Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Л. А. Молотков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ УПРУГУЮ СЛОИСТУЮ СРЕДУ С КОНТАКТАМИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦАХ

В предлагаемой работе выводится новое представление волнового поля в эффективной модели, описывающей два чередующихся упругих слоя с контактом проскальзывания на границах. Эта эффективная модель была установлена методом матричного осреднения [1] и исследовалась в работах [2, 3].

Новое представление волнового поля выводится для точечного источника в двумерном случае. В этом представлении интегралы Фурье и Меллина заменяются вычетами в комплексных или вещественных полюсах. Установленное волновое поле соответствует решениям, полученным методом Смирнова–Соболева в случае упругих сред [4]. Вывод этого представления проводится в настоящей работе теми же способами, так и в работе [5].

§1. Волновое поле в эффективной модели

Пусть задана полуплоскость $z \geqslant 0$, описываемая уравнениями [2, 3]

$$\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xx2}}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2},$$
$$\frac{\tau_{zz}}{\partial z} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) гранты 06-05-64252, 05-05-65301.

$$\tau_{xx1} = b_1\tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z} + (a_1 + \tilde{\lambda}b_1^2\theta_1)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde{\lambda}b_1 b_2\theta_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x},$$

$$r_{xx2} = b_2\tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{\lambda}b_1 b_2\theta_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + (a_2 + \tilde{\lambda}b_2^2\theta_2)\frac{\partial u_{x2}}{\partial x},$$

$$\tau_{zz} = \tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{\lambda}b_1\theta_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde{\lambda}b_2\theta_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}$$

эффективной двухфазной модели среды, в которой чередуются два упругих слоя. В уравнениях (1.1) использованы обозначения

$$\tilde{\lambda} = \left[\frac{\theta_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\theta_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right]^{-1}, \quad a_i = \frac{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad b_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 2\mu_i},$$

$$\overline{\rho} = \rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2 \ (i = 1, 2), \tag{1.2}$$

λ_i, μ_i – коэффициенты Ламе упругой среды i, ρ_i – плотность упругой среды i, u_{xi} – смещение вдоль оси x в упругой среде i, θ_i – относительная толщина упругих слоев i ($\theta_1 + \theta_2 = 1$), τ_{xxi} – напряжения вдоль оси x в упругой среде i, τ_{zz} и u_z – общие для обеих сред напряжения и смещения вдоль оси z. На границе полуплоскости $z = 0$ задается условие

$$\tau_{zz} = \delta(x)f(t), \tag{1.3}$$

в котором $\delta(x)$ – функция Дирака, а $f(t)$ – функция, определяющая временную зависимость источника и равная тождественно нулю при $t < 0$.

Для определения волнового поля полезно представить условие (1.3) в виде равенства

$$\tau_{zz} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{k\cos kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(k\eta)e^{kt\eta}d\eta, \tag{1.4}$$

где

$$F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-k\eta t}dt, \tag{1.5}$$

а смещения и напряжения выразить соотношениями

$$
\begin{aligned}
u_{xi} &= \int_0^\infty \frac{\sin kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{u}_{xi} e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta, \\
u_z &= \int_0^\infty \frac{\cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{u}_z e^{e(t\eta - z\alpha)} d\eta, \\
\tau_{xxi} &= \int_0^\infty \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\tau}_{xxi} e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta, \\
\tau_{zz} &= \int_0^\infty \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\tau}_{zz} e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

После подстановки равенств (1.6) в уравнения (1.1) приходим к системе уравнений

$$
\begin{gathered}
\rho_1 \eta^2 \tilde{u}_{x1} + \tilde{\tau}_{xx1} = 0, \quad \rho_2 \eta^2 \tilde{u}_{x2} + \tilde{\tau}_{xx2} = 0, \\
\bar{\rho} \eta^2 \tilde{u}_z - \alpha \tilde{\tau}_{zz} = 0, \\
(a_1 + \tilde{\lambda} b_1^2 \theta_1) \tilde{u}_{x1} + \tilde{\lambda} b_1 b_2 \theta_2 \tilde{u}_{x2} + b_1 \tilde{\lambda} \alpha \tilde{u}_z - \tilde{\tau}_{xx1} = 0, \\
\tilde{\lambda} b_1 b_2 \theta_1 \tilde{u}_{x1} + (a_2 + \tilde{\lambda} b_2^2 \theta_2) \tilde{u}_{x2} + b_2 \tilde{\lambda} \alpha \tilde{u}_z - \tilde{\tau}_{xx2} = 0, \\
\tilde{\lambda} b_1 \theta_1 \tilde{u}_{x1} + \tilde{\lambda} b_2 \theta_2 \tilde{u}_{x2} + \tilde{\lambda} \alpha \tilde{u}_z - \tilde{\tau}_{zz} = 0.
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

Условие существования ненулевого решения системы (1.7) состоит в равенстве нулю ее определителя и приводит к уравнению

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 \tilde{\lambda} [\rho_1 \rho_2 \eta^4 + (a_1 \rho_2 + a_2 \rho_1) \eta^2 + a_1 a_2] = \bar{\rho} \eta^2 [\rho_1 \rho_2 \eta^4 + (a_1 \rho_2 + \rho_1 a_2 \\
+ \tilde{\lambda} \rho_2 b_1^2 \theta_1 + \tilde{\lambda} \rho_1 b_2^2 \theta_2) \eta^2 + a_1 a_2 + \tilde{\lambda} a_2 b_1^2 \theta_1 + \tilde{\lambda} a_1 b_2^2 \theta_2].
\end{aligned}
$$

Решая уравнение (1.8), приходим к соотношению

$$
\alpha = \eta \sqrt{\bar{\rho} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{b_1^2 \theta_1}{\rho_1 \eta^2 + a_1} + \frac{b_2^2 \theta_2}{\rho_2 \eta^2 + a_2} \right]}, \tag{1.9}
$$

определяющему характеристическую функцию $\alpha(\eta)$.

Из граничного условия (1.3) с учетом формул (1.4) и (1.6) следует соотношение

$$\tilde{\tau}_{zz} = \frac{2}{\pi} F(k\eta) \tag{1.10}$$

для подынтегральной функции $\tilde{\tau}_{zz}$. Остальные подынтегральные функции в равенствах (1.6) выражаются на основании системы уравнений (1.7) соотношениями

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{x1} = \frac{b_1 \tilde{\tau}_{zz}}{\rho_1 \eta^2 + a_1}, \quad \tilde{u}_{x2} = \frac{b_2 \tilde{\tau}_{zz}}{\rho_2 \eta^2 + a_2}, \quad \tilde{u}_z = -\frac{\alpha \tilde{\tau}_{zz}}{\bar{\rho}\eta^2}, \\ \tilde{\tau}_{xx1} = -\frac{\rho_1 \eta^2 b_1}{\rho_1 \eta^2 + a_1} \tilde{\tau}_{zz}, \quad \tilde{\tau}_{xx2} = -\frac{\rho_2 \eta^2 b_2}{\rho_2 \eta^2 + a_2} \tilde{\tau}_{zz}\end{gathered} \tag{1.11}$$

через функцию $\tilde{\tau}_{zz}$. Формулы (1.10) и (1.11) совместно с равенствами (1.6) определяют образующееся волновое поле.

§2. Стационарные контуры и контур λ

Для преобразования полученного решения полезно предварительно исследовать подынтегральные функции интегралов Меллина. С этой целью представим функцию $\alpha(\eta)$ формулой

$$\alpha = \frac{\eta}{v_5} \sqrt{\frac{(\eta^2 + v_1^2)(\eta^2 + v_3^2)}{(\eta^2 + v_2^2)(\eta^2 + v_4^2)}}, \tag{2.1}$$

в которой

$$\begin{gathered}v_{1,3} = \left[S \pm \sqrt{S^2 - 4\rho_1\rho_2[a_1 a_2 + \tilde{\lambda}(b_1^2 a_1 \theta_1 + b_2^2 a_2 \theta_2)]}\right]/(2\rho_1\rho_2), \\ S = a_1\rho_2 + a_2\rho_1 + \tilde{\lambda}(b_1^2 \rho_2 \theta_1 + b_2^2 \rho_1 \theta_2), \\ v_2 = \max(\sqrt{a_1/\rho_1}, \sqrt{a_2/\rho_2}), v_4 = \min(\sqrt{a_1/\rho_1}, \sqrt{a_2/\rho_2}), \\ v_5 = \sqrt{\tilde{\lambda}/\bar{\rho}}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Как показано в работе [3], величины v_1, v_2, v_3 и v_4 – скорости волн вдоль оси x, а v_5 – скорость волны вдоль оси z. Величины v_1, v_2, v_3 и v_4 удовлетворяют условиям

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant v_4. \tag{2.3}$$

Подынтегральные функции интегралов Меллина имеют точки ветвления $\eta = \pm iv_1$, $\eta = \pm iv_2$, $\eta = \pm iv_3$ и $\eta = \pm iv_4$. Для однозначности функции $\alpha(\eta)$ из этих точек ветвления проведены в левую полуплоскость разрезы и основная ветвь фиксирована условием

$$\alpha(\eta) > 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{2.4}$$

Свойства интегралов Меллина определяются фазовой функцией

$$f(\eta) = t\eta - z\alpha. \tag{2.5}$$

Для исследования этой функции полезно записать ее приближенные выражения

$$f(\eta) = \eta\big(t - \frac{z}{v_6}\big) + \frac{z\eta^3}{2v_6}\big(\frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_4^2} - \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2}\big), \tag{2.6}$$

$$f(i\tau) = i\tau\big(t - \frac{z}{v_6}\big) - \frac{iz\tau^3}{2v_6}\big(\frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_4^2} - \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2}\big) \tag{2.7}$$

в окрестности начала координат $\eta = 0$. В равенствах (2.6) и (2.7) используется обозначение

$$v_6 = v_5\frac{v_2v_4}{v_1v_3}, \tag{2.8}$$

где v_6 – скорость волны вдоль оси z ($v_6 < v_5$). Из формул (2.6) и (2.7) следует, что характер изменения функции $f(\eta)$ в окрестности начала координат оказывается разным в зависимости от того, какое из неравенств

$$v_6t > z, \tag{2.9}$$

$$z > v_6t \tag{2.10}$$

выполняется. При условии (2.9) функция $\operatorname{Im} f(i\tau)$ представляется в интервале $0 \leqslant \tau < v_4$ графиком (рис. 1) и имеет седловую точку $\eta = \eta_4$. При выполнении условия (2.10) $\operatorname{Im} f(i\tau)$ монотонно уменьшается с ростом τ и седловая точка отсутствует в интервале $0 \leqslant \tau < v_4$ (рис. 2)

В обоих случаях функция $\operatorname{Im} f(i\tau)$ в интервале $\tau > v_4$ имеют примерно одинаковые графики, изображенные на рис. 3.

Для исследования функции $f(\eta)$ на вещественной оси полезно выразить эту функцию при больших η

$$f(\eta) = \big(t - \frac{z}{v_5}\big)\eta - \frac{z}{2v_5\eta}(v_1^2 + v_3^2 - v_2^2 - v_4^2). \tag{2.11}$$

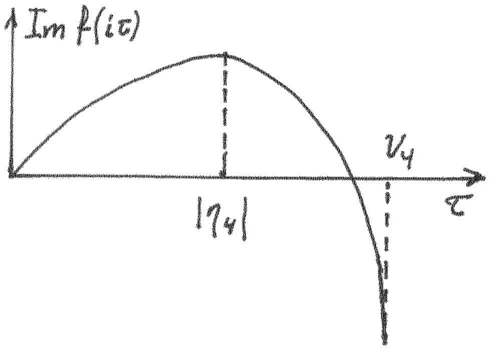


Рис. 1. $(v_6 t > z)$

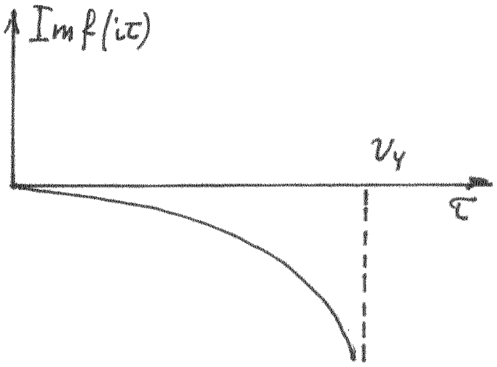


Рис. 2. $(z > v_6 t)$

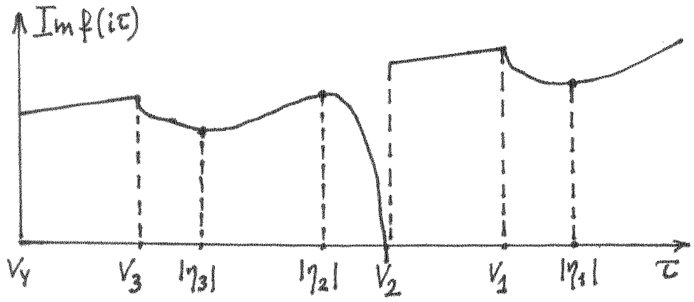


Рис. 3.

Сравнивая приближенные соотношения (2.6) и (2.11) и учитывая монотонное изменение функции $\alpha(\eta)$ на вещественной оси, приходим к выводу, что при выполнении условия (2.9) функция $f(\eta)$ монотонно возрастает (рис. 4).

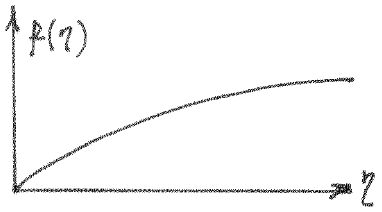


Рис. 4. $(v_6 t > z)$

В случае же, когда неравенство (2.10) удовлетворяется, функция $f(\eta)$ имеет седловую точку η_4 (рис. 5).

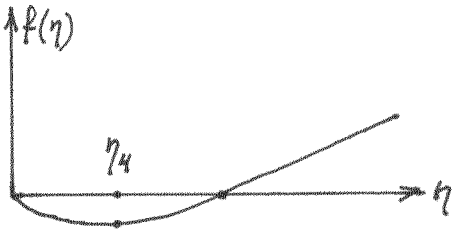


Рис. 5. $(z > v_6 t)$

Таким образом, седловая точка η_4, расположенная на мнимой оси при условии (2.9), переходит на вещественную ось в случае выполнения неравенства (2.10).

Остановимся на исследовании стационарных контуров

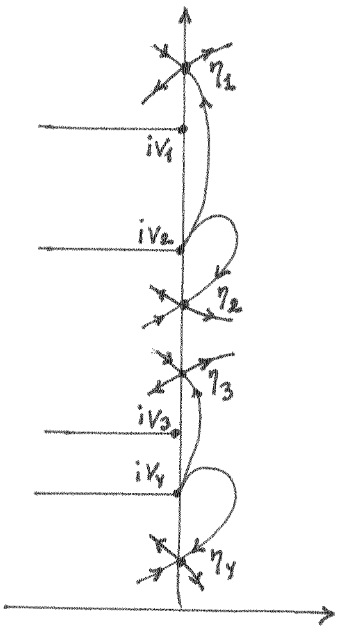
$$\operatorname{Im} f(\eta) = \operatorname{Im} f(\eta_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{2.12}$$

проходящих через седловые точки. На рис. 6 и 7, относящихся к случаям (2.9) и (2.10), показаны стационарные контуры вблизи мнимой оси. Стрелки на этих контурах показывают направления, в которых $\operatorname{Re} f(\eta)$ возрастает. Стационарные контуры или уходят на другие листы, или оканчиваются на бесконечности, или в особых точках $\eta = iv_2$ и $\eta = iv_4$.

Чтобы исследовать стационарные контуры в окрестностях этих точек и вблизи мнимой оси, полезно записать соотношение

$$\begin{aligned} \eta - iv_2 &= |\eta - iv_2| e^{i(\pi/2-\varphi)}, \\ \eta - iv_4 &= |\eta - iv_4| e^{i(\pi/2-\varphi)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Функция $f(\eta)$ в указанных областях представляется приближенными равенствами



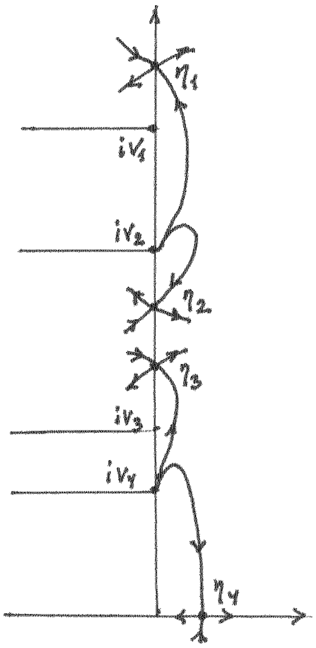


Рис. 6. $(v_6 t > z)$ Рис. 7 $(z > v_6 t)$

$$\begin{aligned} f(\eta) &= iv_2 t - \frac{zv_2 t}{v_5}\sqrt{\frac{(v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2)}{2v_2(v_2^2 - v_4^2)|\eta - iv_2|}} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \\ f(\eta) &= iv_4 t - \frac{zv_4 t}{v_5}\sqrt{\frac{(v_1^2 - v_4^2)(v_3^2 - v_4^2)}{2v_4(v_2^2 - v_4^2)|\eta - iv_4|}} e^{i\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

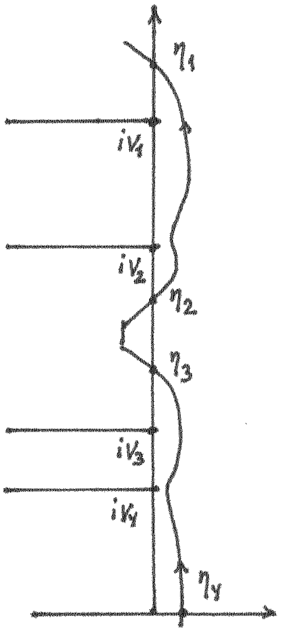
Угол φ, определяющий стационарный контур в окрестности точки $\eta = iv_2$, выражается соотношениями

$$\varphi = \frac{2v_5}{zv_2 t}\sqrt{\frac{2v_2(v_2^2 - v_4^2)|\eta - iv_2|}{(v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2)}}[v_2 t - \operatorname{Im} f(\eta_i)] \quad (i = 1, 2) \qquad (2.15)$$

соответственно для стационарных контуров, проходящих через седловые точки η_1 и η_2. Угол φ, определяющий стационарный контур в окрестности точки $\eta = iv_4$, выражается соотношениями

$$\varphi = \frac{2v_5}{zv_2 t}\sqrt{\frac{2v_4(v_2^2 - v_4^2)|\eta - iv_4|}{(v_1^2 - v_4^2)(v_3^2 - v_4^2)}}[v_2 t - \operatorname{Im} f(\eta_i)] \quad (i = 3, 4) \qquad (2.16)$$

соответственно для стационарных контуров, проходящих через седловые точки η_3 и η_4. Стационарные контуры симметричны относительно вещественной оси.



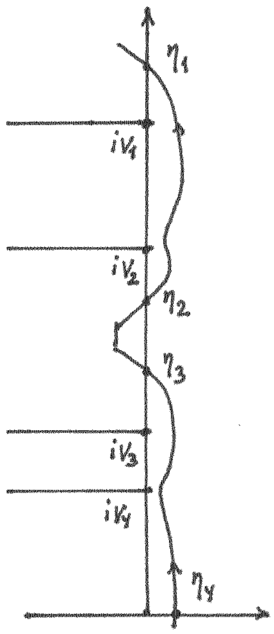


Рис. 8. Контур $\lambda(v_6 t > z)$ Рис. 9 Контур $\lambda(z > v_6 t)$

На основании проведенных исследований построим контуры λ (рис. 8 и 9), соответствующие случаям, когда выполняются неравенства (2.9) или (2.10). На этих контурах удовлетворяется условие

$$\operatorname{Re} f(\eta) \leqslant 0, \tag{2.17}$$

при этом равенство выполняется только в седловых точках, лежащих на мнимой оси, а во всех остальных точках контуров λ справедливо неравенство (2.17).

§3. Перестановка порядка интегрирования и вычисление внутренних интегралов

Заменим в формулах (1.6) для смещений контур интегралов Меллина на соответствующий контур λ, на котором выполняется условие (2.17). После такой замены в выражении для u_z при условии (2.9) необходимо, согласно равенствам (1.11) и (2.1), учесть полюс первого порядка $\eta = 0$. В результате этого учета приходим к дополнительному слагаемому

$$u_z^0 = -\frac{\delta(x)}{\bar{\rho} v_6} \int\limits_0^\infty f(t)dt \tag{3.1}$$

в выражении для смещения u_z. Остальные смещения u_{x1} и u_{x2} не имеют полюса $\eta = 0$ и поэтому не содержат дополнительных слагаемых. Других особенностей в области между контуром Меллина и контурами λ не существует.

После замены контуров и использования условия (2.17) удается в формулах (1.6) переставить порядок интегрирования и выразить смещения соотношениями

$$u_{xi} = \frac{1}{\pi^2 i} \int\limits_{(\lambda)} A_{xi}(\eta)d\eta \int\limits_0^\infty F(k\eta) \sin kx e^{k(t\eta - z\alpha)} dk \quad (i = 1, 2),$$

$$u_z = \frac{1}{\pi^2 i} \int\limits_{(\lambda)} B_z(\eta)d\eta \int\limits_0^\infty F(k\eta) \cos kx e^{k(t\eta - z\alpha)} dk + u_z^0, \tag{3.2}$$

где

$$A_{x1} = \frac{b_1}{\rho_1 \eta^2 + a_1}, \quad A_{x2} = \frac{b_2}{\rho_2 \eta^2 + a_2}, \quad B_z = -\frac{\alpha}{\bar{\rho}\eta^2}. \tag{3.3}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда

$$f(t) = \delta(t), \quad F(k\eta) = 1, \quad u_z^0 = -\frac{\delta(x)}{\bar{\rho} v_6}. \tag{3.4}$$

В этом случае внутренние интегралы вычисляются элементарно и формулы (3.2) заменяются равенствами

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(\lambda)} A_{xi}(\eta) \left[\frac{1}{z\alpha - \eta t + ix} - \frac{1}{z\alpha - \eta t - ix} \right] d\eta \quad (i = 1, 2), \\ u_z &= \frac{1}{2\pi^2 i} \int\limits_{(\lambda)} B_z(\eta) \left[\frac{1}{z\alpha - \eta t + ix} + \frac{1}{z\alpha - \eta t - ix} \right] d\eta + u_z^0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Вычисление интегралов (3.5) может быть сведено к учету особенностей подынтегральных функций, расположенных справа от контуров интегрирования λ. Такими особенностями являются полюса, совпадающие с корнями уравнений

$$\eta t - z\alpha - ix = 0, \quad \eta t - z\alpha + ix = 0. \tag{3.6}$$

Точка $\eta = 0$ не является особенностью для интегралов (3.5). Чтобы в этом убедиться, приведем соотношения

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{1}{\pi^2 i} \int\limits_{(\lambda)} A_{xi}(\eta) \frac{x}{(z\alpha - \eta t)^2 + x^2} d\eta, \\ u_z &= \frac{1}{\pi^2 i} \int\limits_{(\lambda)} B_z(\eta) \frac{z\alpha - \eta t}{(z\alpha - \eta t)^2 + x^2} d\eta + u_z^0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

равносильные формулам (3.5). При использовании равенств (3.3) и (2.1) видно, что в точке $\eta = 0$ нет полюса.

§4. Исследование корней уравнений (3.6)

Все корни уравнений (3.6) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} &(v_5^2 t^2 - z^2)\eta^6 \mp i2xtv_5^2\eta^5 + [v_5^2(v_2^2 + v_4^2)t^2 - v_5^2 x^2 - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\eta^4 \\ &\mp i2xtv_5^2(v_2^2 + v_4^2)\eta^3 + [v_2^2 v_4^2 v_5^2 t^2 - v_3^2(v_2^2 + v_4^2)x^2 - v_1^2 v_3^2 z^2]\eta^2 \\ &\mp i2xtv_2^2 v_4^2 v_5^2 \eta - v_2^2 v_4^2 v_5^2 x^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Оба уравнения (4.1) являются уравнениями шестого порядка и имеют по 6 корней. Корни первого уравнения (4.1) $\eta_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ корни второго уравнения (4.1) $\eta_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ связаны между собой соотношениями

$$\eta_j^{(1)} = -\eta_j^{(2)}, \tag{4.2}$$

которые показывают, что корни обоих уравнений (4.1) расположены симметрично относительно начала координат.

Для дальнейшего исследования корней уравнений (4.1) полезно произвести замену

$$\eta - i\zeta, \tag{4.3}$$

после которой уравнения (4.1) переходят в уравнения

$$\begin{aligned} -(v_5^2t^2 - z^2)\zeta^6 \pm 2xtv_5^2\zeta^5 + [v_5^2(v_2^2 + v_4^2)t^2 - v_5^2x^2 - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\zeta^4 \\ \mp 2xtv_5^2(v_2^2 + v_4^2)\zeta^3 - [v_2^2v_4^2v_5^2t^2 - v_5^2(v_2^2 + v_4^2)x^2 - v_1^2v_3^2z^2]\zeta^2 \\ \pm 2xtv_2^2v_4^2v_5^2\zeta - x^2v_2^2v_4^2v_5^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

с вещественными коэффициентами. Из принципа симметрии следует, что мнимые и комплексные корни обоих уравнений (4.4) расположены симметрично относительно вещественной оси. Если вернуться к переменной η, то придем к выводу, что вещественные и комплексные корни уравнений (4.1) симметричны относительно мнимой оси.

При $x = 0$ оба уравнения (4.1) имеют двойной корень $\eta = 0$ и переходят в одинаковые биквадратные уравнения

$$(v_5^2t^2 - z^2)\eta^4 + [v_5^2(v_2^2 + v_4^2)t^2 - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\eta^2 + v_1^2v_3^2(v_6^2t^2 - z^2) = 0. \tag{4.5}$$

Так как коэффициенты уравнения (4.5) являются вещественными, то корни уравнения (4.5) обладают симметрией относительно обеих осей и начала координат. При $v_6t > z$ все корни уравнения (4.5) лежат на мнимой оси и в верхней полуплоскости расположены в интервалах

$$0 < \tau < v_4, \quad v_3 < \tau < v_2. \tag{4.6}$$

В случае $z > v_6t$ один корень уравнения (4.5) находится в промежутке

$$v_3 < \tau < v_2 \tag{4.7}$$

мнимой оси, а другой корень η лежит на положительной части вещественной оси и удовлетворяет условию (рис. 5)

$$\eta > \eta_4. \tag{4.8}$$

Размещение корней в обоих случаях соответствует рис. 1, 3 и 5.

Исследуем перемещение корней уравнений (4.1) с ростом или с уменьшением x от 0. Чтобы исследовать корни в окрестности начала координат при малых x, полезно представить первое и второе уравнения (3.6) в виде равенств

$$\begin{aligned} &\eta t \mp \frac{zn}{v_5}\sqrt{\frac{(\eta^2+v_1^2)(\eta^2+v_3^2)}{(\eta^2+v_2^2)(\eta^2+v_4^2)}} - ix = 0, \\ &\eta t \mp \frac{zn}{v_5}\sqrt{\frac{(\eta^2+v_1^2)(\eta^2+v_3^2)}{(\eta^2+v_2^2)(\eta^2+v_4^2)}} + ix = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

записанных соответственно на основном и втором листах плоскости η, при этом верхний знак относится к основному листу, а нижний знак – ко второму листу. Каждое из уравнений (4.9) имеет при $x = 0$ корень $\eta = 0$ на обоих листах, и эти корни в уравнениях (4.1) объединяются, образуя корень второй кратности $\eta = 0$. В области малых $|\eta|$ уравнения (4.9) заменяются соответствующими асимптотическими соотношениями

$$\begin{aligned} &\eta\big(t \mp \frac{z}{v_6}\big) \pm \frac{\eta^3 z}{2v_6}\Big(\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_4^2}-\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_3^2}\Big) - ix = 0, \\ &\eta\big(t \mp \frac{z}{v_6}\big) \pm \frac{\eta^3 z}{2v_6}\Big(\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_4^2}-\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_3^2}\Big) + ix = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из (4.10) следуют приближенные выражения для корней первого и второго уравнений (3.6)

$$\eta = \frac{ixv_6}{v_6 t - z}, \quad \eta = \frac{-ixv_6}{v_6 t - z} \tag{4.11}$$

на основном листе и

$$\eta = \frac{ixv_6}{v_6 t + z}, \quad \eta = \frac{-ixv_6}{v_6 t + z} \tag{4.12}$$

на втором листе. Корни (4.11) представляют интерес при исследовании волнового поля и при условии $v_6 t > z$ эти корни необходимо учитывать, так как они лежат справа от контура λ. Корни

(4.12) не представляют интереса, поскольку находятся на втором листе плоскости η.

Корни уравнений (4.1), лежащие на вещественной оси при условиях $x = 0$ и $v_6 t < z$, смещаются в комплексную область с ростом или с уменьшением x. Используя теорему о неявных функциях, приходим к выводу, что с ростом x положительный корень первого уравнения (4.1) перемещается вверх, а положительный корень второго уравнения – вниз. Наоборот, при уменьшении x от 0 положительный корень первого уравнения (4.1) смещается в нижнюю полуплоскость, а положительный корень второго уравнения – в верхнюю полуплоскость. Эти корни расположены справа от контура λ, и их следует учитывать. Мнимые корни, лежащие в интервалах

$$|\eta_4| < \tau < v_4, \quad |\eta_2| < \tau < v_2, \tag{4.13}$$

смещаются при малых $|x|$ по мнимой оси, но продолжают оставаться в указанных интервалах, которые находятся слева от контура λ. Все комплексные и мнимые корни второго уравнения являются симметричными по отношению к корням первого уравнения. Это утверждение следует из соотношения (4.2) и из симметрии относительно мнимой оси корней первого и второго уравнений (4.1). На основании этого утверждения при исследовании корней можно ограничиться подробным рассмотрением корней только в верхней полуплоскости.

Корни уравнений (4.1) не могут находиться при $x \neq 0$ на вещественной оси. В этом легко убедиться, если приравнять нулю вещественные и мнимые части уравнений (4.1). Полученные при этом равенства не могут быть выполнены одновременно.

Уравнения (3.6) не могут удовлетворяться в точках контуров λ, за исключением седловых точек, лежащих на мнимой оси. В самом деле, на контурах λ выполняются условия

$$\mathrm{Re}(t\eta - z\alpha \mp ix) \leqslant 0, \tag{4.14}$$

при этом равенство справедливо только в седловых точках, лежащих на мнимой оси. Таким образом, корни уравнений (3.6) не могут пересечь контур λ вне мнимой оси, но могут выходить на мнимую ось в седловых точках. Так как корни первого уравнения (3.6) расположены симметрично относительно мнимой оси, то на положительную часть мнимой оси выходят одновременно два корня, образуя двойной корень. В этих двойных корнях выполняются соответственно две системы уравнений

$$t\eta - z\alpha(\eta) \mp ix = 0,$$
$$t - z\alpha'(\eta) = 0, \tag{4.15}$$

из которых второе уравнение определяет седловые точки.

С дальнейшим изменением x двойной корень разделяется на два мнимых корня, при этом один поднимается по мнимой оси, а другой спускается. Эти корни оказываются по разные стороны от контура λ и один из них следует учитывать. Таким образом, два симметричных относительно мнимой оси комплексных корня выходят через седловую точку на мнимую ось.

В волновом поле также может наблюдаться и обратный переход, когда два сближающихся мнимых корня объединяются в двойной корень в седловой точке и затем выходят в комплексную область, оставаясь симметричными относительно мнимой оси.

Оба эти перехода связаны с пересечением фронта. В самом деле, двойной корень, совпадающий с седловой точкой, удовлетворяет системе уравнений (4.15). Если решить эти системы относительно x и z, то придем к равенствам

$$x = \mp it\left(\eta - \frac{\alpha(\eta)}{\alpha'(\eta)}\right), \quad z = \frac{t}{\alpha'(\eta)}, \tag{4.16}$$

определяющим, согласно работам [2–3], координаты точек фронта в зависимости от положения седловых точек $\eta = i\tau$. При фиксированных величинах t и z точка наблюдения с ростом или с уменьшением x проходит через фронт. Формулы (4.16) определяют координаты фронтов в зависимости от положения седловых точек, лежащих на мнимой оси [3]. Седловые точки в верхней полуплоскости могут находиться в интервалах

$$\tau > v_1, \quad v_2 < \tau < v_2, \quad 0 < \tau < v_4 \tag{4.17}$$

мнимой оси, а формулы (4.16) могут рассматриваться как параметрическое задание фронтов.

На основании исследований [2], проведенных по формулам (4.16), были построены фронты волн, возбужденных точечным источником, расположенным в начале координат (рис. 10).

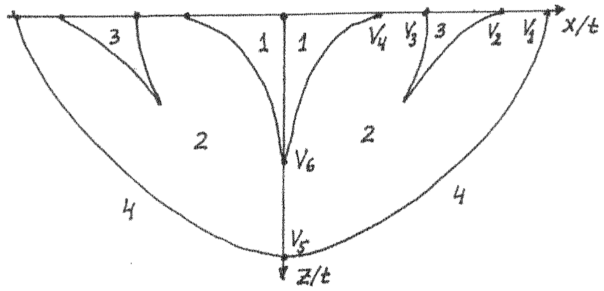


Рис. 10.

Передний фронт описывается седловой точкой η_1, находящейся в интервале $(iv_1, i\infty)$. "Треугольный фронт", состоящий из вогнутой и выпуклой частей, описывается соответственно седловыми точками η_2 и η_3, лежащими в промежутке (iv_3, iv_2). Вогнутый задний фронт определяется седловой точкой η_4, расположенной в интервале $(0, iv_4)$.

Для дальнейших исследований полезно разделить полуплоскость $z > 0$ на четыре области. Область 1 расположена внутри заднего вогнутого фронта. Область 2 ограничена передним, "треугольным" и вогнутым задним фронтами. Область 3 состоит из двух частей, лежащих внутри "треугольных фронтов". Область 4 находится впереди переднего фронта (рис.10). Переход из одной области в другую связан с переходом через фронт.

С увеличением $|x|$ от нуля и при условии $z > v_6 t$ вещественные корни уравнения (4.5) переходят в комплексные корни уравнений (4.1), при этом в случае $x > 0$ первое уравнение (4.1) имеет корень в верхней полуплоскости η, а второе уравнение (4.1) – корень в нижней полуплоскости. Если $x < 0$, то корни смещаются в противоположных направлениях. Оба корня расположены справа от контура λ и их следует учитывать. Соответствующие точки наблюдения находятся в области 2.

Эти комплексные корни с изменением времени и координат точки наблюдения могут выходить на мнимую ось через седловые точки. Через точки $\eta = \eta_1$ корни попадают в промежутки $\tau > v_1$ и $\tau < -v_1$ (точка наблюдения в области 4, впереди переднего фронта). Через точки $\eta = \eta_2$ и $\eta = \eta_3$ корни оказываются в интервалах $v_3 < \tau < v_2$, $-v_2 < \tau < -v_3$, а точка наблюдения – в область 3, при этом в случае $\eta = \eta_2$ переход осуществляется через вогнутый фронт, а при $\eta = \eta_3$ – через выпуклый фронт. Наконец, через точки $\eta = \eta_4$ корни попадают в интервал $-v_4 < \tau < v_4$, а точки наблюдения оказываются в области 1.

На основании проведенных исследований установлено, что во всех рассмотренных случаях справа от контура λ находятся два симметричных относительно вещественной оси корня, которые могут быть вещественными, комплексными и мнимыми.

§5. Вычисление волнового поля

Как показано в §4, каждое из двух уравнений (3.6) имеет справа от контура λ по одному корню $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_2^{(2)}$. Эти корни расположены симметрично относительно вещественной оси и могут быть комплексными, мнимыми и вещественными. Интегралы в формулах (3.5) вычисляются по вычетам в полюсах $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_2^{(2)}$. В результате приходим к соотношениям

$$u_{xi} = -\frac{i}{\pi}\left[\frac{A_{xi}(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} - \frac{A_{xi}(\eta_2^{(2)})}{z\alpha'(\eta_2^{(2)}) - t}\right],$$
$$u_z = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} + \frac{B_z(\eta_2^{(2)})}{z\alpha'(\eta_2^{(2)}) - t}\right] + u_z^0. \tag{5.1}$$

Так как величины $A_{xi}(\eta)$, $B_z(\eta)$ и $\alpha'(\eta)$ являются вещественными на вещественной оси, то равенства (5.1) могут быть заменены формулами

$$u_{xi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\frac{A_{xi}(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t},$$
$$u_z = -\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} + u_z^0. \tag{5.2}$$

Волновому полю на оси z соответствует случай, когда величина $\eta_1^{(1)}$ является вещественной. Соотношения (5.2) в этом случае заменяются равенствами

$$u_{xi} = 0, \quad u_z = -\frac{2}{\pi}\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} + u_z^0. \tag{5.3}$$

Напомним, что величина u_z^0 отлична от нуля только в интервале $z < v_6 t$ оси z. Поэтому вне оси z внутри области 1, внутри "треугольных фронтов", а также впереди переднего фронта смещения обращаются в нуль. За передним фронтом, в области 2 и вне оси z, волновое поле определяется формулами (5.2), в которых величина $\eta_1^{(1)}$ является комплексной и решением первого уравнения (4.1). Если же точка наблюдения расположена на оси z в области 2, то $\eta_1^{(1)}$ является вещественной и смещения определяются формулами (5.3).

Таким образом, волновое поле в эффективной модели определяется величиной $\eta_1^{(1)}$, которая может быть вещественной или комплексной. Вещественная величина $\eta_1^{(1)}$ является корнем биквадратного уравнения (4.5). Для нахождения комплексного корня $\eta_1^{(1)}$ полезно предварительно определить мнимые корни первого уравнения (4.1) и понизить порядок этого уравнения.

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда временная функция $f(t)$ является произвольной функцией, а не задается формулой (3.4). Используя теорему о свертке, получим соотношения

$$U_{xi}(x,z,t) = \int_0^t u_{xi}(\tau,x,z) f(t-\tau) d\tau \quad (i=1,2),$$
$$U_z(x,z,t) = \int_0^t u_z(\tau,x,z) f(t-\tau) d\tau \tag{5.6}$$

для смещений U_{xi} и U_z в случае произвольной функции $f(t)$. Особенность волнового поля в этом случае состоит в том, что оно не обращается в нуль внутри "треугольных фронтов" и в области 1.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
2. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели пористой слоистой среды со скользящим контактом между слоями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 184–206.

3. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* СПб, Наука (2001).
4. С. Л. Соболев, *Некоторые вопросы теории распространения колебаний*, гл. XII — в кн.: Ф. Франк и Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*, Л–М (1937), 468–617.
5. Л. А. Молотков, М. Н. Перекарева, *Исследование волнового поля в эффективной модели, описывающей упруго-жидкую слоистую среду.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 175–192.

Molotkov L. A. Investigation of wave field in effective model of layered elastic medium with slide contact on interfaces.

The ellective model of the medium consisting of two alternating elastic layers with slide contact on boundaries is investigated. The wave field in this model is represented as Fourier and Mellin integrals. In the Mellin integrals we replace contour of integration by a stationary contours. In the obtained expressions, we rearrange the integrals and calculate the inner integral. The external integral is equal to two residues. The corresponding poles are roots of two equations of sixth order. These roots can be situated at the right half-plane and can be complex or real. The obtained representation of the wave field corresponds to expressions derived by the method of Smirnov–Sobolev.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 апреля 2007 г.