Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, Ю. А. Сурков

О СОПОСТАВЛЕНИИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ УПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ТОНКОСЛОИСТЫХ СРЕДАХ. 2

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой рассматривается задача на распространение низкочастотных волн для пачки упругих слоев, лежащей на упругом полупространстве. Построены точные решения в форме повторных интегралов.

В предлагаемой статье представление решения задачи дается методом наложения кратных волн. Прежде чем перейти к непосредственному изложению этой работы, нам представляется уместным сделать небольшой обзор литературы, соответствующей данной проблеме. Как известно, кратные волны являются помехами при выделении на их фоне полезных отраженно-преломленных волн, несущих информацию о структуре среды. Именно это обстоятельство привлекло исследователей к изучению кратных волн. В работе [2] рассматривалась модель, состоящая из двух произвольных плоскопараллельных упругих слоев, находящихся в жестком контакте с упругим полупространством. Расчеты всех элементарных волн проводились, как правило, в нулевом приближении лучевого метода [3]. В этой работе предложена классификация кратных отраженных волн, подразделяющая все их многообразие на семейства кинематических аналогов, состоящих, в свою очередь, из групп волн, эквивалентных друг другу в динамическом отношении. Продолжение идей вычисления полей кратных волн, изложенных в [2], нашло отражение в работе [4] для многослойных сред. При этом решались следующие задачи: 1) определение числа волн, содержащихся в семействе кинематических аналогов; 2) указание способов подразделения этого семейства на группы динамических аналогов; 3)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант N 05-01-00936.

подсчет числа волн в каждой из этих групп. В работе [5] развиваются инженерные методы расчета интенсивности суммарных кратных волн в многослойных средах при любом расположении источника и приемника. Количественное исследование интерференционных волн, распространяющихся в плоскопараллельных упругих средах проводилось в работах [6, 7]. Там рассмотрена задача на распространение волн SH в слое, лежащем на полупространстве. Поле представлялось в виде разложения по кратным волнам. Полученные результаты были дополнены в работе [8]. Там же приведены расчеты волновых полей в полупространстве при различных скоростных и плотностных перепадах на границе раздела. В статье [9] было произведено суммирование всех образующихся при отражении и преломлении волн в слоистой упругой среде и показано, что суммарное волновое поле совпадает с полем, которое удовлетворяет условиям на всех границах слоев.

В статье [10] обсуждаются подходы к вычислению волновых полей в упругих средах с плоскопараллельными изотропными слоями на примере простой эталонной задачи для упругого слоя, расположенного между двумя упругими полупространствами. Поле волн представляется в виде ряда контурных интегралов, вычисление которых на разных участках пути интегрирования производится различными способами. Показаны пути преодоления затруднений при интегрировании в области особых точек, где подинтегральные функции обращаются в бесконечность различных порядков.

В работе [11] предложен алгоритм, позволяющий вычислять поле отраженных от слоя волн для модели слоя, находящегося между двумя полупространствами. Теоретические сейсмограммы строились методом наложения волн. При этом учитывались всевозможные обменные волны, сформированные в слое. Продолжение расчетов теоретических сейсмограмм нашло отражение в статье [12] при наличии в среде высокоскоростного и низкоскоростного слоев, а также в случае ступенчатого возрастания скорости. Для вычисления отдельных отраженных волн, как правило, использовалось нулевое приближение лучевого метода.

Статьи [13, 14, 15] посвящены расчетам волновых полей в многослойных средах при различной геометрии положения источник–приемник. Приводятся сейсмограммы волн, распространяющихся в среде, состоящей из 4-х слоев. Сейсмограммы рассчитываются методом суммирования кинематических и динамических аналогов волн.

Рассмотренные задачи не потеряли актуальности и в настоящее время. Для примера приведем ссылку на одну из последних работ, известных авторам [16]. В этой работе проблема расчета в виде разложения по отдельным кратным волнам решается несколько иным способом.

В настоящей статье рассматривается задача для упругого слоя $0 < z < h$, $(\nu = 1)$ и полупространства $z > h$, $(\nu = 2)$ (находящихся в жестком контакте) методом наложения комплексных плоских волн.

Как и в [1], представления плоских волн даются здесь в форме повторных интегралов для потенциалов φ_ν и ψ_ν при индексах $\nu = 1$ и $\nu = 2$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu \\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(z,t,k)\cos kx \\ \Psi_\nu(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\} dk,$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu \\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}A_\nu^- e^{-k(z-H_\nu)\alpha_\nu(\eta)} + A_\nu^+ e^{k(z-H_\nu)\alpha_\nu(\eta)} \\ B_\nu^- e^{-k(z-H_\nu)\beta_\nu(\eta)} + B_\nu^+ e^{k(z-H_\nu)\beta_\nu(\eta)}\end{matrix}\right\} F(s)e^{k\nu\eta t}d\eta, \tag{1}$$

где $\sigma > 0$. При этом применяются следующие обозначения:

$$v = v_s^{(1)}, \quad s = kv\eta, \quad \gamma_\nu = \frac{v}{v_p^\nu}, \quad \delta_\nu = \frac{v}{v_s^{(\nu)}},$$
$$H_1 = 0, \quad H_2 = h, \quad F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{dt}, \quad (\mathrm{Re}\, s = \sigma > 0), \tag{2}$$

$$\alpha_\nu(\eta) = \sqrt{1+\gamma_\nu^2\eta^2}, \quad \beta_\nu(\eta) = \sqrt{1+\delta_\nu^2\eta^2}, \tag{3}$$

$$g_\nu = 2 + \delta_\nu^2\eta^2, \quad R_\nu(\eta) = g_\nu^2 - 4\alpha_\nu\beta_\nu, \quad T_\nu = g_\nu^2 + 4\alpha_\nu\beta_\nu \tag{4}$$

Все введенные функции регулярны при $\mathrm{Re}\,\eta > 0$, а ветви радикалов α_ν и β_ν определены условиями

$$\arg\alpha_\nu(\eta) = \arg\beta_\nu = 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0 \tag{5}$$

на основном листе комплексной плоскости (η), разрезанной вдоль полупрямых

$$\operatorname{Im}\eta = \pm\left(\frac{1}{\delta_\nu} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma_\nu}\right), \quad \operatorname{Re}\eta < 0, \tag{5'}$$

параллельных отрицательной части вещественной оси. В последующем тексте удобнее использовать обозначения (1)–(5), чем соответствующие формулы из [1].

1. В рамках формализма, изложенного кратко в п. 1 и 2 [1], построение потенциалов φ_ν и ψ_ν ($\nu = 1$ и $\nu = 2$) в слое $\nu = 1$ и полупространстве $z > h$ $\nu = 2$ производится путем применения трех вспомогательных задач.

Во-первых, задача для упругого полупространства $z > 0$, возбуждаемого выбранной нами поверхностной плотностью силы

$$\vec{t}_z|_{z=0} = -\delta(x) f(t)\vec{k}, \tag{6}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, а $f(t)$ – зависимость источника от времени, включаемого в момент $t = 0$.

Следуя указанному формализму легко находим

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\varphi_1^0\\ \psi_1^0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_1^0(z,t,k)\cos kx\\ \Psi_1^0(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\} dk\\ &\left.\begin{matrix}\Phi_1^0\\ \Psi_1^0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}A_0(\eta)e^{-k(z-h)\hat{\alpha}_1(\eta)}\\ B_0(\eta)e^{-k(z-h)\hat{\beta}_1(\eta)}\end{matrix}\right\} F(s)e^{k\nu\eta t}d\eta\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

где амплитудные функции A_0 и B_0 определяются выражениями

$$A_0 = (p_1^0, \eta)e^{-kf_0(\eta)}, \quad B_0 = (s_1^0, \eta)e^{-k\tilde{f}_0(\eta)} \tag{8}$$

через комплексные функции направленности источника (6)

$$(p_1^0, \eta) = \frac{-g_1(\eta)}{\mu k\eta R(\eta)}, \quad (s_1^0, \eta) = \frac{-2\alpha_1(\eta)}{\mu k\eta R(\eta)} \tag{9}$$

и комплексные набеги фаз

$$f_0(\eta) = h\alpha_1(\eta), \quad \tilde{f}_0(\eta) = h\beta_1(\eta). \tag{9'}$$

Во-вторых, задача на отражение–преломление падающей плоской волны типа (7)–(9) от границы $z = h$ раздела слоя $\nu = 1$ и полупространства $\nu = 2$, на которой должны выполняться при $\nu = 1$ условия из (11) в [1] жесткости контакта сред.

Во множестве отраженных в двухслойной среде ($\nu = 1$ и $\nu = 2$) волн все волны типа R_1^-, бегущие в верх в слое $\nu = 1$, имеют одинаковую структуру. Поэтому для представления потенциала любой такой волны достаточно воспользоваться формулами (7), в которых амплитудные множители A_0 и B_0 заменены другими $A_1^{-0}(\eta)$ и $B_1^{-0}(\eta)$.

Таким образом, в обсуждаемой задаче по полю падающей волны из (7) следует определить представления потенциалов (φ_1^+ и ψ_1^+) отраженных и (φ_2^- и ψ_2^-) преломленных волн, имеющих стандартную структуру

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\varphi_1^+\\ \psi_1^+\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_1^+(z,t,k)\cos kx\\ \Psi_1^+(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\} dk\\ &\left.\begin{matrix}\Phi_1^+\\ \Psi_1^+\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}A_1^+(\eta)e^{k(z-h)\alpha_1(\eta)}\\ B_1^+(\eta)e^{k(z-h)\beta_1(\eta)}\end{matrix}\right\} F(s)e^{k\nu\eta t}d\eta \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\varphi_2^-\\ \psi_2^-\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_2^-(z,t,k)\cos kx\\ \Psi_2^-(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\} dk\\ &\left.\begin{matrix}\Phi_2^-\\ \Psi_2^-\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}A_2^-(\eta)e^{-k(z-h)\alpha_2(\eta)}\\ B_2^-(\eta)e^{-k(z-h)\beta_2(\eta)}\end{matrix}\right\} F(s)e^{k\nu\eta t}d\eta \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где амплитудные множители (A_1^+, B_1^+) и (A_2^-, B_2^-) должны выражаться через амплитудные функции $A_1^{-0}(\eta)$ и $B_1^{-0}(\eta)$ падающей волны (7) так, что выполняются условия жесткого контакта между слоем $\nu = 1$ и полупространством $\nu = 2$.

Подстановка представлений для потенциалов (φ_1^0, ψ_1^0), $\varphi_1^+, \psi_1^+)$ и (φ_2^-, ψ_2^-) падающей, отраженной и преломленной волн из (7), (10) и (11) в условия контакта (11) из [1] при $z = h$ подобна (но не тождественна) тому, как это сделано в п. 3 [1], приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&A_1^+ + \beta_1 B_1^+ - A_2^- + \beta_2 B_2^- = -A_1^{-0} + \beta_1 B_1^{-0}\\
&\alpha_1 A_1^+ + B_1^+ + \alpha_2 A_2^- - B_2^- = \alpha_1 A_1^{-0} - B_1^{-0}\\
&2\alpha_1 A_1^+ + g_1 B_1^+ + \sigma_2[2\alpha_2 A_2^- - g_2 B_2^-] = 2\alpha_1 A_1^{-0} - g_1 B_1^{-0}\\
&g_1 A_1^+ + 2\beta_1 B_1^+ - \sigma_2[g_2 A_2^- - 2\beta_2 B_2^-] = -g_1 A_1^{-0} + 2\beta_1 B_1^{-0}\\
&\sigma_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}
\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

При решении такой системы следует порознь полагать в правых частях равенств сначала $B_1^{-0} = 0$, что отвечает случаю падения на границу $z = h$ продольной волны с потенциалом φ_1^0, а затем $A_1^{-0} = 0$, что соответствует падению на границу $z = h$ поперечной волны с потенциалом ψ_1^0.

Решение $(A_1^+, B_1^+, A_2^-, B_2^-)$ такой системы в случае $B_1^{-0} = 0$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= (p_1^{-0}, p_1^+) A_1^{-0}, \quad & B_1^+ &= (p_1^{-0}, s_1^+) A_1^{-0},\\
A_1^- &= (p_1^{-0}, p_2^-) A_1^{-0}, \quad & B_2^- &= (p_1^{-0}, s_2^-) A_1^{-0},
\end{aligned} \tag{13}$$

где множители в скобках обозначают комплексные коэффициенты отражения–преломления волн по потенциалам.

В случае же $A_1^{-0} = 0$ (падает поперечная волна) решение системы представляется в виде

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= (s_1^{-0}, p_1^+) B_1^{-0}, \quad & B_1^+ &= (s_1^{-0}, s_1^+) B_1^{-0},\\
A_2^- &= (s_1^{-0}, p_2^-) B_1^{-0}, \quad & B_2^- &= (s_1^{-0}, s_2^-) B_1^{-0}.
\end{aligned} \tag{13$'$}$$

Таким образом, решение второй вспомогательной задачи требует численного решения системы уравнений (12).

Остается отметить, что решение подобной же задачи для падающих (нисходящих в слое $\nu = 2$) волн φ_2^+ и ψ_2^+ сводится к подобной же системе алгебраических уравнений, отличающихся от системы (12) лишь некоторыми знаками.

Наконец, в-третьих, — вспомогательная задача на отражение от свободной от напряжений границы $z = 0$ полупространства $z > 0$ падающей волны в слое $\nu = 1$. При этом можно полагать, что падающие волны определяются формулами (10), в которых амплитудные функции A_1^+ и B_1^+ заменены на известные функции A_1^{+0} и B_1^{+0} падающей волны. Потенциалы же φ_1^- и ψ_1^- отраженных волн можно представить в виде (7), где амплитудные функции A_0 и B_0 заменены на искомые функции A_1^- и B_1^-.

Из условия $\vec{t}_z|_{z=0} = 0$ для суммарного поля, искомые амплитудные функции удается представить в виде

$$\begin{aligned} A_1^- &= (p_1^{+0}, p_1^-)A_1^{+0} + (s_1^{+0}, p_1^-)B_1^{+0}, \\ B_1^- &= (p_1^{+0}, s_1^-)A_1^{+0} + (s_1^{+0}, s_1^-)B_1^{+0}, \end{aligned} \tag{14}$$

где коэффициенты отражения имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} (p_1^{+0}, p_1^-) &= \frac{-T(\eta)}{R(\eta)}, \quad (s_1^{+0}, p_1^-) = \frac{-4\beta_1(\eta)g_1(\eta)}{R(\eta)} \\ (p_1^{+0}, s_1^-) &= \frac{-4\alpha_1(\eta)g_1(\eta)}{R(\eta)}, \quad (s_1^{+}, s_1^-) = \frac{-T(\eta)}{R(\eta)} \end{aligned}\right\}. \tag{14$'$}$$

2. Последовательное применение решений указанных вспомогательных задач приводит к множеству кратных волн в N-слойной упругой среде, которые (в любые фиксированные моменты времени t) можно рассматривать как конечное множество групп падающей волны и порожденных ею отраженных и преломленных волн. При этом каждая из волн, входящих в эту группу, обладает передним фронтом, впереди которого поле волны тождественно равно нулю.

В такой же мере любой кратной волне можно сопоставить во взаимно-однозначное соответствие луч, состоящий из последовательности звеньев, например, вида

$$R_1, R_2, \ldots, R_q R_{q+1} \ldots \equiv R_1^-, R_2^+, \ldots, R_{\nu_0}^- R_{\nu_{0+1}}^+, \ldots, R_\nu^- R_{\nu+1}^+ \ldots, \tag{15}$$

проходимых волной в порядке очередных возрастающих номеров $q \geqslant 1$, каждому из которых отвечает определенный номер ν_0 или ν рассматриваемой N-слойной упругой среды. Здесь R обозначает символ звена p^- или s^- волны. Например, звено $R_{\nu_0}^-$ отвечает волне, подходящей к границе $z = H_{\nu_0+1}$ со стороны слоя $\nu = \nu_0$. Также со стороны слоя $\nu = \nu_0$ подходит волна к границе $z = H_{\nu_0}$ вдоль звена $R_{\nu_0}^+$. При этом в последовательности (15) везде соблюдается условие связности луча, означающее, что, если, например, волна подходила к границе $z = H_{\nu_0+1}$ со стороны слоя $\nu = \nu_0$ (т.е. снизу вдоль звена $R_{\nu_0}^-$), то следующим звеном ее луча в последовательности (15) (т.е. в ее коде) может оказаться только звено типа $R_{\nu_0}^+$ или звено типа $R_{\nu_0+1}^-$ и т.д.

Последовательность звеньев (15), т.е. код волны, выписанная в порядке прохождения волной слоев ν N-слойной среды, определяет тип волны и ее аналитическое представление, например, в потенциалах φ и ψ. При этом, если представления потенциала φ_ν и ψ_ν в ν-ом слое выбрать в форме интегралов из (1), то нетрудно убедиться, что при переходе от представления с индексом $\nu = \nu_0 + 1$ к представлению при индексе $\nu = \nu_0$ подинтегральная функция внутренних интегралов по переменной η приобретает дополнительный множитель вида

$$(R_{\nu_0+1}, R_{\nu_0}) \exp(kh_\nu \alpha_{\nu_0}(\eta)).$$

Здесь выражение в скобках определяет соответствующий коэффициент отражения-преломления волны, а экспоненциальный множитель учитывает изменение в набеге фаз. Таким образом, каждой паре последовательных элементов R_q, R_{q+1} в коде (15) волны отвечает некоторая угловая точка луча волны, характеризуемая коэффициентом отражения-преломления, умноженным на экспоненту от приращения набега фаз. Далее для двухслойной среды ($N = 2$) упомянутые вопросы рассматриваются с большей подробностью.

3. Построение полей смещения кратных волн в двухслойной среде из п. 1 [1] (при $N = 2$) производится на основе решения приведенных здесь вспомогательных задач, применение которых осуществляется без дополнительных пояснений.

Последовательность же прохождения звеньев луча в форме P или S волны задается в виде кода кратной волны, который в случае рассматриваемой двухслойной среды сводится к последовательности двоичных символов

$$K_{2q}(\eta) = e_1 e_2 e_3, \dots, e_{2q}/[b_q], \tag{16}$$

подобных последовательностям символов R из п. 2. Для определенности целесообразно условиться, что символам P или S продольных и поперечных волн отвечают значки-символы $e_\nu = 1$ и $e_\nu = 0$ из двоичной системы исчисления.

На схеме, представленной на рис. 1, источник O испускает волну e_1, т.е. или волну P, или волну S, или обе такие волны одновременно. Волна e_1 доходит до границы $z = h$, отражается с коэффициентом $\chi = (e_1 \backslash e_2)$ в форме волны e_2 и распространяется к границе $z = 0$. Одновременно с этим она частично преломляется в форме волны b_1 (p или s) в полупространство $z > h$, ($\nu = 2$), где регистрируется в точке $M(x, z)$.

Отраженная же от границы $z = h$ волна e_2 (P или S) доходит до свободной границы $z = 0$ слоя $\nu = 1$ и отражается в виде волны e_3 с коэффициентом $\chi = (e_2 \setminus e_3)$. После отражения волна e_3 доходит до границы $z = h$ и отражается как волна e_4, а также преломляется как волна b_2 и регистрируется в точке $M(x, z)$ среды $\nu = 2$, и т.д.

Схема лучей на рис. 1 дает наглядные представления о структуре кратной волны в двухслойной среде. Если в (16) символы e_ν принимают значения 1 или 0 независимо друг от друга всевозможными способами, то код $K_{2q}(\eta)$ из (16) определяет множество кратных волн, состоящее, возможно, из очень большого количества $N_q = 2^{2q}$ различных кратных волн, объединяемых для удобства вычислений в серию кинематически эквивалентных групп (кинематических аналогов).

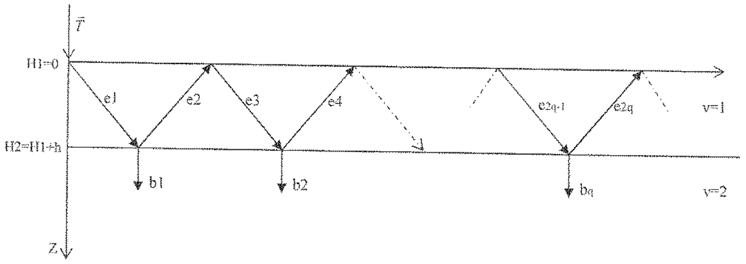

Рис. 1.

Как следует из рис. 1, структура кода K_{2q} кратных волн и построение аналитических представлений потенциалов φ_ν и ψ_ν ($\nu = 1, 2$) для любых кратных волн в двухслойной среде должно производиться на основе последовательного использования решений вспомогательных задач. Структура аналитических представлений потенциалов в случае фиксированного воздействия (например, нормального плоского источника из (3′) в [1]) сохраняет свою форму неизменной

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu \\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kx \\ \sin kx\end{matrix}\right\} \Phi(k\eta)\frac{dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}A_\nu e^{-k\tilde{f}_\nu(\eta,z)} \\ B_\nu e^{-kf_\nu(\eta,z)}\end{matrix}\right\} F(s)kve^{kv\eta t}d\eta, \tag{17}$$

при увеличении кратности волны (т.е. при увеличении числа звеньев e_ν в ее коде). При этом в представлении (17) изменяются лишь амплитудные множители A_ν и B_ν, а также – набеги фаз $\tilde{f}_\nu(\eta, z)$ и $f_\nu(\eta, z)$.

Помимо этого, вследствие однородности слоев среды и плоскопараллельности ее границ раздела, процессы отражения-преломления волн во всех подобных угловых точках системы лучей схемы из рис. 1 протекают тождественно и представляются подобными же математическими выражениями. Поэтому схемы расчетов коэффициентов χ отражения-преломления на каждом участке границы достаточно проследить лишь один раз, т.е. – в каких-либо одних подобных угловых точках системы лучей.

4. На этапе возбуждения первичной волны со звеном луча e_1 процесс протекает в точности так же, как в задаче Лэмба для упругого полупространства $z > 0$. Поэтому при возбуждении продольной и поперечной волны соответственно оказывается

$$\left.\begin{matrix} e_1 = 1, A_1 = \dfrac{-g_1 F(s)}{k^2\mu_1 R_1},\ B_1 = 0,\ \tilde{f}_1 = z\alpha_1(\eta), \\ e_1 = 0, A_1 = 0,\ B_1 = \dfrac{-2\alpha_1 F(s)}{k^2\mu_1 R_1},\ f_1 = z\beta_1(\eta) \end{matrix}\right\}. \tag{18}$$

На этапе же отражения волн типа $e_{2\nu}$ на свободной границе $z = 0$ среды коэффициенты отражения волн имеют значения из схемы

$$(e_{2\nu}, e_{2\nu+1}) = \left\{ \begin{matrix} (p_1^+, p_1^-) = \dfrac{-T_1(\eta)}{R_1(\eta)}, \\ (p_1^+, s_1^-) = \dfrac{-4\alpha_1 g_1}{R_1(\eta)}, \\ (s_1^+, p_1^-) = \dfrac{-4\beta_1 g_1}{R_1(\eta)}, \\ (s_1^+, s_1^-) = \dfrac{-T_1(\eta)}{R_1(\eta)} \end{matrix} \right\}, \tag{19}$$

в которой использованы обозначения из (2)–(4). Входящие сюда радикалы α_ν и β_ν определены условиями

$$\arg\alpha_\nu(\eta) = \arg\beta_\nu(\eta) = 0, \quad (\eta > 0) \tag{20}$$

на основном листе плоскости (η) с разрезами, проведенными от их точек ветвления

$$\eta = \pm\frac{i}{\gamma_\nu}, \quad \eta = \pm\frac{i}{\delta_\nu} \tag{20$'$}$$

на бесконечность параллельно отрицательной части вещественной оси.

Наконец, коэффициенты отражения $(e_{2\nu-1} \setminus e_{2\nu}$ и преломления $(e_{2\nu-1} \setminus b_\nu)$ на границе $z = h$ раздела тонкого слоя $(0, h)$, $\nu = 1$ и полупространства $z > h$, $\nu = 2$ определяются из системы уравнений (12) следующим образом.

В системе уравнений (12) полагается $\nu_0 = 2$ $(\nu_0 = 1)$, а относительно коэффициентов отражения-преломления волн в угловых точках схемы луча из рис. 1 учитывается замечание, сделанное в самом конце п. 3. Это позволяет интересоваться коэффициентами отражения и преломления лишь типа $(e_1 \setminus e_2)$ и $(e_1 \setminus b_1)$ и определять их значения из системы уравнений (12), в которой в качестве амплитуд падающих волн из правой части системы выбираются следующие значения:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)} & A_1^{-0} = 1, \quad B_1^{-0} = 0, \\ \text{в)} & A_1^{-0} = 0, \quad B_1^{-0} = 1 \end{array}\right\}. \tag{21}$$

При выборе соответствующего значения аргумента $\eta = \eta_0$ коэффициентов в системе уравнений (12) искомые коэффициенты отражения-преломления находятся из решений

$$A_1^+, \quad B_1^+, \quad A_2^-, \quad B_2^-$$

системы уравнений (12), правая часть которой определяется с учетом (21). В случае а) из (21) оказывается

$$\begin{aligned} A_1^+ &= (p_1^{-0}, p_1^+), \quad B_1^+ = (p_1^{-0}, s_1^+), \\ A_2^- &= (p_1^{-0}, p_2^-), \quad B_2^- = (p_1^{-0}, s_2^-). \end{aligned} \tag{22}$$

А в случае в) из (21) искомые коэффициенты выражаются соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} (s_1^{-0}, p_1^+) = A_1^+, \quad (s_1^{-0}, s_1^+) = B_1^+, \\ (s_1^{-0}, p_2^-) = A_2^-, \quad (s_1^{-0}, s_2^-) = B_2^-, \end{array}\right\}, \tag{23}$$

где A_1^+, B_1^+, A_2^- и B_2^- определены из системы уравнений (12).

Из представлений для коэффициентов (19) на первом месте которых, как и везде далее стоит символ падающей волны здесь p^+, или s^+ легко увидеть, что они имеют полюсы 2-го и 1-го порядка соответственно в точке $\eta = 0$ и в корне $\eta = i\vartheta$ $(\vartheta < 1)$ уравнения Релея. Коэффициенты из (22) и (23), определяемые из системы уравнений (12), кроме точек ветвления и корней $\eta = 0$, могут еще иметь на основном листе комплексной плоскости (η) корни Стонлея $(\eta = \pm i\chi_0)$, заключенные в промежутке

$$0 < \chi_0 < \frac{\nu_{s.\,\mathrm{inf}}}{\nu_{s1}} \tag{24}$$

где $v_{s.\,\mathrm{inf}} = \inf(v_{s1}, v_{s2})$. Следует подчеркнуть, что на основном листе комплексной плоскости (η) корни Стонлея существуют не при всех значениях параметров из (2). Поэтому прежде, чем приступить к их вычислениям при заданных значениях параметров из (2) следует выяснить вопрос о наличии или об отсутствии корней Стонлея из (24) при параметрах рассматриваемой задачи.

5. Как упоминалось выше, при прохождении отдельной кратной волны, представленной в виде ее потенциала (17), некоторого дополнительного ν-го слоя в фазовых функциях $\tilde{f}_\nu$ и f_ν из представлений (17) добавляются соответственно слагаемые $h_\nu \alpha_\nu$ или $h_\nu \beta_\nu$ типа набега фаз. А при прохождении волной участка луча, содержащего излом, отвечающий процессу отражения-преломления волны при переходе через границу раздела сред (или при отражении от такой границы), амплитудные множители A_ν и B_ν домножаются на соответствующие коэффициенты отражения преломления волн из (19), или (22) и (23).

Таким образом, если рассматривать поле смещений какой-либо отдельной кратной волны, излучаемой источником О из $(3')$ в [1], регистрируемой в точке $M = M(x,z)$ полупространства $z > h$, $(\nu = 2)$ и представленной кодом (16), то по коду сразу же выписывается соответствующее произведение

$$\Phi(\eta, k) \equiv \prod_i \chi_1 = e_1(e_1 \setminus e_2)(e_2 \setminus e_3)(e_3 \setminus e_4), \ldots, (e_{2q-1} \setminus e_{2q}/b_q) \tag{25}$$

всех коэффициентов отражения-преломления, испытанных волной при прохождении ею вдоль луча ОМ, а также выписываются фазовые функции

$$
\begin{aligned}
f_0 &= h[n\alpha_1(\eta) + m\beta_1(\eta)] + (z-h)\alpha_2(\eta),\\
\tilde{f}_0 &= h[n\alpha_1(\eta) + m\beta_1(\eta)] + (z-h)\beta_2(\eta),
\end{aligned} \tag{26}
$$

набегов фаз соответственно для P и S компонентов поля смещений, регистрируемого в точке $M(x,z)$ волны. Здесь величина n (величина m) обозначает число P звеньев (S звеньев), образованных лучем волны на пути от точки O до точки M. При этом, как уже упоминалось, вследствие плоскопараллельности слоев среды, выполняются очевидные равенства

$$
(e_1 \setminus e_2) = \ldots(e_{2q-1} \setminus e_{2q}), \quad (e_2 \setminus e_3) = \ldots(e_{2q-1} \setminus e_{2q}), \tag{27}
$$

при всех значениях переменной интегрирования η, одинаковых на каждой границе раздела. А на основании структуры фазовых функций вида (26) из представлений (17) полей кратных волн, можно утверждать, что кинематические закономерности распространения кратных волн не зависят от порядка следования звеньев p и s. Они зависят только от числа звеньев n и m.

Вследствие изложенного, при изучении всего множества кратных волн, возбуждаемых источником O в двухслойной среде, все это множество целесообразно подразделить сначала на группы $q = (1, 2, 3, \ldots)$ в соответствие с равенством

$$
m + n = 2q + 1 \tag{28}
$$

при фиксированном значении q. Множество же кратных волн, относящихся к фиксированной группе q, целесообразно подразделять далее на семейство кинематических аналогов $\widetilde{K}[n] \equiv K[m(n), n]$, которые вследствие соотношений

$$
m = 2q + 1 - n, \quad (0 \leqslant n \leqslant 2q + 1) \tag{28$'$}
$$

зависят лишь от одного параметра n.

Таким образом, в оценке полей кратных волн на уровне формирования аналитических представлений для составляющих полей смещений, решающим остается вопрос о получении удобных для вычислений выражений для полных сумм произведений коэффициентов отражения типа (25), отвечающих всем реализациям кратных волн, входящих в семейства кинематических аналогов

$K[n]$. Вопрос этот целесообразно подразделять на две части соответственно регистрации в точке M сначала продольной волны $b_q = p$, а затем поперечной волны $b_q = s$.

По каждой реализации отдельной кратной волны кода $K[n]$ из (16) (при $b_q = p$, если в точке M регистрируется p волна) определяется взаимно-однозначно число

$$e_1 e_2 e_3, \dots, e_{2q}[b_q], \tag{29}$$

выраженное в двоичной системе исчисления, в котором разрядный элемент e_ν принимает значение 1 или 0. Суммирование произведений из (25) по всем реализациям отдельных кратных волн из группы q сводится к суммированию произведений из (25) по всем двоичным числам (29), возрастающим от нуля до $2^{(2q-1)}$.

Однако такая сумма отвечает всему семейству кодов $K[m,n]$, соответствующих фиксированному значению q. Нас же здесь интересует лишь семейство кинематических аналогов $\widetilde{K}[n] \equiv \widetilde{K}[m(n), n]$, зависящих от одного параметра n. Чтобы прийти к такому множеству кратных волн достаточно составить суммы

$$\sum_{\nu=1}^{2q-1} e_\nu = n$$

элементов каждой из таких индивидуальных реализаций множества (29) группы $q = \mathrm{const}$ и отобрать такие реализации

$$\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \tilde{e}_3, \dots, \tilde{e}_{2q}[b_q], \tag{30}$$

у которых суммы всех элементов имеют заданное значение n.

Множество реализаций символов $\tilde{e}_i$ из (30), принадлежащих группе q как раз и составляет полное множество кратных волн, входящих в семейство кинематических аналогов $\widetilde{K}[n]$ и регистрируемое в точке M в форме волны $b_q = p$. Отметим, что организация указанного отбора из массива кодов $K[m,n]$ группы q реализаций кодов типа (30) не вызывает затруднений при работе на персональных компьютерах.

6. Для получения окончательных аналитических представлений суммарных кратных волн, записанных в потенциалах из (17), объединяющих все кратные волны, входящие в состав семейства кинематических аналогов $\widetilde{K}[n]$, необходимо просуммировать произведения (25) по всем реализациям кодов (30). Это приводит при каждом значении n к соответствующему значению функ-

ции $\Phi(\eta, n)$ комплексной переменной η, через посредство которой представляются все коэффициенты отражения, входящие в правую часть (25). Однако получение общего ее аналитического представления приводит к очень громоздким выражениям. Поэтому при дальнейших количественных исследованиях целесообразно пользоваться функциями $\Phi(\eta, n)$ не в форме аналитических их представлений, а в их алгоритмической форме. При этом необходимые для исследований аналитические их свойства легко устанавливаются по известным свойствам коэффициентов отражения и преломления волн из (25).

Что же касается дальнейших количественных исследований суммарных кратных волновых полей в рассматриваемой двухслойной среде, то они производятся на основе хорошо известных методов контурного интегрирования. Применительно к повторным интегралам Фурье и Меллина они изложены достаточно подробно в [17].

В заключение отметим, что для двухслойной среды по методу наложения многократных волн составлена программа, работающая в интерактивном режиме.

Литература

1. Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, Ю. А. Сурков, *О сопоставлении методов расчета интерференционных упругих волновых полей в тонкослоистых средах.* 1. — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **332** (1976), 220–238.
2. Т. И. Вавилова, А. Д. Пугач, *Об интенсивности суммарных многократных волн в трехслойной среде.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. VII (1966), 30–46.
3. А. С. Алексеев, Б. Я. Гельчинский, *О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. III (1959), 107–160.
4. Т. И. Вавилова, Г. И. Петрашень, *К расчету полей суммарных кратных волн в многослойных средах.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. VII (1966), 48–54.
5. Г. И. Петрашень, Т. И. Вавилова, *О расчете интенсивности суммарных кратных волн при любом расположении источника и приемника.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. IX (1968), 77–96.
6. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, *Методы количественного описания интерференционных волн в упругих средах содержащих тонкие плоскопараллельные слои.* I. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. XXIII (1983), 56–67.

7. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, *Методы количественного описания интерференционных волн в упругих средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои.* II. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. XXV (1986), 125–138.
8. Н. С. Смирнова, *О расчете волнового поля в задаче на распространение волн SH.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. XXVI (1987), 89–99.
9. Л. А. Молотков, *О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоско-параллельные слои.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. V (1961), 240–280.
10. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Е. М. Ледовская, *О расчете волновых полей в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные упругие слои.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. XXVI (1987), 5–88.
11. Н. С. Смирнова, *Моделирование поля волн, отраженных тонким упругим слоем.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **28** (1989), 38–45.
12. Н. С. Смирнова, *Некоторые примеры расчета теоретических сейсмограмм волн, отраженных тонким упругим слоем.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **29** (1989), 68–76.
13. Н. С. Смирнова, *О расчете волновых полей в многослойных средах.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **203** (1992), 156–165.
14. Н. С. Смирнова, *Алгоритм определения полей суммарных кратных волн при произвольном расположении источника и приемника внутри упругой среды.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **210** (1994), 251–261.
15. Н. С. Смирнова, *К вопросу о вычислении волнового поля в многослойной среде.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **230** (1995), 243–252.
16. Chunnan Zhou, Nelson N. Hsu, John S. Popovics, Jan D. Achenbash, *Response of two layers overlaying a half-space to a suddenly applied point force.* — Wave Motion **31** (2000), 255–272.
17. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах.* Наука, Л. (1982), 288.

Petrashen G. I., Reshetnikov V. V., and Surkov Yu. A. On the comparison of methods of computation of interference elastic wave fields in thin-layered media. 2.

The paper is the direct continuation of the study where the solution of the problem on the propagation of low-frequency waves in thin-layered media by the method of dispersion equation was considered in detail. In the present paper, the solution of the similar problem is performed for an elastic layer and a half-space being in the rigid contact by the method of application of complex plane waves.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 мая 2007 г.