F_2^{\circlearrowleft}$ и $F_2^{\circlearrowright}$. Сдвига во всех компонентах александеровской мультиградуировки, начиная со второй, опять не будет. Первая же компонента будет равна -1 для образующих из $F_2^{\circlearrowleft}$ и 0 для образующих из $F_2^{\circlearrowright}$. Наконец, если масловская градуировка образующей в $F_2^{\circlearrowleft}$ была равна k, то масловская градуировка ее образа в $F_2^{\circlearrowright}$ будет равна $k+1$.

Используя все эти данные, мы можем установить следующую лемму.

Лемма 1. *Гомологии комплекса $\widetilde{C}(G^{\circlearrowleft})$ могут быть восстановлены по известным гомологиям его подкомплекса $F_1^{\circlearrowleft}$.*

Доказательство. Принимая во внимание то, что гомологии комплексов $\widetilde{C}(G^{\circlearrowleft})$ и $\widetilde{C}(G^{\circlearrowright})$ мультиградуированно изоморфны со степенью изоморфизма 0, а каждый из этих комплексов представляет собой прямую сумму подкомплексов F_1^* и F_2^*, мы имеем

$$\widetilde{H}_k^{t_1,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowleft}) \simeq \widetilde{H}_k^{t_1,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowright}),$$

$$\widetilde{H}_k^{*,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowleft}) \simeq H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowleft}) \oplus H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowleft}),$$

$$\widetilde{H}_k^{*,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowright}) \simeq H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowright}) \oplus H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowright}),$$

где уровни компонент александеровской мультиградуировки перечислены в верхнем индексе, а уровень масловской обозначен в нижнем.

Исходя из этого разложения, можно установить изоморфизмы

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowleft}) \simeq H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowleft})$$

и

$$H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowright}) \simeq H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowright}).$$

Однако, мы также знаем, что имеют место и такие изоморфизмы:

$$H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowright}) \simeq H_{k+1}^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowleft}),$$

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowleft}) \simeq H_{k-1}^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowright}).$$

Комбинируя, мы получаем

$$H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowright}) \simeq H_{k+1}^{0,t_2,\dots,t_l}(F_2^{\circlearrowleft}) \simeq H_{k+1}^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowleft}).$$

Таким образом, мы приходим к тому, что гомологии комплекса $\widetilde{C}(G^{\circlearrowright})$ действительно восстанавливаются из гомологий его подкомплекса $F_1^{\circlearrowright}$ по правилу

$$\widetilde{H}_k^{0,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowright}) \simeq H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowright}),$$
$$\widetilde{H}_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(G^{\circlearrowright}) \simeq H_{k+1}^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1^{\circlearrowright}). \quad \square$$

Таким образом, вычисление гомологий комплекса $\widetilde{C}(G^{\circlearrowright})$ сводится к вычислению гомологий его подкомплекса $F_1^{\circlearrowright}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только те решеточные диаграммы зацепления, в которых добавляемая незаузленная и незацепленная компонента ориентирована по часовой стрелке, поэтому индекс, указывающий ориентацию этой компоненты, будет опускаться.

4. Вычисление гомологий комплекса F_1

Для вычисления гомологий комплекса F_1 мы воспользуемся некоторым трюком. В соответствии с нашим соглашением о расположении добавляемой компоненты и ее ориентации, левый нижний крест в диаграмме, представляющей зацепление L, граничит с угловым крестом из отдельной компоненты в диаграмме для $L^{\bigcirc}$. Повернем на $90°$ квадрат 2×2, содержащий эту пару крестов. Несложно понять, что получившаяся решеточная диаграмма будет представлять собой зацепление L, к которому дважды применено движение стабилизации. Для унификации обозначений мы перенесем нумерацию компонент получившегося зацепления с начальной диаграммы. Обозначим эту вспомогательную диаграмму через G' (см. рис. 7).

В комплексе F_1 имеется подкомплекс J, порожденный всеми теми образующими, в которых одна из точек стоит в верхнем правом углу ячейки, содержащей правый крестик из тривиальной компоненты. Очевидно, что комплексы F_1 и J включаются в короткую точную последовательность

$$0 \to J \to F_1 \to F_1/J \to 0,$$

где последним членом является факторкомплекс.

В комплексе Флоера $\widetilde{C}(G')$ выделим множество образующих, одна из точек в которых расположена внутри получаемого при

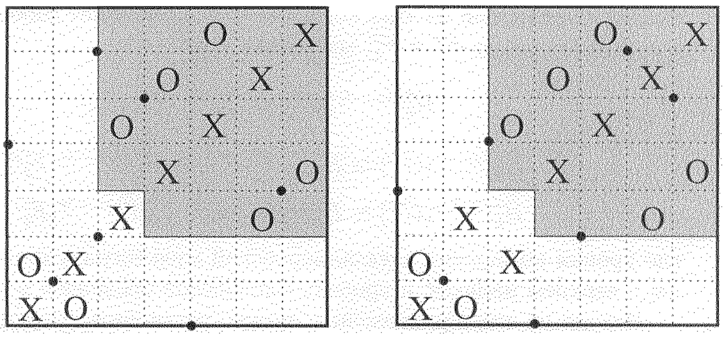

Рис. 7. Диаграммы G и G'. Серым цветом выделены их общие части. На диаграмме G обозначена образующая из J, на G' – образующая из J'.

двукратной стабилизации "завитка". Обозначим порожденное этим множеством пространство через F_1'. Само по себе F_1' не обладает структурой подкомплекса, но оно изоморфно фактору $\widetilde{C}(G')$ по подпространству, порожденному дополнительным множеством образующих, а последнее замкнуто относительно дифференциала. Поэтому на свободном $\mathbb{F}_2$-модуле, порожденном множеством F_1', можно ввести структуру факторкомплекса, который мы тоже будем обозначать F_1'.

В факторкомплексе F_1' имеется подкомплекс J', порожденный всеми теми образующими, ни одна из точек которых не расположена между крестиками, положение которых мы меняли, чтобы получить диаграмму G'. В этом случае короткая точная последовательность будет выглядеть так:

$$0 \to J' \to F_1' \to F_1'/J' \to 0.$$

Множество образующих комплекса J' обозначим через $\mathbf{S}(J')$, а множество образующих комплекса F_1'/J' через $\mathbf{S}(F_1'/J')$.

Отождествление образующих дает изоморфизмы комплексов

$$J \simeq F_1'/J',$$

$$F_1/J \simeq J',$$

которые индуцируют изоморфизмы в соответствующих гомологиях:

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(J) \simeq H_k^{t_2-1,\dots,t_l}(F_1'/J'),$$

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1/J) \simeq H_k^{t_2,\dots,t_l}(J').$$

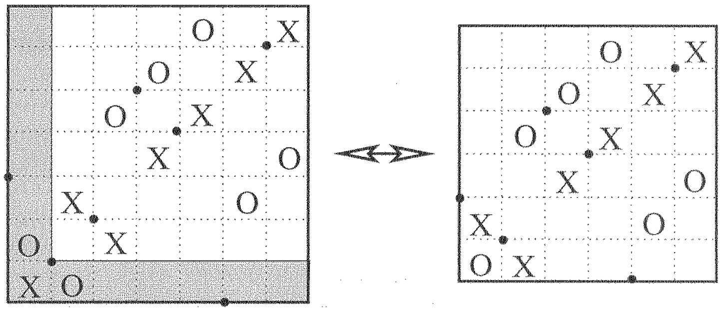

Рис. 8. Изоморфизм между F_1' и $\widetilde{C}(G_1')$. Серым цветом обозначен забываемый кусок диаграммы.

Рассмотрим теперь комплексы F_1' и F_1'/J' более внимательно. Если "отрезать" от диаграммы G' левую колонку и нижний ряд и вставить нолик в нижнюю левую ячейку получившейся диаграммы, то получится диаграмма G_1', также представляющая зацепление L, но стабилизированное всего один раз. Забывая про точку, стоящую внутри "завитка", и перенося остальные тождественно, мы получаем изоморфизм мультистепени ноль, индуцирующий изоморфизм в гомологиях:

$$H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1') \simeq \widetilde{H}_k^{t_2,\dots,t_l}(G_1').$$

При этом изоморфизме комплексов все образующие факторкомплекса F_1'/J' переходят в те образующие комплекса $\widetilde{C}(G_1')$, в которых точка стоит в верхнем правом углу ячейки, содержащей добавляемый нолик. Снова отрезая от диаграммы G_1' нижний ряд и левую колонку и добавляя в левый нижний угол крестик, мы получаем диаграмму G_2', опять представляющую L, но уже без стабилизации. Аналогичным образом мы устанавливаем изоморфизм

$$H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1'/J') \simeq \widetilde{H}_{k+1}^{t_2+1,\dots,t_l}(G_2').$$

Мы знаем, что

$$\widetilde{H}_k^{t_2,\dots,t_l}(G_1') \simeq \widetilde{H}_k^{t_2,\dots,t_l}(G_2') \oplus \widetilde{H}_{k+1}^{t_2+1,\dots,t_l}(G_2').$$

Поэтому результат следующей леммы вполне ожидаем.

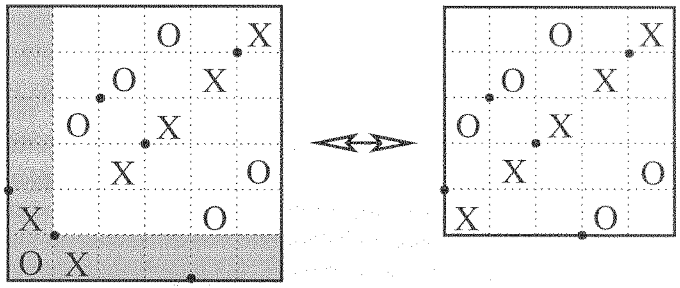

Рис. 9. Изоморфизм между F_1'/J' и $\widetilde{C}(G_2')$.

Лемма 2. *Имеет место изоморфизм*

$$H_k^{t_2,\dots,t_l}(J_1') \simeq \widetilde{H}_k^{t_2,\dots,t_l}(G_2').$$

Доказательство. Рассмотрим длинную точную последовательность групп гомологий, индуцированную короткой точной последовательностью комплексов

$$\dots \to H_{k+1}^{t_2,\dots,t_l}(F_1'/J') \to H_k^{t_2,\dots,t_l}(J') \to H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1') \to$$
$$\to H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1'/J') \to H_{k-1}^{t_2,\dots,t_l}(J') \to \dots$$

Гомоморфизм $\delta' : H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1'/J') \to H_{k_1}^{t_2,\dots,t_l}(J')$ устроен так. Рассмотрим некоторого представителя $\mathbf{y} \in H_k^{t_2,\dots,t_l}(F_1'/J')$. У него есть реализация в виде линейной комбинации образующих комплекса $\widetilde{C}(G_1')$. Поскольку $\mathbf{y}$ является циклом в F_1'/J', при применении к такой линейной комбинации дифференциала комплекса $\widetilde{C}(G_1')$ выживут только те прямоугольники, которые соединяют выделенную точку с некоторой другой. Несложно видеть, что действие δ' совпадает с действием, индуцированным на гомологиях оператором, который мы будем символически обозначать $p_{J'}\partial$, определенном на комплексе F_1'/J' следующим образом. Как линейное пространство F_1' раскладывается в прямую сумму J' и F_1'/J', также рассматриваемых как линейные пространства. Образующая $\mathbf{x} \in F_1'/J'$ с помощью такого разложения может быть отождествлена с некоторой образующей в F_1'. Применим к этой образующей дифференциал комплекса F_1' и спроецируем результат на J' – это и даст нам образ образующей $\mathbf{x}$ при применении оператора $p_{J'}\partial$. Несложное вычисление показывает, что $p_{J'}\partial$ является цепным мультиградуированным отображением.

Теперь можно явным образом построить гомотопию нулевого отображения и $p_{J'}\partial$. Рассмотрим решеточную диаграмму G_1'. Множество образующих факторкомплекса F_1'/J' может быть геометрически реализовано на этой диаграмме в виде набора точек, удовлетворяющего условиям геометрической реализации образующей комплекса $\widetilde{C}(G_1')$, такого, что одна из них (назовем ее x_0') расположена в верхнем правом углу нижней левой ячейки (напомним, что в этой ячейке находится нолик). Обозначим горизонтальную окружность, проходящую через эту точку, через α_1, а вертикальную через β_2. Соседнюю слева вертикальную окружность назовем β_1. Пусть геометрические реализации образующих $\mathbf{x}' \in \mathbf{S}(F_1'/J')$ и $\mathbf{y}' \in \mathbf{S}(J')$ на диаграмме G_1' различаются ровно тремя точками, одна из которых расположена на окружности β_1. *Пустым шестиугольником типа* 1*, соединяющим образующие* $\mathbf{x}'$ *и* $\mathbf{y}'$, называется вложенный шестиугольник, сторонами которого являются дуги горизонтальных и вертикальных окружностей, а вершинами – те и только те точки образующих $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, в которых они различаются, удовлетворяющий следующим условиями:

- Ориентация, индуцированная на горизонтальных сторонах шестиугольника, направлена от точки $\mathbf{x}'$ к точке $\mathbf{y}'$.
- Во внутренности шестиугольника нет никаких других точек образующих $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$.
- Внутренность шестиугольника содержит те и только те крестики и нолики, которые расположены между вертикальными окружностями β_1 и β_2.
- Точка из $\mathbf{y}'$, лежащая на вертикальной окружности β_2, расположена на той же горизонтальной окружности, что и точка из $\mathbf{x}'$, лежащая на β_1.
- Граница шестиугольника устроена так: мы начинаем от точки x_0', идем направо по окружности α_1 до точки из $\mathbf{y}'$, потом наверх до точки из $\mathbf{x}'$, затем налево до точки из $\mathbf{y}$, расположенной на окружности β_1, затем вниз до точки из $\mathbf{x}'$, направо до точки из $\mathbf{y}'$, расположенной на окружности β_2, и снова наверх до x_0'.
- Если образующие $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ отличаются более чем тремя точками или не удовлетворяют перечисленным выше условиям, то

мы считаем, что множество пустых шестиугольников, соединяющих $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, пусто.

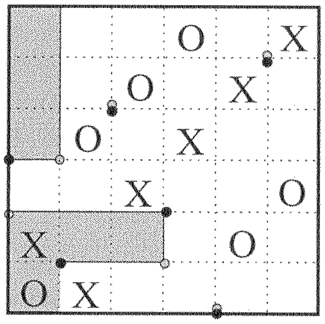

Рис. 10. Пустой шестиугольник типа 1.

Множество всех пустых шестиугольников типа 1, соединяющих образующие $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, обозначим через $Hex_1^\circ(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$. Определим оператор H_1 формулой

$$H_1(\mathbf{x}') = \sum_{\mathbf{y}'\in \mathbf{S}(J')} \sum_{h'\in Hex_1^\circ(\mathbf{x}',\mathbf{y}')} \mathbf{y}'.$$

Оператор H_1 сохраняет александеровскую и масловскую градуировку. Несложное вычисление показывает, что

$$p_{J'}\partial = H_1\partial_{F_1'/J'} + \partial_{J'}H_1.$$

Это значит, что оператор δ' является нулевым морфизмом в гомологиях. То есть гомологии комплекса F_1' распадаются в прямую сумму гомологий комплексов J' и F_1'/J'. Поскольку гомологии комплексов F_1'/J' и F_1' нам известны, мы получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_{k+1}^{0,t_2,\ldots,t_l}(F_1/J) \to H_k^{0,t_2,\ldots,t_l}(J) \to H_k^{0,t_2,\ldots,t_l}(F_1) \to$$
$$\to H_k^{0,t_2,\ldots,t_l}(F_1/J) \to H_{k-1}^{0,t_2,\ldots,t_l}(J) \to \ldots$$

Лемма 3. *Гомологии комплекса F_1 представляются в виде прямой суммы гомологий комплексов J и F_1/J:*

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l} \simeq H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(J) \oplus H_k^{-1,t_2,\dots,t_l}(F_1/J).$$

Доказательство. Связывающий гомоморфизм

$$\delta : H_{k+1}^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1/J) \to H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(J)$$

этой длинной точной последовательности совпадает (можно использовать те же самые аргументы, что и для морфизма δ') с морфизмом, индуцированным на гомологиях цепным отображением $p_J\partial$. Оказывается, что отображение $p_J\partial$ гомотопно 0. Гомотопия устанавливается при помощи отображения H_2, определяемого следующим образом.

Назовем *пустым шестиугольником типа 2, соединяющим образующие* $\mathbf{x} \in \mathbf{S}(F_1/J)$ *и* $\mathbf{y} \in \mathbf{S}(J)$ (образующие рассматриваются как наборы точек на диаграмме G; обозначим точку, находящуюся "между" компонентами 1 и 2, через x_0), вложенный в плоскость шестиугольник, сторонами которого являются отрезки вертикальных и горизонтальных окружностей, обладающий следующими свойствами:

- Ориентация, индуцированная на горизонтальных сторонах шестиугольника, направлена от точки $\mathbf{x}$ к точке из $\mathbf{y}$.
- Во внутренности шестиугольника нет никаких других точек образующих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ кроме точки, находящейся в "центре" добавляемой незаузленной и незацепленной компоненты.
- Внутренность шестиугольника содержит те и только те крестики и нолики, которые формируют добавляемую компоненту.
- Граница шестиугольника устроена так: мы начинаем от точки x_0, идем наверх до точки из $\mathbf{x}$, налево до точки из $\mathbf{y}$, вниз до точки из $\mathbf{x}$, направо до точки $\mathbf{y}$, вверх до точки $\mathbf{x}$ и налево до точки x_0.
- Как минимум одна из сторон шестиугольника лежит на горизонтальной или вертикальной окружности, разрезая тор вдоль которых мы получаем диаграмму G.
- Если образующие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ отличаются более чем тремя точками или не удовлетворяют перечисленным выше условиям, то мы считаем, что множество пустых шестиугольников, соединяющих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, пусто.

Множество всех пустых прямоугольников типа 2, соединяющих точки $\mathbf{x} \in \mathbf{S}(F_1/J)$ и $\mathbf{y} \in \mathbf{S}(J)$, обозначим через $Hex_2^{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

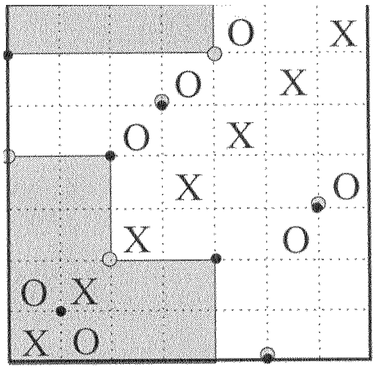

Рис. 11. Пустой шестиугольник типа 2.

Оператор H_2 определим равенством

$$H_2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(J)} \sum_{h \in Hex_2^{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \mathbf{y}.$$

Равенство

$$p_J \partial = \partial_J H_2 + H_2 \partial_{F_1/J}$$

легко устанавливается. □

Вспоминая про градуированные изоморфизмы штрихованных и нештрихованных комплексов и собирая вместе полученные нами результаты об их гомологиях, мы устанавливаем следующее предложение.

Предложение 5. *Имеет место изоморфизм*

$$H_k^{0,t_2,\dots,t_l}(F_1) \simeq \widetilde{H}_k^{t_2,\dots,t_l}(G_2) \oplus \widetilde{H}_{k+1}^{t_2,\dots,t_l}(G_2).$$

Этот изоморфизм приводит к следующему соотношению на полиномы Пуанкаре:

$$\widetilde{P}(G) = (1 + q^{-1}t_1^{-1})(1 + q^{-1})\widetilde{P}(G_2).$$

Если мы вспомним, что гомологии Флоера $\widehat{H}$ являются инвариантом зацепления L и будем обозначать полином Пуанкаре

$\widehat{P}(G)$ гомологий для какого-нибудь решеточного представления G зацепления L через $\widehat{P}(L)$, то основной результат нашей заметки мы сможем сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Имеет место следующее соотношение, связывающее полиномы Пуанкаре гомологий Флоера для зацепления L и его расширения $L^{\bigcirc}$:*

$$\widehat{P}(L^{\bigcirc}) = (1 + q^{-1})\widehat{P}(L).$$

Литература

1. J. A. Baldwin, W. D. Gillam, *Computations of Heegaard–Floer Knot homology.* — Preprint, `arXiv:math.GT/061067`.
2. P. R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book.* I. *Basic Properties.* — Topology Appl. **64**, No. 1 (1995), 37–58.
3. I. Dynnikov, *Arc presentation of links: monotonic simplification.* — Fund. Math. **190** (2006), 29–67, `arXiv:math.GT/0208153`.
4. C. Manolescu, P. S. Ozsvàth, S. Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology.* — Preprint, `arXiv:math.GT/0607691`.
5. C. Manolescu, P. S. Ozsvàth, Z. Szabò, D. P. Thurston, *On combinatorial link Floer homology.* — Preprint, `arXiv:math.GT/0610559`.
6. P. S. Ozvàth, Z. Szabò, *Holomorphic disks and topological invariants for closed 3-manifolds.* — Ann. Math. (2), **159**, No. 3 (2004), 1027–1158, `arXiv:math.SG/0101206`.
7. P. S. Ozvàth, Z. Szabò, *Holomorphic discs and knot invariants.* — Adv. Math. **186**, No. 1 (2004), 58–116, `arXiv:math.GT/0209056`.
8. J. A. Rasmussen, *Floer homology and knot complement.* — Ph.D. thesis, Harvard University (2003), `arXiv:math.GT/0306378`.

Karev M. V. Heegaard–Floer homology of a link with trivial component.

In this paper we prove a theorem that allows one to evaluate the Heegaard–Floer homology of a link with trivial component added through the Heegaard–Floer homology of the initial link.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: max.karev@gmail.com

Поступило 4 мая 2007 г.