Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Л. А. Молотков

ИССЛЕДОВАНИЕ КАСАНИЯ ФРОНТОВ ДВУХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Предлагаемая работа посвящена построению и исследованию неосесимметричных волновых полей в трансверсально-изотропных упругих средах. Рассматриваемые волновые поля являются точными решениями соответствующих уравнений теории упругости. Особый интерес представляет касание фронтов волн SH и SV в этих полях. При изолированном рассмотрении одной из этих волн возникает дополнительный ложный плоский фронт, проходящий через точку касания фронтов. В случае совместного рассмотрения этих волн ложные фронты сокращаются [1, 2]. Для получения явного представления волнового поля вблизи точки касания в этих работах использовалось асимптотическое выражение волны SV в указанной области.

Чтобы заменить это асимптотическое представление точным, в предлагаемой работе рассматривается особый частный случай трансверсально-изотропной среды, описанной, в частности, в [3]. В этом случае с помощью только точных методов строится волновое поле и проводятся все исследования вблизи точки касания фронтов. На основании этих исследований предлагается специальная функция, которая описывает касание фронтов и показывает сокращение ложных фронтов.

Пусть в цилиндрической системе координат r, θ, z задана безграничная трансверсально-изотропная упругая среда, описываемая уравнения закона Гука

$$\sigma_{rr} = a\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\Big(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) + (c-d)\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) гранты 06-05-64252, 05-01-00936.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + a\Big(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) + (c-d)\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\sigma_{zz} = (c-d)\Big(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) + b\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\sigma_{r\theta} = \mu\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big),\\
&\sigma_{rz} = d\Big(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\Big), \quad \sigma_{\theta z} = d\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\Big)
\end{aligned} \tag{1}
$$

и уравнениями сплошной среды

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{2}
$$

где u_r, u_θ, u_z – составляющие вектора смещения, а σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz}, $\sigma_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжения. Коэффициенты в уравнениях (1) выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
&a = \lambda + 2\mu = c_{11}, \quad b = \lambda' + 2\mu' = c_{33}, \quad c = \lambda' + \mu'' = c_{13} + c_{44},\\
&d = \mu'' = c_{44}, \quad \lambda = c_{66}
\end{aligned} \tag{3}
$$

через постоянные Ламе и элементы матрицы закона Гука $\mathbf{C}$. Ось анизотропнии совпадает с осью z. В заданной среде делается предположение

$$
c = \sqrt{(a-d)(b-d)}, \tag{4}
$$

при котором фронты волн P и SV становятся сферическими или эллипсоидальными [3].

Среда возбуждается внешней точечной силой $f(t)$, приложенной к началу координат, действующей вдоль оси x и заданной граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&[\sigma_{rz}] = \frac{\cos\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad [\sigma_{\theta z}] = -\frac{\sin\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad [\sigma_{zz}] = 0,\\
&[u_r] = [u_\theta] = [u_z] = 0,
\end{aligned} \tag{5}
$$

в которых символ [ ] обозначает скачок при $z = 0$ функции, стоящей в квадратных скобках. Источник начинает действовать с момента вренени $t = 0$ и при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

Образующееся волновое поле было построено в работе [1] и с учетом условия (4) выражается равенствами

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{\cos\theta}{4\pi bd}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left[\frac{(a-d)\,e^{-k|z|\alpha}}{\alpha}-(b-d)\beta e^{-k|z|\beta}\right]e^{kt\eta}d\eta-\\
&-\frac{\cos\theta}{4\pi dr}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\gamma}e^{k(t\eta-|z|\gamma)}d\eta,\\
u_\theta &= -\frac{\sin\theta}{4\pi bdr}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left[\frac{(a-d)\,e^{-k|z|\alpha}}{\alpha}-(b-d)\beta e^{-k|z|\beta}\right]e^{kt\eta}d\eta-\\
&-\frac{\sin\theta}{4\pi d}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\gamma}e^{k(t\eta-|z|\gamma)}d\eta,\\
u_z &= -\frac{\operatorname{sign} z\; c\cos\theta}{4\pi bd}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left(e^{-k|z|\alpha}-e^{-k|z|\beta}\right)e^{kt\eta}d\eta,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
&\alpha=\sqrt{\frac{a+\rho\eta^2}{b}},\quad \beta=\sqrt{1+\frac{\rho\eta^2}{d}},\quad \gamma=\sqrt{\frac{\mu+\rho\eta^2}{d}},\\
&F(k\eta)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-kt\eta}dt.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Функции α, β и γ имеют на мнимой оси точки ветвления

$$
\eta_1=\pm i\sqrt{\frac{a}{\rho}},\quad \eta_2=\pm i\sqrt{\frac{d}{\rho}},\quad \eta_3=\pm i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},
\tag{8}
$$

фиксируются условиями $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ при $\eta > 0$ и являются чисто мнимыми в соответствующих интервалах

$$\operatorname{Im}\eta \geqslant \sqrt{a/\rho}, \quad \operatorname{Im}\eta \geqslant \sqrt{d/\rho}, \quad \operatorname{Im}\eta \geqslant \sqrt{\mu/\rho} \tag{9}$$

мнимой оси в верхней полуплоскости. В этих интервалах функции α, β и γ определяют фронты соответственно волн P, SV и SH. Чтобы указать правило построения фронтов, обозначим

$$\overline{\alpha}_1 = \operatorname{Im}\alpha, \quad \overline{\alpha}_2 = \operatorname{Im}\beta, \quad \overline{\alpha}_3 = \operatorname{Im}\gamma, \quad \tau = \operatorname{Im}\eta. \tag{10}$$

Фронты от точечного источника определяются параметрическими соотношениями [4]

$$r = t\left[\tau - \frac{\overline{\alpha}_i(\tau)}{\overline{\alpha}_i'(\tau)}\right], \quad z = \frac{t}{\overline{\alpha}_i'(\tau)} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

при этом τ принимает все возможные значения в интервалах (9). В результате использования формул (11) приходим к уравнениям фронтов

$$\frac{r^2}{b} + \frac{z^2}{a} = \frac{t^2}{\rho}, \tag{12}$$

$$\frac{r^2 + z^2}{d} = \frac{t^2}{\rho}, \tag{13}$$

$$\frac{r^2}{\mu} + \frac{z^2}{d} = \frac{t^2}{\rho} \tag{14}$$

для волн P, SV и SH. Как показывают уравнения (12)–(14), фронты волн P и SH являются эллипсоидами, а фронт волны SV является сферой. В общем случае, когда условие (4) не выполняется, фронты волн P и SV имеют более сложную форму, а фронт волны SH остается эллипсоидом. Волны P, SV и SH распространяются вдоль оси x со скоростями

$$\sqrt{a/\rho}, \quad \sqrt{d/\rho}, \quad \sqrt{\mu/\rho}, \tag{15}$$

а вдоль оси z со скоростями

$$\sqrt{b/\rho}, \quad \sqrt{d/\rho}, \quad \sqrt{d/\rho}. \tag{16}$$

Выражения (15) и (16) имеют место как в случае общей трансверсальной изотропии, так и при выполнении условия (4). Сравнивая скорости (16), приходим к выводу, что скорости волн SV

и SH оказываются одинаковыми вдоль оси z и фронты этих волн касаются в точках

$$r = 0, \quad z = \pm\sqrt{d/\rho}\,t. \tag{17}$$

Расположение фронтов трех рассматриваемых волн при $z > 0$ показано на рис. 1.

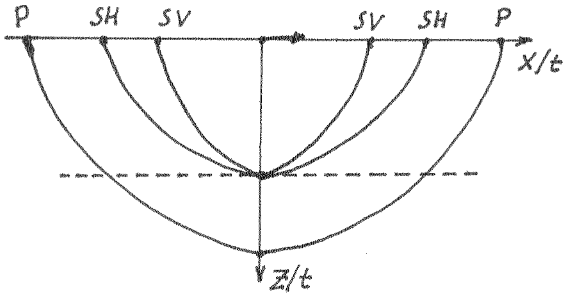

Рис. 1.

Для исследования волнового поля вблизи точки касания фронтов (17), представим волновое поле в виде суммы трех частей:

1 часть, SH:

$$\begin{aligned} u_{r1} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi d}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\gamma}\,e^{k(t\eta-|z|\gamma)}\,d\eta,\\ u_{\theta 1} &= \frac{\sin\theta}{4\pi d}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\gamma}\,e^{k(t\eta-|z|\gamma)}\,d\eta; \end{aligned} \tag{18}$$

2 часть, SV–SH

$$\begin{aligned} u_{r2} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi d}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(k\eta)\left[\frac{e^{-k|z|\beta}}{\beta}-\frac{e^{-k|z|\gamma}}{\gamma}\right]e^{kt\eta}\,d\eta,\\ u_{\theta 2} &= \frac{\sin\theta}{4\pi dr}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(k\eta)\left[\frac{e^{-k|z|\beta}}{\beta}-\frac{e^{-k|z|\gamma}}{\gamma}\right]e^{kt\eta}\,d\eta; \end{aligned} \tag{19}$$

3 часть, P–SH

$$
\begin{aligned}
u_{r3} &= \frac{\cos\theta(a-d)}{4\pi bd}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left[\frac{e^{-k|z|\alpha}}{\alpha}-\frac{e^{-k|z|\beta}}{\beta}\right]e^{kt\eta}\,d\eta,\\
u_{\theta 3} &= -\frac{\sin\theta(a-d)}{4\pi bdr}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left[\frac{e^{-k|z|\alpha}}{\alpha}-\frac{e^{-k|z|\beta}}{\beta}\right]e^{kt\eta}\,d\eta,\\
u_{z3} &= -\frac{\operatorname{sign} z c\cos\theta}{4\pi bd}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta^2-\alpha^2}\times\\
&\times\left[e^{-k|z|\alpha}-e^{-k|z|\beta}\right]e^{kt\eta}\,d\eta.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Равенства (18)–(20) равносильны соотношениям (6).

Укажем, каким граничным условиям при $z=0$ удовлетворяют части волнового поля. Первая часть удовлетворяет краевым условиям, которые совпадают с условиями (5). Вторая часть волнового поля удовлетворяет нулевым условиям

$$
[\sigma_{rz}]=[\sigma_{\theta z}]=[\sigma_{zz}]=0,\quad [u_r]=[u_\theta]=[u_z]=0. \tag{21}
$$

Если же в равенствах (19) отбросить члены, содержащие γ, то вторая часть будет удовлетворять краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&[\sigma_{rz}]=-\frac{\cos\theta f(t)}{2\pi r^2},\quad [\sigma_{\theta z}]=-\frac{\sin\theta f(t)}{2\pi r^2},\\
&[\sigma_{zz}]=0,\quad [u_r]=[u_\theta]=[u_z]=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Если, наоборот, в равенствах (19) отброшены члены, содержащие β, то вторая часть волнового поля удовлетворяет условиям

$$
\begin{aligned}
&[\sigma_{rz}]=\frac{\cos\theta f(t)}{2\pi r^2},\quad [\sigma_{\theta z}]=\frac{\sin\theta f(t)}{2\pi r^2},\\
&[\sigma_{zz}]=0,\quad [u_r]=[u_\theta]=[u_z]=0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Таким образом, по-отдельности первые и вторые слагаемые в выражениях (19) удовлетворяют краевым условиям (22) и (23), описывающим распределенные источники, создающие плоские фронты

$$z = \pm\sqrt{d/\rho}\, t. \tag{24}$$

Эти фронты проходят через точки касания (17) и являются ложными. При совместном рассмотрении обоих слагаемых в выражениях (19) эти источники и фронты сокращаются. Третья часть волнового поля также удовлетворяет нулевым условиям (21). Для суммы всех трех частей волнового поля выполняются условия (5).

Для исследования волнового поля в окрестности точки касания фронтов вычислим интегралы, через которые выражаются первая и вторая части волнового поля. С этой целью используем формулы [1, 5]

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\widetilde{\alpha}}\, e^{k(t\eta-|z|\widetilde{\alpha})} d\eta = \frac{f(t-R/v)}{R}, \\
\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\widetilde{\alpha}}\, e^{k(t\eta-|z|\widetilde{\alpha})} d\eta = \frac{v}{r} \int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)d\tau, \\
\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\widetilde{\alpha}}\, e^{k(t\eta-|z|\widetilde{\alpha})} d\eta = \\
= \frac{f(t-R/v)}{R} - \frac{v}{r^2} \int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)d\tau,
\end{gathered} \tag{25}$$

в которых

$$R = \sqrt{r^2+z^2}, \quad \widetilde{\alpha} = \sqrt{1+\eta^2/v^2}, \quad F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-kt\eta}dt. \tag{26}$$

Из равенств (25) следуют соотношения

$$\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\gamma}\, e^{k(t\eta-|z|\gamma)} d\eta = \sqrt{\frac{d}{\mu}}\ \frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}}; \tag{27}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\gamma}\, e^{k(t\eta-|z|\gamma)} d\eta = \frac{v}{r} \int\limits_{|z|/v}^{\overline{R}/\overline{v}} f(t-\tau)\, d\tau,$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\gamma}\, e^{k(t\eta-|z|\gamma)} d\eta = \tag{28}$$

$$= \sqrt{\frac{d}{\mu}}\; \frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}} - \frac{v}{r^2} \int\limits_{|z|/v}^{\overline{R}/\overline{v}} f(t-\tau)\, d\tau,$$

где

$$\overline{R} = \sqrt{r^2 + z^2\mu/d}, \quad R = \sqrt{r^2+z^2}, \quad \overline{v} = \sqrt{\mu/\rho}, \quad v = \sqrt{d/\rho}. \tag{29}$$

Используя формулу (27), приходим к равенствам

$$u_{r1} = -\frac{\cos\theta}{4\pi\sqrt{d\mu}}\; \frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}}, \quad u_{\theta 1} = \frac{\sin\theta}{4\pi\sqrt{d\mu}}\; \frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}}, \tag{30}$$

определяющим смещения волны SH в первой части волнового поля. Из равенства (30) следует, что волны SH имеет эллиптический фронт (14). Выражения (30) не имеют других фронтов, и это согласуется с граничными условиями (5).

Для волн SH во второй части волнового поля получаем точные формулы

$$u_{r2SH} = \frac{\cos\theta}{4\pi d}\left[\sqrt{\frac{d}{\mu}}\; \frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}} - \frac{v}{r^2} \int\limits_{|z|/v}^{\overline{R}/\overline{v}} f(t-\tau)\, d\tau\right],$$

$$u_{\theta 2SH} = -\frac{\sin\theta v}{4\pi d r^2} \int\limits_{|z|/v}^{\overline{R}/\overline{v}} f(t-\tau)\, d\tau, \tag{31}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{d}{\rho}}, \quad \overline{R} = \sqrt{r^2 + z^2\mu/d}$$

с использованием равенств (28). Выражения (31) имеют эллиптический фронт (14) и дополнительные фронты (24), соответствующие граничным условиям (23). Отметим, что все формулы

(27)–(31) также справедливы и в случае общей трансверсальной изотропии.

Чтобы исключить этот дополнительный фронт, необходимо также учесть формулы для волны SV во второй части поля. При рассмотрении частного случая трансверсально-изотропной среды, когда выполняется условие (4), волна SV во второй части волнового поля представляется точными соотношениями

$$\begin{aligned} u_{r2SV} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi d}\left[\frac{f(t-R/v)}{R} - \frac{v}{r^2}\int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau\right], \\ u_{\theta 2SV} &= \frac{\sin\theta v}{4\pi d r^2}\int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau, \quad v=\sqrt{\frac{d}{\rho}}, \quad R=\sqrt{r^2+z^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

В общем случае трансверсальной анизотропии эти формулы не применимы и для исследования окрестности точки касания фронтов использовались асимптотические представления [2]. Выражения (32) имеют сферический фронт (13) и дополнительные фронты (24). Фронты волн SV и SH касаются в точках (17), через которые проходят дополнительные фронты (24). Чтобы исследовать волновое поле в окрестностях точек (17), вычислим смещения во всей второй части волнового поля

$$u_{r2} = \frac{\cos\theta}{4\pi d}\left[\sqrt{\frac{d}{\mu}}\,\frac{f(t-\overline{R}/\overline{v})}{\overline{R}} - \frac{f(t-R/v)}{R} + \frac{v}{r^2}\int\limits_{\overline{R}/\overline{v}}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau\right],$$

$$u_{\theta 2} = \frac{\sin\theta v}{4\pi d r^2}\int\limits_{\overline{R}/\overline{v}}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau. \tag{33}$$

Из этих формул следует, что выражения (33) имеют два фронта (13) и (14) и никаких других фронтов не существует. Дополнительные фронты оказываются ложными и сократились во всех выражениях (33). Через точку (17) проходят еще фронты SH (первая часть, (14)) и SV (третья часть, (13)), но при этом никакого ложного фронта не образуется в первой и третьей частях волнового поля.

Основная тема настоящей работы состоит в изучении касания фронтов волн SH и SV, когда при изолированном рассмотрении одной из волн возникают ложные фронты. Для описания такого касания укажем спецфункцию в двух представлениях

$$\int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau - \int\limits_{|z|/v}^{\overline{R}/\overline{v}} f(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_{\overline{R}/\overline{v}}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau, \tag{34}$$

где

$$R=\sqrt{r^2+z^2}, \quad \overline{R}=\sqrt{r^2+z^2\mu/d}, \quad v=\sqrt{d/\rho}, \quad \overline{v}=\sqrt{\mu/\rho}. \tag{35}$$

Такие представления являются точными для трансверсально-изотропной среды только в случае условия (4). В общем случае трансверсально-изотропной среды выражения (32) являются асимптотическими [2]. Эти приближенные выражения позволяют исследовать окрестности точек касания и сократить ложные фронты. Однако точное выражение для спецфункции, подобное (34), не удается вывести в общем случае, когда условие (4) не выполняется.

В заключение остановимся на рассмотрении волны SH. Как показывают исследования в случае общей трансверсально-изотропной среды [1, 2] и в частном случае этой среды при условии (4), эта волна не может быть полностью выделена из волнового поля. В связи с этим при исследовании рассматриваемой среды вводить тензор SH [6] нецелесообразно. По-видимому, волна SH может быть полностью выделена только в случае вращательного воздействия в трансверсально-изотропной среде, когда волновое поле обладает осевой симметрией.

Полученные точные выражения для волнового поля в трансверсально-изотропной среде, могут рассматриваться как основа для проверки асимптотических решений, соответствующих задач [6–8]. Такая проверка может быть легко проведена, так как волны SH и SV в области касания фронтов могут быть представлены в виде формул типа Стокса и не содержать сложных интегралов Фурье–Бесселя и Меллина.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об одном внутреннем источнике в трансверсально-изотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 238–249.

2. А. А. Молотков, *Об одном неосесимметричном волновом поле в трансверсально-изотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **232** (2006), 163–174.
3. L. A. Molotkov, P. Malischewsky, *Application of the matrix method for a special case of transverse isotropy.* — Getlands Beitr. Geophysik, Leipzig **92** (1983), 321–326.
4. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–123.
5. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Об источниках типа центра расширения и давления в модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 196–213.
6. V. Vavryčuk, K. Yomogida, *SH-wave Green tensor for homogeneous transversely isotropic media by higher-order approximations in asymptotic ray theory.* — Wave Motion **23** (1996), 83–93.
7. М. М. Попов, *Волны SH в однородной трансверсально-изотропной среде, возбуждаемые сосредоточенной силой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 285–298.
8. М. М. Попов, *Асимптотика волнового поля в окрестности оси симметрии трансверсально-изотропной однородной среды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 199–211.

Molotkov L. A. Investigation of front tangency of two transversal waves in transverse isotropic elastic media.

A special case of transversely isotropic elastic medium is considered. This medium is excited by a point force perpendicular to the anisotropic axis. The wave field in this medium is constructed and investigated. The fronts of the SV and SH waves are contact with one another at a point. In order to investigate the vicinity of this point, we derive more simple expressions of the wave field and establish the special function describing the contact of two fronts.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 апреля 2007 г.