Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

А. В. Шанин

КРАЕВЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НА МНОГОЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ КООРДИНАТНЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

Идея применить метод отражений к задаче о дифракции на полуплоскости и исследовать задачу о распространении на двулистной поверхности с одной точкой ветвления принадлежит Зоммерфельду [1]. Как известно, в случае задачи о полуплоскости такой подход приводит к удобному выражению для поля (к интегралу Зоммерфельда) и, окончательно, к решению задачи. В координатах (x, y) многолистная поверхность Зоммерфельда сходна с римановой поверхностью функции $\sqrt{x + \mathrm{i}\, y}$.

Многие исследователи (в их числе сам А. Зоммерфельд и Г.Д.Малюжинец) пытались построить аналогичный метод для задачи о полосе. Первый шаг — сведение задачи дифракции на препятствии к задаче о распространении на многолистной поверхности — выполняется без затруднений. Многолистная поверхность сходна с римановой поверхностью функции $\sqrt{a^2 - (x + \mathrm{i}\, y)^2}$. Однако удобного интегрального представления для полей на такой поверхности получить не удалось. Существенное продвижение в данной задаче было достигнуто в работах [2, 3], где задача дифракции была сведена к обыкновенным диффереціальным уравнениям, по форме напоминающим уравнения для специальных функций.

В работах автора [4, 5] были предложены методы, применимые к задаче о дифракции на системе компланарных полос. Это методы координатных и спектральных уравнений. Более сложная задача, дифракция на двумерном уголковом отражателе со щелью конечных размеров, рассматривается в работе [6].

Целью настоящей работы является расширение области применения методов координатных и спектральных уравнений на другие дифракционные задачи, которые можно свести к задачам распространения на многолистных поверхностях. При этом обобщаются результаты работы [6]. Кроме того, анализируются свойства решений получающихся координатных и спектральных уравнений.

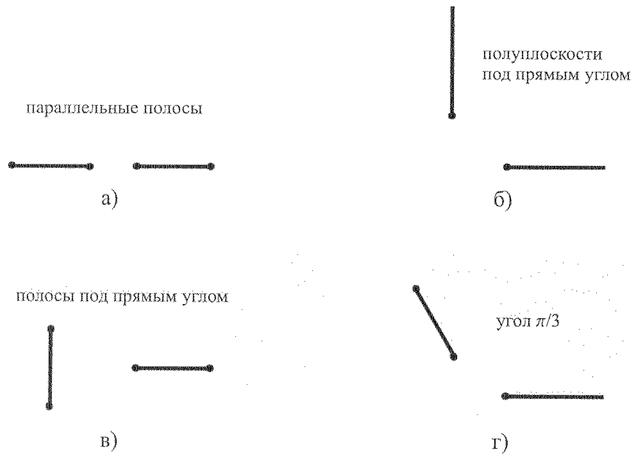

Рис. 1. Различные дифракционные задачи, приводящие к многолистным поверхностям

Задачи, которые сводятся к распространению на многолистных поверхностях, достаточно разнообразны. На Рис. 1 показаны примеры геометрий таких задач. Все задачи двумерны. Поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0 \tag{1}$$

Граничные условия везде идеальны, т.е. являются условиями Дирихле или Неймана. В настоящей работе предполагается, что число листов и точек ветвления поверхности конечно, а порядок каждой точки ветвления равен двум.

Решение дифракционной задачи с помощью предлагаемого метода выполняется в несколько шагов. На *первом шаге* применяется метод отражений, т.е. по рассеивателям проводятся разрезы, и к каждому берегу разреза "приклеивается" геометрически отраженный экземпляр поверхности. Значения поля на этом экземпляре либо равны исходным значениям поля (для граничных условий Неймана), либо противоположны им по знаку (для условий Дирихле).

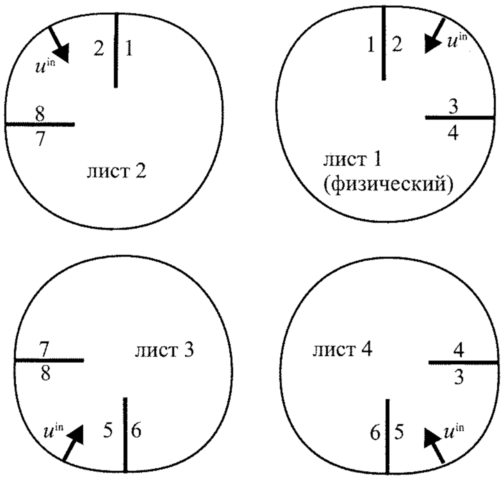

Рис. 2. Схема многолистной поверхности для задачи, изображенной на Рис. 1б

Пример поверхности для задачи, геометрия которой изображена на Рис. 1б, показан на Рис. 2. Поверхность имеет четыре листа и четыре точки ветвления второго порядка. Склеиваются берега разрезов, помеченные одинаковыми цифрами.

В результате данной процедуры исходная задача сводится к задаче о распространении на многолистной поверхности без рассеивателей. Если в исходной постановке дифракционной задачи фигурировала плоская падающая волна, то в новой постановке имеется несколько падающих волн (по одной на каждом листе). Направления падения симметричны относительно плоскостей рассеивателей. На *втором шаге* процедуры на поверхности формулируется вспомогательная задача о распространении лишь с одной падающей волной (приходящей по одному из листов). Решение исходной задачи (в силу линейности) может быть получено в результате сложения нескольких решений вспомогательных задач, соответствующих различным углам и листам падения.

На *третьем шаге* процедуры применяется формула расщепления, выражающая решение вспомогательной задачи через краевые функции Грина.

На *четвертом шаге* краевые функции Грина вычисляются с помощью спектральных или координатных уравнений.

Спектральное уравнение представляет собой матричное обыкновенное дифференциальное уравнение для диаграмм направленности краевых функций Грина. В его коэффициенты входят элементарные функции угла рассеяния, а также несколько неизвестных констант. Эти константы представляют собой коэффициенты, стоящие в асимптотических разложениях краевых функций Грина. Константы необходимо подбирать таким образом, чтобы решения спектрального уравнения обладали нужными свойствами. Более точно, “нужные свойства” представляют собой ограничения на матрицы связи между различными асимптотиками решения. Таким образом, неизвестные константы определяются из достаточно сложной спектральной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В настоящей работе будут выведены координатные и спектральные уравнения и исследованы их элементарные свойства. Постановка спектральной задачи станет предметом другой работы.

2. Постановка дифракционной задачи на многолистной поверхности

Пусть задана разветвленная поверхность с конечным числом листов и точек ветвления. Каждый лист представляет собой бесконечную плоскость с разрезами вдоль образов рассеивателей. Пусть все точки ветвления в конечной части пространства имеют второй порядок. В качестве примера будет рассматриваться поверхность, изображенная на Рис. 2 для дифракционной задачи, геометрия которой показана на Рис. 1б. Однако те же рассуждения годятся для любой поверхности, описанной выше.

На листах заданы декартовы координаты (x, y) и выполняется уравнение (1). Зависимость от времени имеет вид $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ и везде опускается. Предполагается, что величина k_0 имеет малую положительную мнимую добавку. Это соответствует малому поглощению в среде.

Падающее поле представляет собой плоскую волну, приходящую под заданным углом ψ по одному из листов. Для корректного определения падающей волны и условий излучения можно, например, воспользоваться следующей процедурой. Будем считать, что падающая волна создается точечным источником, расположенным на нужном листе достаточно далеко от точек ветвления (на расстоянии R от начала координат). Выберем амплитуду источника таким образом, чтобы амплитуда цилиндрической волны в начале координат была равна единице. Для фиксированного точечного источника условия излучения могут быть сформулированны в виде принципа предельного поглощения: выбирается решение, убывающее на бесконечности на каждом листе. Затем берется предел таких решений при $R \to \infty$. Игнорируя детали этой процедуры, будем полагать, что падающая волна в зоне, где она видна по соображениям геометрической оптики, имеет вид

$$u^{\mathrm{in}} = \exp\{-\mathrm{i}\, k_0(x \cos\psi + y \sin\psi)\} \tag{2}$$

В окрестности точек ветвления должны выполняться условия Мейкснера. Эти условия заключаются в отсутствии источников вблизи точек ветвления. Пусть число точек ветвления равно N. Пронумеруем точки ветвления индексами от 1 до N.

Введем вблизи каждой точки ветвления цилиндрические координаты (ρ_n, θ_n) (см. Рис. 3). Здесь ρ_n — расстояние до точки ветвления, а θ_n — угол, отсчитываемый от направления оси x против часовой стрелки. Заметим, что ввести таким образом координаты можно двумя способами, выбирая нулевой угол на одном из двух листов, соединяющихся в точке ветвления. Зафиксируем свой выбор тем или иным способом.

Исследуя ряд Мейкснера для окрестности точки ветвления и оставляя лишь члены, отвечающие условию конечности энергии вблизи точки ветвления, получаем, что поле вблизи точки ветвления должно представляться в виде ряда

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho_j^{1/2} (C_{n+}\, e^{\mathrm{i}\,\theta_n/2} + C_{n-}\, e^{-\mathrm{i}\,\theta_n/2}) + O(\rho^{3/2}) + \text{ регулярные члены }. \tag{3}$$

Здесь $C_{n\pm}$ — некоторые константы, а регулярные члены представляют собой функцию, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки ветвления.

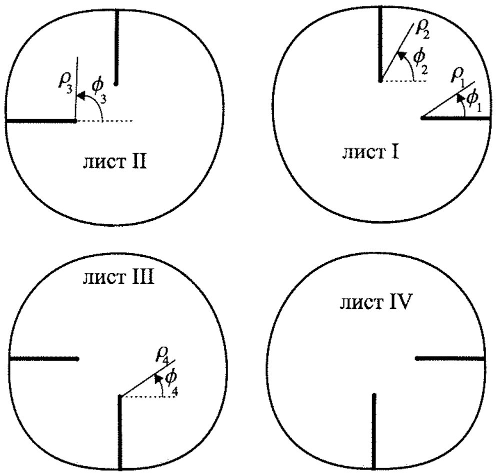

Рис. 3. Локальные цилиндрические координаты.

Поле u зависит от координат (x, y), угла падения ψ, от номера листа n_{i}, по которому приходит падающая волна и от номера листа n_{o}, на котором находится точка наблюдения. Таким образом, полный комплект аргументов выглядит как $u(\psi, n_{\mathrm{i}}; x, y, n_{\mathrm{o}})$.

3. Комплексные координаты. Краевые функции Грина

Выполним замену переменных

$$z_+ = x + \mathrm{i}\, y, \qquad z_- = x - \mathrm{i}\, y. \tag{4}$$

Пусть (x_n, y_n) — координаты точки ветвления с номером n. Комплексные координаты этих точек будем обозначать как

$$p_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n. \tag{5}$$

Локальные асимптотики (3) можно записать в виде

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(C_{n+} z_{n+}^{1/2} + C_{n-} z_{n-}^{1/2}) + O(\rho^{3/2}) + \text{ регулярные члены}, \tag{6}$$

где

$$z_{n+} = z_+ - p_n, \qquad z_{n-} = z_- - \bar{p}_n,$$

черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Построим краевые функции Грина следующим образом. Для достаточно малых ϵ решим на разветвленной поверхности неоднородные задачи

$$\Delta u_\epsilon^{m\pm} + k_0^2 u_\epsilon^{m\pm} = I_\epsilon^{m\pm},$$

где

$$I_\epsilon^{m+} = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}}\delta(\rho_m - \epsilon)[\delta(\theta_m) - \mathrm{i}\,\delta(\theta_m - \pi) - \delta(\theta_m - 2\pi) + \mathrm{i}\,\delta(\theta_m - 3\pi)],$$

$$I_\epsilon^{m-} = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}}\delta(\rho_m - \epsilon)[\delta(\theta_m) + \mathrm{i}\,\delta(\theta_m - \pi) - \delta(\theta_m - 2\pi) - \mathrm{i}\,\delta(\theta_m - 3\pi)].$$

При решении неоднородных задач будем принимать во внимание условия излучения и при каждом конечном ϵ условия Мейкснера в вершинах.

Краевые функции Грина $u^{m\pm}$ получим в результате предельного перехода

$$u^{m\pm} = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon^{m\pm}. \qquad (7)$$

Исследуем асимптотику краевых функций Грина вблизи точек ветвления. По известным источникам можно построить только сверхмейкснеровские члены асимптотики. В остальных членах придется оставить неизвестные коэффициенты. В “комплексных” координатах асимптотики имеют вид

$$u^{m+}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{mn}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{2(C_{n+}^{m+} z_{n+}^{1/2} + C_{n-}^{m+} z_{n-}^{1/2})}{\sqrt{\pi}} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{рег.чл.}, \qquad (8)$$

$$u^{m-}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{mn}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \frac{2(C_{n+}^{m-} z_{n+}^{1/2} + C_{n-}^{m-} z_{n-}^{1/2})}{\sqrt{\pi}} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{рег.чл.}, \qquad (9)$$

где $C_{n\pm}^{m\pm}$ — неизвестные коэффициенты.

Количество краевых функций Грина вдвое больше количества точек ветвления, поскольку каждой точке ветвления соответствуют две ориентации источников (они маркируются индексами $+$ и $-$).

Краевые функции Грина зависят от координат (x, y) или (z_+, z_-), а также от номера листа, на котором расположена точка наблюдения:

$$u^{m\pm} = u^{m\pm}(z_+, z_-, n_\circ).$$

Вычислить краевые функции Грина $u^{m\pm}$ не проще, чем решить исходную задачу дифракции, однако краевые функции Грина не зависят от параметров ψ и $n_{\rm i}$.

4. Формула расщепления

Выведем формулу расщепления для данной задачи. Понятие формулы расщепления было введено достаточно давно [3, 7], хотя и не является широко известным. Для вывода будем пользоваться методом, предложенным в [8].

Поле u может быть представлено в виде

$$u = u^{\rm in}\chi(x, y, n_{\rm o}) + u^{\rm sc}, \qquad (10)$$

где χ принимает значение 1 в тех точках поверхности, где падающая волна видна по законам геометрической оптики и значение 0 в остальных точках; $u^{\rm sc}$ — рассеянное поле. Вдали от точек начала координат везде, кроме зон полутени, рассеянное поле может быть представлено в виде цилиндрической волны

$$u^{\rm sc}(\psi, n_{\rm i}; R, \varphi, n_{\rm o}) = \frac{e^{{\rm i}\,k_0 R - {\rm i}\,\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 R}} S + O(R^{-3/2} e^{{\rm i}\,k_0 R}), \qquad (11)$$

где

$$S = S(\psi, n_{\rm i}; \varphi, n_{\rm o})$$

представляет собой диаграмму направленности поля.

Краевые функции Грина также могут быть представлены в виде цилиндрических волн

$$u^{m\pm}(R, \varphi, n_{\rm o}) = \frac{e^{{\rm i}\,k_0 R - {\rm i}\,\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 R}} S^{m\pm}(\varphi, n_{\rm o}) + O(R^{-3/2} e^{{\rm i}\,k_0 R}) \qquad (12)$$

с соответствующими диаграммами направленности.

Предполагается, что для данной поверхности выполняется теорема единственности, т.е. для заданной конфигурации точечных источников существует ровно одно решение дифракционной задачи, удовлетворяющее условию излучения и условиям Мейкснера. Отсюда следует, что поле, удовлетворяющее однородному уравнению Гельмгольца, условиям Мейкснера и условию излучения, тождественно равно нулю.

Единственность легко доказывается из энергетических соображений при небольшом поглощении в среде. При этом существование хотя бы одного решения (т.е. первая часть утверждения) представляется физически очевидным.

Строгая формулировка дифракционной задачи и строгий вывод теоремы единственности представляют собой достаточно сложную самостоятельную задачу и здесь не рассматриваются.

Теорема 1. *Диаграмма направленности решения задачи с падающей плоской волной выражается через диаграммы направленности краевых функций Грина с помощью формулы расщепления:*

$$S(\psi, n_{\mathrm{i}}; \varphi, n_{\mathrm{o}}) = -\frac{1}{4k_0(\cos\varphi + \cos\psi)}$$

$$\times \sum_{m=1}^{N} \left[S^{m+}(\psi, n_{\mathrm{i}}) S^{m+}(\varphi, n_{\mathrm{o}}) + S^{m-}(\psi, n_{\mathrm{i}}) S^{m-}(\varphi, n_{\mathrm{o}}) \right]. \qquad (13)$$

Доказательство.

Применим к полю u оператор

$$H_x = \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\, k_0 \cos\psi = \frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial}{\partial z_-} + \mathrm{i}\, k_0 \cos\psi.$$

Заметим, что данный оператор обращает в нуль падающую волну. Это означает, что $H_x[u]$ удовлетворяет условию излучения.

Введем понятие *сверхсигулярного решения* уравнения Гельмгольца на данной поверхности. Это решение, удовлетворяющее условию излучения и имеющее в точках ветвления члены, запрещенные условием Мейкснера и имеющие вид

$$\rho_m^{-1/2} e^{\pm \mathrm{i}\, \theta_m/2}.$$

Исследуем старшие (сверхмейкснеровские) члены асимптотики полученной функции в точках ветвления:

$$H_x[u] = \frac{C_{n+}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{C_{n-}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \ldots,$$

т.е. $H_x[u]$ является сверхсингулярным решением.

На примере $H_x[u]$ покажем, что любое сверхсингулярное решение выражается в виде линейной комбинации краевых функций Грина.

Действительно, построим функцию

$$H_x[u] + \sum_{m=1}^{N} (C_{m+} u^{m+} + C_{m-} u^{m-}).$$

Эта функция удовлетворяет условию излучения и условиям Мейкснера. Применяя теорему единственности, приходим к соотношению

$$H_x[u] = -\sum_{m=1}^{N} (C_{m+} u^{m+} + C_{m-} u^{m-}). \tag{14}$$

Это формула расщепления в “слабой форме”. Для того, чтобы получить сильную форму, необходимо выразить коэффициенты $C_{m\pm}$ через диаграммы направлености полей $u^{m\pm}$.

Воспользуемся рассуждением, основанным на теореме взаимности.

Опишем процедуру вычисления коэффициентов $C_{m\pm}$. Решение $u(\psi, n; \dots)$ может быть получено как предел при $R \to \infty$ решения задачи с источником, расположенным в точке с координатами (R, ψ) на листе с индексом n и имеющим амплитуду $2\sqrt{2\pi k_0 R} e^{3i\pi/4} e^{-\mathrm{i}\, k_0 R}$. Обозначим соответствующую неоднородность уравнения Гельмгольца (дельта-функцию, локализованную в заданной точке поверхности и имеющую заданную амплитуду) как I_R.

Для вычисления $C_{m\pm}$ функция u уножается на функцию приемников $I^{m\pm}(\epsilon)/8$ и вычисляется интеграл по всей поверхности. Берется предел интеграла при $\epsilon \to 0$. Формально выражение для $C_{m\pm}$ выглядит как

$$C_{m\pm} = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} \frac{1}{8} \iint I^{m\pm} \cdot \Box^{-1}[I_R] ds, \tag{15}$$

где $\Box \equiv \Delta + k_0^2$.

Обратимся к вычислению функции $S^{m\pm}(\psi, n)$. Функция источников имеет вид $I^{m\pm}$. Функция приемников имеет вид $I_R/(2\,\mathrm{i})$. Таким образом,

$$S^{m\pm} = \lim_{R \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \iint I_R \cdot \Box^{-1}[I^{m\pm}] ds. \tag{16}$$

Меняя порядок взятия пределов и замечая, что по теореме взаимности

$$\iint I^{m\pm} \cdot \Box^{-1}[I_R] ds = \iint I_R \cdot \Box^{-1}[I^{m\pm}] ds, \tag{17}$$

получаем, что

$$C_{m\pm} = \frac{\mathrm{i}}{4} S^{m\pm}(\psi, n_{\mathrm{i}}). \tag{18}$$

Подставим соотношение (18) в (14). Заметим, что оператор H_x действует на диаграммы направленности следующим образом:

$$S(\varphi) \xrightarrow{H_x} \mathrm{i}\, k_0(\cos\varphi + \cos\psi) S(\varphi).$$

В итоге получим сильную формулу расщепления (13) □

5. Координатные уравнения

Сформируем вектор неизвестных

$$\mathbf{u} = (u^{1+}, \ldots, u^{N+}, u^{1-}, \ldots, u^{N-})^T. \tag{19}$$

Введем производные по комплексным переменным

$$\frac{\partial}{\partial z_+} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_-} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{20}$$

Введем следующие матрицы. Обозначим как $\mathbf{I}$ единичную матрицу $N \times N$. Пусть $\mathbf{P} = \mathrm{diag}(p_1 \ldots p_N)$. Составим матрицы $\mathbf{C}^+_-$, $\mathbf{C}^-_+$ размера $N \times N$ из элементов C^{m+}_{n-}, C^{m-}_{n+}, соответственно (m — номер строки, n — номер столбца). Составим также матрицы $\widehat{\mathbf{C}}^+_+$, $\widehat{\mathbf{C}}^-_-$ из элементов

$$\widehat{C}^{m+}_{n+} \equiv (p_m - p_n) C^{m+}_{n+}, \quad \widehat{C}^{m-}_{n-} \equiv (\bar{p}_m - \bar{p}_n) C^{m-}_{n-}.$$

Теорема 2. *Вектор неизвестных удовлетворяет дифференциальным (координатным) уравнениям*

$$\frac{\partial}{\partial z_+}\mathbf{u} = \mathbf{Z}_+\mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial z_-}\mathbf{u} = \mathbf{Z}_-\mathbf{u}, \tag{21}$$

где коэффициенты записываются в блочной форме как

$$\mathbf{Z}_+ = -\begin{pmatrix} (z_+\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\cdot(\mathbf{I}/2+\widehat{\mathbf{C}}^+_+), & (z_+\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\cdot\mathbf{C}^+_-\cdot(z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{C}^-_+, & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\mathbf{Z}_- = -\begin{pmatrix} 0, & \mathbf{C}^+_- \\ (z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}})^{-1}\cdot\mathbf{C}^-_+\cdot(z_+\mathbf{I}-\mathbf{P}), & (z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}})^{-1}\cdot(\mathbf{I}/2+\widehat{\mathbf{C}}^-_-), \end{pmatrix} \tag{23}$$

Доказательство. Построим следующие 4 N сверхсингулярных решений, содержащих краевые функции Грина:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_m}u^{m\pm}, \quad \frac{\partial}{\partial z_\mp}u^{m\pm}, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta_m} = \mathrm{i}\left(z_{m+}\frac{\partial}{\partial z_{m+}} - z_{m-}\frac{\partial}{\partial z_{m-}}\right).$$

То, что выписанные производные удовлетворяют уравнению Гельмгольца, следует из того, что оператор Лапласа коммутирует с трансляциями и поворотами. То, что асимптотики производных содержат члены не выше $\rho_m^{-1/2}$, устанавливается непосредственной проверкой. Выполнение условия излучения очевидно.

Аналогично рассуждениям, проведенным в предыдущем разделе, представим сверхсингулярные решения в виде линейных комбинаций краевых функций Грина. В результате получим представления

$$\frac{\partial u^{m\pm}}{\partial\theta_m} = \mp\frac{\mathrm{i}\,u^{m\pm}}{2} - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\left[(p_n - p_m)C_{n+}^{m\pm}u^{n+} - (\bar{p}_n - \bar{p}_m)C_{n-}^{m\pm}u^{n-}\right], \tag{24}$$

$$\frac{\partial u^{m+}}{\partial z_-} = -\sum_{n=1}^{N} C_{n-}^{m+}u^{n-}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial u^{m-}}{\partial z_+} = -\sum_{n=1}^{N} C_{n+}^{m-}u^{n+}. \tag{26}$$

Получаем $4N$ соотношений. Выразим из них линейным образом производные краевых функций Грина по $z_\pm$. После элементарных, но громоздких преобразований получим координатные уравнения в форме (21) □

Коэффициенты координатных уравнений зависят от значительного числа неизвестных параметров. Необходимо учесть соотношения между ними, чтобы сократить число независимых параметров до минимума.

Учет теоремы взаимности

Повторим рассуждения, применявшиеся для вывода формулы (18). Коэффициет C_{n+}^{m+} может быть вычислен с помощью функции источников I^{m+} и функции приемников $I^{n+}/8$. Коэффициент C_{m+}^{n+} может быть вычислен с помощью функции источников I^{n+} и функции приемников $I^{m+}/8$. Воспользовавшись теоремой взаимности, приходим к выводу, что эти коэффициенты равны. Аналогично получаем остальные тождества:

$$C_{n+}^{m+} = C_{m+}^{n+}, \quad C_{n-}^{m-} = C_{m-}^{n-}, \quad C_{n-}^{m+} = C_{m+}^{n-}. \tag{27}$$

Соответственно,

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = -\widehat{C}_{m+}^{n+}, \qquad \widehat{C}_{n-}^{m-} = -\widehat{C}_{m-}^{n-}$$

Совместность и "гельмгольцевость" координатных уравнений

Координатные уравнения (21) должны быть совместны, т.е. должно выполняться тождество

$$\frac{\partial}{\partial z_-}\frac{\partial}{\partial z_+}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial z_+}\frac{\partial}{\partial z_-}\mathbf{u}. \tag{28}$$

Это условие должно выполняться для различных решений координатного уравнения, причем можно показать, что матрица, составленная из этих решений, не может быть вырожденной везде. Следовательно, (28) эквивалентно тождеству

$$\frac{\partial}{\partial z_-}\mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_+\mathbf{Z}_- = \frac{\partial}{\partial z_+}\mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_-\mathbf{Z}_+. \tag{29}$$

Подставим в это тождество матрицы $\mathbf{Z}_\pm$. Получим, что (29) выполняется при условии, что при $m, n = 1 \ldots N$ верны следующие равенства

$$\sum_{l=1}^{N} C_{l-}^{m+} C_{n+}^{l-} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \tag{30}$$

$$\sum_{l=1}^{N} C_{l+}^{m-} C_{n-}^{l+} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \tag{31}$$

$$\sum_{l=1}^{N} \widehat{C}_{l+}^{m+} C_{n-}^{l+} = -\sum_{l=1}^{N} C_{l-}^{m+} \widehat{C}_{n-}^{l-}, \tag{32}$$

$$\sum_{l=1}^{N} C_{l+}^{m-} \widehat{C}_{n+}^{l+} = -\sum_{l=1}^{N} \widehat{C}_{l-}^{m-} C_{n+}^{l-}. \tag{33}$$

Отметим, что равенства (32) и (33) эквивалентны в силу (27).

Заметим, что для того, чтобы решение координатного уравнения удовлетворяло уравнению Гельмгольца, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этого уравнения удовлетворяли тождеству

$$4\left(\frac{\partial}{\partial z_+}\mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_-\mathbf{Z}_+\right) + k_0^2\mathbf{I} = 0. \tag{34}$$

Если выполняются условия (30)–(33), то (34) сводится к тождествам

$$\sum_{n=1}^{N} C_{n-}^{m+} C_{m+}^{n-} = -\frac{k_0^2}{4}, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{N} C_{n+}^{m-} C_{m-}^{n+} = -\frac{k_0^2}{4}, \tag{36}$$

при всех $m = 1 \ldots 4$.

Уравнения (30), (31), (35) и (36) можно переписать в форме

$$\sum_{l=1}^{N} C_{l-}^{m+} C_{n+}^{l-} = -\delta_{mn}\frac{k_0^2}{4}, \tag{37}$$

$$\sum_{l=1}^{N} C_{l+}^{m-} C_{n-}^{l+} = -\delta_{mn}\frac{k_0^2}{4}. \tag{38}$$

Это означает, что матрица, составленная из элементов $2C_{n-}^{m+}/(\mathrm{i}\,k_0)$ является обратной к матрице, составленной из элементов $2C_{n+}^{m-}/(\mathrm{i}\,k_0)$. Очевидно, равенства (37) и (38) эквивалентны.

Таким образом, условия совместности и “гельмгольцевости” координатных уравнений можно записать в матричной форме

$$\widehat{\mathbf{C}}_+^+\mathbf{C}_-^+ + \mathbf{C}_-^+\widehat{\mathbf{C}}_-^- = 0, \tag{39}$$

$$\mathbf{C}_+^-\mathbf{C}_-^+ = -\frac{k_0^2}{4}\mathbf{I}. \tag{40}$$

Пусть известно одно решение $\mathbf{u}$ координатных уравнений, представляющее собой вектор, составленный из краевых функций Грина. Покажем, что на основе этого решения можно построить N линейно независимых решений координатных уравнений. Новые решения не будут однозначными на исходной многолистной поверхности.

Теорема 3. *Пусть* Γ — *контур на многолистной поверхности, концы которого уходят на бесконечность. Тогда интеграл*

$$\mathbf{u}_\Gamma(p) = \int\limits_\Gamma [G(p,p')\,\partial_n \mathbf{u}(p') - \partial_n G(p,p')\,\mathbf{u}(p')]dl, \qquad (41)$$

где n — *нормаль к контуру* Γ, G — *функция Грина неограниченной плоскости*

$$G(p,p') = -\frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k_0|p\,p'|),$$

определяет функцию, не имеющую особенностей в односвязной области, ограниченной контуром Γ *и бесконечно большой дугой, "соединяющей концы" контура* Γ. *Эта функция удовлетворяет в данной области уравнению Гельмгольца, условию излучения и координатным уравнениям.*

Доказательство. Предположение о том, что волновое число k_0 имеет малую мнимую добавку, позволяет сделать оценки роста подынтегральной функции и показать, что интеграл сходится и определяет функцию, не имеющую особенностей. По построению, эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Оценки роста показывают, что функция удовлетворяет условию излучения. Самая сложная часть доказательства — пункт, касающийся координатных уравнений.

Воспользуемся координатными уравнениями в неявной форме, а именно (24), (25), (26). Каждое из этих уравнений может быть записано в виде

$$(\mathbf{e}, \partial_q \mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u}) = 0, \qquad (42)$$

где $\mathbf{e}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные вектор-строки размерности $2N$, ∂_q — оператор дифференцирования по угловой или линейной координате.

Обозначим оператор в правой части (41) как L, т.е.

$$\mathbf{u}_\Gamma = L\mathbf{u}.$$

Покажем, что

$$\partial_q L\mathbf{u} = L\partial_q \mathbf{u}. \qquad (43)$$

Выполним доказательство на физическом уровне строгости. Рассмотрим исходную функцию $\mathbf{u}(q)$ и функцию $\mathbf{u}(q+dq)$ (явно указана зависмость только от одной координаты, по которой происходит дифферецирование). Заметим, что

$$\mathbf{u}_\Gamma(q+dq) = L'\mathbf{u}(q+dq), \qquad (44)$$

где L' — интегральный оператор, аналогичный L, но с контуром интегрирования, смещенным на dq.

Поскольку $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, можно применить теорему Грина и деформировать контур интегрирования:

$$L'\mathbf{u}(q+dq) = L\mathbf{u}(q+dq).$$

Из линейности оператора L получаем (43). Подействовав оператором L на (42), получаем утверждение теоремы. □

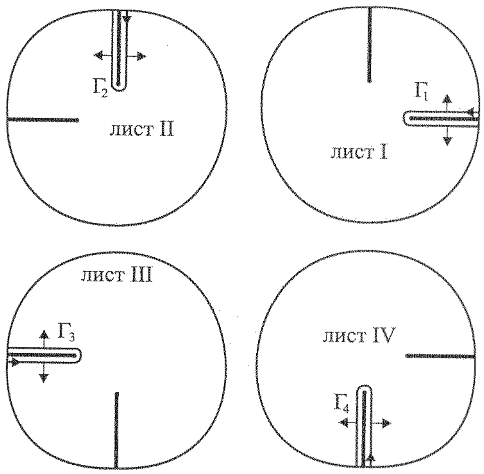

Рис. 4. Контура для вычисления различных решений координатных уравнений.

Линейно независимые решения можно получить, выбирая контура интегрирования окружающими одну из точек ветвления. Так для поверхности, изображенной на Рис. 2, контура выбираются, как показано на Рис. 4. В результате строятся четыре решения координатных уравнений. Их диаграммы направленности образуют базис решений *спектрального уравнения*.

6. Спектральное уравнение

Выведем спектральное уравнение, т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее диаграммы направленности краевых функций Грина. При выводе будем пользоваться координатными уравнениями.

Запишем асимптотику решения $\mathbf{u}$ в дальнем поле:

$$\mathbf{u} = \frac{e^{\mathrm{i}\,k_0 r - \mathrm{i}\,\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \mathbf{S}(\varphi) + O(e^{\mathrm{i}\,k_0 r} r^{-3/2}), \tag{45}$$

где $\mathbf{S} = (S^{1+}, \ldots, S^{N+}, S^{1-}, \ldots, S^{N-})^T$.

Представим вектор $\mathbf{S}$ в блочной форме, т.е. составленным из двух векторов-столбцов размерности N:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Теорема 4. *Вектор-столбцы $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$ удовлетворяют соотношению*

$$\mathbf{U}^- = \frac{2\,\mathrm{i}}{k_0} e^{\mathrm{i}\,\varphi} \mathbf{C}_+^- \mathbf{U}^+. \tag{47}$$

Вектор $\mathbf{U}^+$ удовлетворяет спектральному уравнению

$$\frac{d}{d\varphi}\mathbf{U}^+(\varphi) = -\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\mathbf{I} + \mathrm{i}\,\widehat{\mathbf{C}}_+^+ + \frac{e^{-\mathrm{i}\,\varphi} k_0}{2}\mathbf{P} + \frac{2e^{\mathrm{i}\,\varphi}}{k_0}\mathbf{C}_-^+ \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_+^-\right) \mathbf{U}^+(\varphi). \tag{48}$$

Доказательство. Перепишем координатные уравнения (21) в цилиндрических координатах ($r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \operatorname{arctg} y/x$):

$$\partial_r \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{z_+ z_-}} (z_+ \mathbf{Z}_+ + z_- \mathbf{Z}_-)\, \mathbf{u}, \tag{49}$$

$$\partial_\varphi \mathbf{u} = \mathrm{i}(z_+ \mathbf{Z}_+ - z_- \mathbf{Z}_-)\, \mathbf{u}. \tag{50}$$

Подставим асимптотику (45) в (49). В старшем порядке по r получим алгебраическое линейное уравнение для $\mathbf{S}$:

$$\mathrm{i}\,k_0 \mathbf{S}(\varphi) = -2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{C}_-^+ \\ e^{\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{C}_+^- & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S}(\varphi). \tag{51}$$

Отсюда получаем соотношение (47).

Подставим (45) в (50). В старшем порядке по r получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $\mathbf{S}(\varphi)$:

$$\frac{d}{d\varphi}\mathbf{S}(\varphi) = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} \mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_+^+ & e^{-2\,\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{P}\mathbf{C}_-^+ - \mathbf{C}_-^+ \bar{\mathbf{P}} \\ \mathbf{C}_+^- \mathbf{P} - e^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_+^- & -(\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_-^-) \end{pmatrix} \mathbf{S}(\varphi). \tag{52}$$

Подставляя (47) в (52), получаем уравнение (48). □

Если $\mathbf{u}$ — решение координатного уравнения, то его диаграмма направленности (точнее, вектор, составленный из ее N первых компонент) представляет собой решение соответствующего спектрального уравнения. Построим обратный переход, т.е. по решению спектрального уравнения вычислим решение координатного.

Теорема 5. *Пусть вектор $\mathbf{U}^+$ удовлетворяет спектральному уравнению (48) на комплексной плоскости φ, а вектор $\mathbf{U}^-$ связан с $\mathbf{U}^+$ соотношением (47). Пусть вектор $\mathbf{S}$ составлен из $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$ (см. (46)). Тогда интеграл*

$$\mathbf{u}(R,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/2+\mathrm{i}\,\infty}^{\pi/2-\mathrm{i}\,\infty} e^{\mathrm{i}\,k_0 R\cos\theta}\mathbf{S}(\theta+\varphi)d\theta \tag{53}$$

сходится при всех действительных φ и $R > \max(|p_m|)$ и удовлетворяет координатным уравнениям (21) в этой области. Диаграмма направленности поля $\mathbf{u}$ в дальней зоне есть $\mathbf{S}$.

Предполагается, что замена $(R,\varphi)\to(x,y)$ дается формулами $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, а замена $(x,y)\to(z_+,z_-)$ дается формулами (4).

Доказательство. Сходимость интеграла устанавливается с помощью выписанных ниже асимптотик (62) и (63).

Непосредственной проверкой устанавливается, что вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения в тех областях, где он определяется интегралом (53). То, что его диаграмма направленности совпадает с $\mathbf{S}$, проверяется с помощью метода стационарной фазы.

Докажем, что поле $\mathbf{u}$ удовлетворяет координатным уравнениям (21). Вычислим производные поля $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_+} = \frac{\mathrm{i}\,k_0}{4\pi} \int\limits_{-\pi/2+\mathrm{i}\,\infty}^{\pi/2-\mathrm{i}\,\infty} e^{-\mathrm{i}\,\varphi} e^{\mathrm{i}\,k_0 R\cos\theta}\mathbf{S}(\theta+\varphi)d\theta, \tag{54}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_-} = \frac{\mathrm{i}\,k_0}{4\pi} \int\limits_{-\pi/2+\mathrm{i}\,\infty}^{\pi/2-\mathrm{i}\,\infty} e^{\mathrm{i}\,\varphi} e^{\mathrm{i}\,k_0 R\cos\theta}\mathbf{S}(\theta+\varphi)d\theta, \tag{55}$$

Интегралы (54) и (55) вычисляются следующим способом. Запишем (47) и (48) в форме системы (51), (52). Комбинируя эти два уравнения и используя соотношения (40), (38), получаем

$$\frac{d}{d\varphi}\mathbf{S} = (e^{\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{K}_+ + e^{-\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{K}_-)\mathbf{S}, \tag{56}$$

$$\mathbf{K}_- = \frac{2}{k_0}\begin{pmatrix} -k_0^2\mathbf{P}/4 & \mathbf{C}_-^+/2 + \widehat{\mathbf{C}}_+^+\mathbf{C}_-^+ \\ 0 & \mathbf{C}_+^-\mathbf{P}\mathbf{C}_-^+ \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_+ = \frac{2}{k_0}\begin{pmatrix} -\mathbf{C}_-^+\mathbf{P}_-\mathbf{C}_+^- & 0 \\ -(\mathbf{C}_+^-/2 + \widehat{\mathbf{C}}_-^-\mathbf{C}_+^-) & k_0^2\bar{\mathbf{P}}/4 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2+\mathrm{i}\,\infty}^{\pi/2-\mathrm{i}\,\infty} e^{\mathrm{i}\,k_0 R\cos\theta}\frac{\partial\mathbf{S}(\theta+\varphi)}{\partial\varphi}d\theta = \mathrm{i}\left(z_+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_+} - z_-\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_-}\right). \tag{57}$$

Подставляя (56) в (57), получаем соотношение

$$\left(z_- - \frac{2}{k_0}\mathbf{K}_+\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_-} = \left(z_+ + \frac{2}{k_0}\mathbf{K}_-\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z_+}. \tag{58}$$

Подставляя (51) в (53), получаем второе соотношение:

$$\frac{4}{k_0^2}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C}_-^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} + \frac{4}{k_0^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}_+^- & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\bar{z}} = \mathbf{u} \tag{59}$$

Разрешая (58) и (59) как систему из двух линейных уравнений относительно $\partial\mathbf{u}/\partial z_+$ и $\partial\mathbf{u}/\partial z_-$, получаем (21). □

7. Свойства решений координатных и спектральных уравнений

Свойства решений координатных уравнений

Сформулируем некоторые элементарные свойства решений координатных и спектральных уравнений. Эти свойства могут быть получены стандартными методами теории дифференциальных уравнений, поэтому приводятся здесь без доказательств.

Утверждение 1. *Координатные уравнения* (21) *имеют особые точки, образующие (комплексные) прямые $z_+ = p_m$ и $z_- = \bar{p}_m$, $m = 1 \dots N$. В каждой из особых точек имеется базис из $2N$ решений. $2N-1$ из этих решений регулярны во всех точках соответствующей прямой, а одно имеет асимптотику следующего вида: для прямой $z_+ = p_m$ это*

$$u^{n+}(z_+, z_-) = \delta_{m,n}(z_+ - p_m)^{-1/2} - 2\widehat{C}^{n+}_{m+}(z_+ - p_m)^{1/2}\Phi^{n+}_{m+}(z_+, z_-),$$

$$u^{n-}(z_+, z_-) = -2C^{n-}_{m+}(z_+ - p_m)^{1/2}\Phi^{n-}_{m+}(z_+, z_-),$$

а для прямой $z_- = \bar{p}_m$ это

$$u^{n-}(z_+, z_-) = \delta_{m,n}(z_- - \bar{p}_m)^{-1/2} - 2\widehat{C}^{n-}_{m-}(z_- - \bar{p}_m)^{1/2}\Phi^{n-}_{m-}(z_+, z_-).$$

$$u^{n+}(z_+, z_-) = -2C^{n+}_{m-}(z_- - \bar{p}_m)^{1/2}\Phi^{n+}_{m-}(z_+, z_-).$$

Символы Φ с различными индексами обозначают произвольные функции, регулярные и равные единице в точках соответствующих прямых.

Данное утверждение нетрудно проверить. Построим ограничение координатных уравнений на множество одномерных окрестностей, перпедендикулярных одной из прямых и пересекающих ее. С помощью этого ограничения устанавливается общий вид асимптотик. Затем строится ограничение координатных уравнений на саму прямую. С помощью этого устанавливаются коэффициенты в асимптотиках.

Утверждение 2. *При любом фиксированном значении z_+/z_- и больших значениях $|z_+z_-|$ координатные уравнения* (21) *имеют базис из $2N$ решений, N из которых ведут себя как*

$$\mathbf{u}_j = \frac{\exp\{\mathrm{i}\, k_0\sqrt{z_+z_-} - \mathrm{i}\,\pi/4\}}{\sqrt{2\pi k_0}(z_+z_-)^{1/4}}(\mathbf{U}_j(z_+/z_-) + O(1/\sqrt{z_+z_-})),$$
$$j = 1 \dots N, \quad (60)$$

а четыре других как

$$\mathbf{u}_j = \frac{\exp\{-\mathrm{i}\, k_0\sqrt{z_+z_-} - \mathrm{i}\,\pi/4\}}{\sqrt{2\pi k_0}(z_+z_-)^{1/4}}(\mathbf{U}_j(z_+/z_-) + O(1/\sqrt{z_+z_-})),$$
$$j = N+1 \dots 2N, \quad (61)$$

где $\mathbf{U}_j$ *— векторные функции одной комплексной переменной.*

Данное утверждение может быть получено ограничением координатных уравнений на прямые $z_+/z_- = \text{const}$.

Заметим, что для больших действительных x и y фиксированное значение z_+/z_- соответствует заданному направлению в плоскости (x, y). Утверждение, сформулированное выше, означает, что в каждом направлении имеется четыре решения, удовлетворяющие условию излучения и четыре решения, не удовлетворяющие этому условию.

Очевидно если решение удовлетворяет условию излучения для некоторого выбранного направления, то продолжение этого решения должно удовлетворять условию излучения для близких направлений. В частности, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть решение* $\mathbf{u}$ *удовлетворяет условию излучения для некоторого направления в (действительной) плоскости* (x, y). *Тогда оно удовлетворяет условию излучения для всех направлений, которые можно получить из данного непрерывным перемещением бесконечно удаленной точки в этой плоскости.*

Из данного утверждения не следует, что если решение удовлетворяет условию излучения для одного направления, то оно удовлетворяет условию излучения везде. Некоторые (действительные) ветви решения могут получаться в результате продолжения вдоль контура, с необходимостью проходящего в конечной области (между точками ветвления поверхности).

Свойства решений спектральных уравнений

Рассмотрим комплексную плоскость угловой переменной φ. Имеет смысл изучать асимптотику решений спектральных уравнений в двух различных областях, а именно при больших положительных значениях $\operatorname{Im}\varphi$ и при больших отрицательных значениях $\operatorname{Im}\varphi$. Соответственно, будем говорить о *верхней* и *нижней* асимптотике.

На языке координатных уравнений верхняя и нижняя асимптотика соответствует большим значениям $|z_+ z_-|$, при этом верхняя соответствует окрестности набора параллельных сингулярных прямых $z = p_m$, а нижняя асимптотика соответствует окрестности набора $z_- = \bar{p}_m$.

Утверждение 4. *Существуют решения* $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_N$ *спектрального уравнения* (48) *имеющие при больших положительных* $\mathrm{Im}\,\varphi$ *внутри некоторых полос по* $\mathrm{Re}\,\varphi$ *следующие асимптотики:*

$$V_m^n = e^{-\mathrm{i}\,\varphi/2}(\delta_{m,n} + O(e^{\mathrm{i}\,\varphi}))F_m^{\mathrm{up}}(\varphi). \tag{62}$$

Существуют также решения $\mathbf{W}_1 \dots \mathbf{W}_N$ *спектрального уравнения* (48), *имеющие при больших отрицательных* $\mathrm{Im}\,\varphi$ *внутри некоторых полос по* $\mathrm{Re}\,\varphi$ *следующие асимптотики:*

$$W_m^n = \frac{2\,\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\,\varphi/2}}{k_0}(C_{m-}^{n+} + O(e^{-\mathrm{i}\,\varphi}))F_m^{\mathrm{dn}}(\varphi), \tag{63}$$

Экспоненциальные множители в верхних и нижних полупоплосах, соответственно, определяются формулами

$$F_m^{\mathrm{up}} = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\,k_0}{2}p_m e^{-\mathrm{i}\,\varphi}\right\}, \quad m = 1 \dots N,$$

$$F_m^{\mathrm{dn}} = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\,k_0}{2}\bar{p}_m e^{\mathrm{i}\,\varphi}\right\}, \quad m = 1 \dots N.$$

Утверждение 5. *Пусть* $\mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_N$ — *произвольные решения спектрального уравнения* (48). *Тогда определитель, составленный из этих решений, определяется формулой*

$$\mathrm{Det}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N) = Ae^{-2\,\mathrm{i}\,\varphi}\prod_{m=1}^{N} F_m^{\mathrm{up}}(\varphi)F_m^{\mathrm{dn}}(\varphi), \tag{64}$$

где A — *константа.*

Данное утверждение [9] следует из того, что определитель, составленный из решений, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dk}\mathrm{Det}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N) = \mathrm{Sp}[\mathbf{K}]\mathrm{Det}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N),$$

где символом $\mathrm{Sp}[\mathbf{K}]$ обозначен след матрицы коэффициентов спектрального уравнения (48).

Пусть векторы $\mathbf{U}_1(\varphi) \dots \mathbf{U}_N(\varphi)$ представляют собой линейно независимые решения спектрального уравнения (48). Составим *матричное решение* этого уравнения

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1(\varphi), \dots, \mathbf{U}_N(\varphi)). \tag{65}$$

Используя $\mathbf{U}$ определим $\mathbf{U}^A$ с помощью соотношения

$$\mathbf{U}^A(\varphi) = -\mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\,\varphi}((\mathbf{U}(\varphi+\pi))^{-1})^T, \tag{66}$$

т.е. матрица сдвигается, инвертируется, транспонируется и умножается на скалярный множитель.

Утверждение 6. *Пусть коэффициенты спектрального уравнения* (48) *удовлетворяют* (27). *Пусть* $\mathbf{U}$ *— матричное решение этого уравнения. Тогда столбцы матрицы* $\mathbf{U}^A$ *удовлетворяют уравнению* (48).

Данное утверждение нетрудно проверить непосредственно. Оно следует из соотношения симметрии (27).

8. Заключение

Обобщаются результаты [6] на случай дифракционной задачи, сводящейся к задаче о распространении волн на произвольной многолистной поверхности с конечным числом листов и точек ветвления. Предполагается, что все точки ветвления имеют второй порядок. Это означает, что все рассеиватели имеют нулевую толщину, не имеют изломов, и на обеих сторонах каждого рассеивателя заданы одинаковые граничные условия (Дирихле или Неймана).

Сформулирована задача о распространении на многолистной поверхности. Определены краевые функции Грина поверхности и выведена формула расщепления, выражающая диаграмму направленности исходной задачи через диаграммы направленности краевых фукций Грина. Для краевых функций Грина выведены координатные уравнения. Для диаграмм направленности краевых функций Грина выведены спектральные уравнения. Исследованы асимптотики решений координатных и спектральных уравнений.

Решение исходной дифракционной задачи заключается в решении спектрального уравнения и применении формулы расщепления. Однако в коэффициенты спектрального уравнения входят неизвестные константы (они обозначены в матричной форме как $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ и $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$). Для определения этих констант необходимо сформулировать спектральную задачу, т.е. наложить ограничения на матрицы связи. Это будет сделано в следующей работе.

Работа при финансовой поддержке гранта "Научные школы" НШ-4449.2006.2.

Литература

1. A. Sommerfeld, *Mathematische Theorie der Diffraction.* — Math. Ann. **47**, 317–374 (1896).
2. G. E. Latta, *The solution of a class of integral equations.* — J. Rat. Mech. Anal. **5**, 821–834 (1956).
3. M. H. Williams, *Diffraction by a finite strip.* — Quart. J. Mech. Appl. Math. **35**, 103–124 (1982).
4. A. V. Shanin, *Diffraction of a plane wave by two ideal strips.* — Quart. Jl. Mech. Appl., Math. **56**, 187–215 (2003).
5. A. V. Shanin, A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems. — *Wave Motion* **37**, 241–256 (2003).
6. A. V. Shanin, E. M. Doubravsky, Wave propagation on 2D multi-sheet surfaces. Coordinate and spectral equations. — *Submitted J. Eng. Math.*
7. N. R. T. Biggs, D. Porter, D. S. G. Stirling, *Wave diffraction through a perforated breakwater.* — Quart. J. Mech. Appl. Math. **53**, 375–391 (2000).
8. R. V. Craster, A. V. Shanin, E. M. Doubravsky, *Embedding formulae in diffraction theory.* — Proc. Roy. Soc. Lond. A **459**, 2475–2496 (2003).
9. В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры.* М., Наука, Физматлит.

Shanin A. V. Edge Green's functions on a multi-sheet surface. Asymptotics of solutions of coordinate and spectral equations.

The problems of of diffraction by a strip or a set of strips with ideal boundary conditions, as well as some other problems, can be reduced to the scattering problems on multi-sheet surfaces by applying the method of reflections. Further reducing of these problems can be achieved by applying the embedding formulae. As the result, the solution of the problem with a plane wave incidence becomes expressed through edge Green's functions, i.e. the fields excited by dipole sources localized in the branch points of the surface.

The paper is dedicated to finding the edge Green's functions. Two systems of differential equations are derived to solve this problem, namely the coordinate and spectral equations. The proprties of solutions for those systems are studied.

МГУ им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: andrey_shanin@mail.ru

Поступило 11 января 2007 г.