Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

М. А. Лялинов

РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ С ЛОКАЛЬНЫМ НАРУШЕНИЕМ ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

1. Введение

Невозмущенная волна падает на решетку, составленную из имподансных полос, и, отражаясь, уходит от решетки на бесконечность. Периодическая структура решетки приводит к особому поведению отраженной волны, которая состоит из конечного числа распространяющихся плоских волн, уходящих на бесконечность под различными углами, а также из бесконечного числа экспоненциально убывающих слагаемых. Такое поведение является стандартным для различных типов отражающих решеток.[1] Однако, если периодическая структура дифракционной решетки нарушена дополнительным локальным рассеивателем (который мы называем "дефектом" решетки или локальным нарушением периодичности), структура рассеянной волны изменяется. При относительно малых размерах дефекта взаимодействие падающей и отраженной волн с дефектом порождает дополнительный тип волны. Эта волна распространяется от дефекта и на бесконечности похожа на волну от точечного источника, помещенного в некоторой точке вместо дефекта. Таким образом, дефект малых размеров может рассматриваться как мнимый источник волны с амплитудой, определяемой падающей и отраженной от решетки волнами и зависящей от некоторых интегральных характеристик малого рассеивателя. Предполагается, что дефект это ограниченная плоская область Σ с условием Дирихле (или импедансным) на границе (см. рис. 1).

В данной работе мы обсуждаем замкнутую постановку задачи,

Работа поддержана грантом EJ/hsm IS Rus 06/07-59 Норвежского Совета по научным исследования и грантом Коммиссариата по атомной энергии Франции.

[1] Здесь мы не обсуждаем возможность распространения поверхностной волны для некоторых типов решеток.

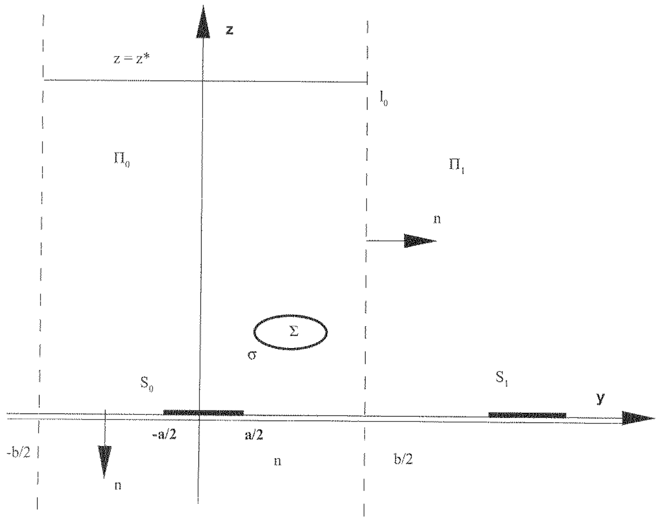

Рис. 1.

выводим интегральные уравнения, рассматриваем аналог "оптической" теоремы в задаче. В случае относительно малых размеров дефекта построен старший член формальной асимптотики решения, зависящий от интегральных характеристик дефекта.

2. Постановка задачи рассеяния волн от точечного источника, расположенного над решеткой без дефекта

В этом и следующем параграфах мы полагаем, что дифракционная решетка не имеет дефекта и освещается точечным источником, расположенным в точке $M_0 = (y_0, z_0)$. Поле, рассеянное решеткой вместе с падающим удовлетворяет уравнению Гельмгольца над решеткой $(M = (y, z))$

$$(\Delta + k^2)g(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \tag{1}$$

где $\Delta = \partial_y^2 + \partial_z^2$, $\delta(M, M_0)$ дельта-функция Дирака, $k = \omega/c$ волновое число. Уравнение границы решетки $z = 0$, решетка состоит из сегментов и имеет период b по координате y. На каждом периоде решетка составлена импедансными сегментами, на которых выполнены граничные условия, описанные ниже. Уравнение (1) выполнено в области $\Pi = \bigcup_m \Pi_m \cup l_m$, Π_m полубесконечные полосы с границей $S_m \cup l_{m-1} \cup l_m$, ($l_m = \{(y,z) : y = b/2 + mb, 0 < z < \infty\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Благодаря периодичности решетки, можно изучить задачу в полуполосе Π_0.

Для этого рассмотрим преобразование (Гельфанда)

$$G(t,y,z,y_0,z_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(y+mb,z,y_0,z_0)e^{-imt}, \tag{2}$$

где t параметр Флоке. Функции G и g связаны также обратным преобразованием

$$g(y,z,y_0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,y,z,y_0,z_0)dt. \tag{3}$$

Предполагается, что $g \in L_2(-\infty,\infty)$ по y при каждом фиксированном z, [1]. Легко проверить, что выполнены условия Флоке–Блоха для G

$$G(t,y+m_0b,z,y_0,z_0) = e^{im_0t}G(t,y,z,y_0,z_0), \tag{4}$$

$$\partial_y G(t,y+m_0b,z,y_0,z_0) = e^{im_0t}\partial_y G(t,y,z,y_0,z_0), \tag{5}$$

m_0 – целое.

Мы предполагаем выполненными условия импедансного типа на границе решетки

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n} - i\alpha G\right]\Big|_{(y,z)\in S_a} = 0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n} - i\beta G\right]\Big|_{(y,z)\in S_b} = 0, \tag{7}$$

где

$$S_a = \{(y,0), |y| < a/2\},\ S_b = \{(y,0) : a/2 < |y| < b/2\},\ S_0 = S_a \cup S_b,$$

S_0 b – периодически повторяется так, что $S = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} S_m$. Нормаль n – внешняя по отношению к области $z > 0$. Такую решетку называют составленной из импедансных полос, (α, β импедансы).

В окрестности точек $\pm a/2 + mb$ скачка импедансов справедливы условия Мейкснера

$$G(t, y, z, y_0, z_0) = c + d\rho \log \rho + O(\rho), \tag{8}$$

где ρ расстояние между “сингулярной” точкой и точкой M, принадлежащей ее окрестности. Отметим, что для G выполнено уравнение[2]

$$(\Delta + k^2)G(t, y, z, y_0, z_0) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0 + mb)\delta(z - z_0)e^{-imt}. \tag{9}$$

Функция G называется квазипериодической функцией Грина.

Для завершения постановки представим G в виде

$$G(t, y, z, y_0, z_0) = G_0(t, y, z, y_0, z_0) + G_r(t, y, z, y_0, z_0), \tag{10}$$

где G_0 квазипериодическая функция Грина в задаче на всей плоскости (y, z) без решетки

$$G_0(t, y, z, y_0, z_0) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(k\sqrt{(z - z_0)^2 + (y - y_0 + mb)^2})e^{-imt}, \tag{11}$$

G_r представляет рассеянное решеткой волновое поле, которое и требуется найти в задаче.

Потребуем, чтобы для достаточно больших $z \geqslant z_0$ функция Грина имела вид

$$G(t, y, z, y_0, z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n(t, z, y_0, z_0)\Psi_n(t, y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (B_n^0(t, z, y_0, z_0) + R_n(t, y_0, z_0)e^{i\Gamma_n(t)z})\Psi_n(t, y), \tag{12}$$

где

$$\Psi_n(t, y) = \frac{1}{\sqrt{b}} e^{i\Lambda_n(t)y}, \quad \Lambda_n(t) = \frac{t + 2\pi n}{b},$$
$$\Gamma_n(t) = \sqrt{k^2 - \Lambda_n^2(t)}, \quad \operatorname{Im}\Gamma_n > 0, \tag{13}$$

[2]Если ограничиться одной полуполосой с $m = 0$, считая, что источник принадлежит той же полуполосе, в (9) остается только одно слагаемое в правой части. Для квазипериодической функции Грина формулируется замкнутая краевая задача в полуполосе с $m = 0$.

причем при $\operatorname{Im}\Gamma_n = 0$ считаем $\operatorname{Re}\Gamma_n > 0$.

Коэффициенты B_n^0 известны и находятся из (11) преобразованием к виду

$$G_0(t,y,z,y_0,z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2b} \frac{e^{i\Lambda_n(t)(y-y_0)} e^{i\Gamma_n(t)|z-z_0|}}{\Gamma_n(t)} \tag{14}$$

так, что

$$B_n^0 = \frac{i}{2\sqrt{b}} \frac{e^{-i\Lambda_n y_0 - i\Gamma_n z_0}}{\Gamma_n} e^{i\Gamma_n z}. \tag{15}$$

Вторая сумма в представлении (12) играет роль условий излучения для G_r.[3] Такие условия справедливы для непороговых значений k, т.е. $\Gamma_n \neq 0$.

Стоит прокомментировать условия излучения (12). Хорошо известно, что в дальнем поле существует конечное число распространяющихся плоских волн ($\Gamma_n > 0$), отраженных от решетки, тогда как остальные слагаемые в (12) экспоненциально убывают при $z \to \infty$. Эти условия для G эквивалентны условиям излучения Зоммерфельда для g.

При разумных ограничениях задача (9), (6)–(8), (4), (5), (12) имеет единственное решение. Соответствующее решение может быть найдено, например, с помощью редукции задачи к интегральному уравнению, что мы обсудим в следующем параграфе.

В тривиальной ситуации, когда импедансное условие (7) выполнено на всей границе S (т.е. $a = 0$), квазипериодическая функция Грина находится явно

$$G_\beta(t,M,M_0) = \frac{i}{2b} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\Lambda_n(t)(y-y_0)}}{\Gamma_n(t)} \Bigg(e^{i\Gamma_n(t)|z-z_0|} + \frac{\Gamma_n(t)-\beta}{\Gamma_n(t)+\beta} e^{i\Gamma_n(t)|z+z_0|} \Bigg). \tag{16}$$

---

[3] Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и, значит, поверхностные волны отсутствуют, то условие излучения для g имеют вид условий излучения Зоммерфельда

$$\int\limits_{S_R} \left| \frac{\partial g}{\partial r} - ikg \right|^2 ds \to 0, \quad R \to \infty,$$

S_R полуокружность радиуса R в области $z > 0$.

Одной из наиболее важных характеристик рассеяния на решктке является коэффициент отражения $R_n(t)$.[4] Для описания дифракционной картины обычно достаточно вычислить конечное число коэффициентов $R_n(t)$, которые соответствуют вещественным значениям Γ_n (распространяющиеся моды). Явные выражения для $R_n(t)$ находятся с помощью ортогональности системы функций $\{\Psi_n(t,y)\}$ на интервале $[-b/2, b/2]$. Таким оразом, имеем (z^* достаточно велико)

$$R_n(t) = \left\{ \int\limits_{-b/2}^{b/2} (G(t,y,z^*,y_0,z_0) - G_0(t,y,z^*,y_0,z_0))\overline{\Psi}_n(t,y)dy \right\} \times \\ \times e^{-i\Gamma_n z^*}. \qquad (17)$$

3. Интегральное уравнение в задаче дифракции на решетке без дефекта

Искомая функция Грина удовлетворяет уравнению (9)

$$(\Delta_{y_1z_1} + k^2)G(t,y_1,z_1,y_0,z_0) = -\delta(y_1 - y_0)\delta(z_1 - z_0), \\ (y_0,z_0) \in \Pi_0, \quad (y_1,z_1) \in \Pi_0. \qquad (18)$$

Заметим, что функция G_β в тривиальном случае ($a = 0$) решает уравнение

$$(\Delta_{y_1z_1} + k^2)G_\beta(t,y,z,y_1,z_1) = -\delta(y - y_1)\delta(z - z_1), \qquad (19) \\ (y,z) \in \Pi_0, \quad (y_1,z_1) \in \Pi_0.$$

Умножим уравнение (18) на $G_\beta(t,y,z,y_1,z_1)$, а уравнение (19) на $G(t,y_1,z_1,y_0,z_0)$, вычтем полученное и проинтегрируем по области $\Pi_0^{z^*}$, которая является частью Π_0, $0 < z < z^*$, (рис. 1). Применим теорему Грина, таким образом, имеем

$$G_\beta(t,y,z,y_0,z_0) - G(t,y,z,y_0,z_0) \\ = \int\limits_{\partial\Pi_0^{z^*}} ds_1 \left(\frac{\partial G_\beta}{\partial n_1}(t,y,z,y_1,z_1)G(t,y_1,z_1,y_0,z_0) \right. \\ \left. - \frac{\partial G}{\partial n_1}(t,y_1,z_1,y_0,z_0)G_\beta(t,y,z,y_1,z_1) \right), \qquad (20)$$

[4] Иногда зависимость $R_n(t,y_0,z_0)$ от y_0, z_0 не будет указываться.

где интегрирование ведется вдоль границы $\partial\Pi_0^{z^*} = S_0 \cup \{z = z^*, |y| < b/2\} \cup l_0^{z^*} \cup l_{-1}^{z^*} \cup S^{\varepsilon}_{+a/2} \cup S^{\varepsilon}_{-a/2}$, $S^{\varepsilon}_{\pm a/2}$ дуги малого радиуса ε вокруг точек $y = \pm a/2$, $z = 0$ скачка импеданса, n_1 внешняя нормаль к границе.

Преобразуем интегральное слагаемое в (20). Принимая во внимание, что $n_1 = y_1$ на $l_0^{z^*}$ и $n_1 = -y_1$ на $l_{-1}^{z^*}$, а также условия квазипериодичности (4), (5) и

$$\partial^j_{y_1} G_\beta(t, y, z, b/2, z_1) = e^{-it}\partial^j_{y_1} G_\beta(t, y, z, -b/2, z_1), \quad j = 0, 1, \qquad (21)$$

(условия (21) проверяются непосредственно с помощью (16)), заключаем, что интегралы по $l_0^{z^*}$ и $l_{-1}^{z^*}$ взаимно сокращаются. С использованием условий излучения для G и G_β (см. (12)) проверяется, что интеграл по $\{z = z^*, |y| < b/2\}$ стремится к нулю при $z^* \to \infty$.[5] Интегралы по дугам $S^{\varepsilon}_{\pm a/2}$ исчезают при $\varepsilon \to 0$ благодаря условию Мейкснера (8). Наконец, подынтегральное выражение обращается в ноль на S_b ввиду импедансного условия (7). Используя также условие (6), получим интегральное представление

$$G(t, y, z, y_0, z_0) = G_\beta(t, y, z, y_0, z_0) + i(\alpha - \beta)\int\limits_{-a/2}^{a/2} G_\beta(t, y, z, y_1, 0) \cdot G(t, y_1, 0, y_0, z_0)dy_1. \qquad (22)$$

Полагая, что $M = (y, z) \in S_a$, приходим к интегральному уравнению второго рода ($(y, 0) \in S_a$)

$$G(t, y, 0, y_0, z_0) = G_\beta(t, y, 0, y_0, z_0) + i(\alpha - \beta)\int\limits_{-a/2}^{a/2} G_\beta(t, y, 0, y_1, 0)G(t, y_1, 0, y_0, z_0)dy_1. \qquad (23)$$

Если в результате решения интегрального уравнения (23) найти значение G на границе S_a, то представление (22) позволяет вычислить G в любой точке полосы Π_0.

[5] При проверке используется ортогональность системы функций Ψ_m на $[-b/2, b/2]$.

Традиционно является важным изучение свойств ядра G_β интегрального уравнения (23). Можно продемонстрировать, что оно имеет логарифмическую особенность при $z \sim z_1 \sim 0$, $y \sim y_1$.

Обратимся к выражению (16) для $G_\beta(t, M, M_1)$. Сингулярная часть G_β определяется слагаемым

$$G_0(t, y, z, y_1, z_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2b} \frac{e^{i\Lambda_n(t)(y-y_1)} e^{i\Gamma_n(t)|z-z_1|}}{\Gamma_n(t)}, \qquad (24)$$

тогда как второе слагаемое в (16) абсолютно и равномерно сходится ($z_1 > 0$).[6] Следуя известной процедуре [1], получаем

$$\begin{aligned} G_0(t, y, z, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \Phi_1(y, z, y_1, z_1) e^{i\frac{t}{b}(y-y_1)} \cosh(\frac{t}{b}|z - z_1|) \\ -\frac{i}{2\pi} \Phi_2(y, z, y_1, z_1) e^{i\frac{t}{b}(y-y_1)} \sinh(\frac{t}{b}|z - z_1|) \\ +\frac{i}{2b} \frac{e^{i\Lambda_0(t)(y-y_1)+i\Gamma_0(t)(z-z_1)}}{\Gamma_0(t)} + G_1(t, y, z, y_1, z_1), \end{aligned} \qquad (25)$$

где

$$\Phi_1(y, z, y_1, z_1) = -\frac{1}{2} \ln \left[\sinh^2(\frac{\pi}{b}|z - z_1|) + \sin^2(\frac{\pi}{b}(y - y_1)) \right] - \ln 2 + \frac{\pi}{b}|z - z_1|,$$

$$\Phi_2(y, z, y_1, z_1) = \arctan \left[\frac{e^{-\frac{2\pi}{b}|z-z_1|} \sin \frac{2\pi}{b}(y - y_1)}{1 - e^{-\frac{2\pi}{b}|z-z_1|} \cos \frac{2\pi}{b}(y - y_1)} \right],$$

$$G_1(t, y, z, y_1, z_1) = \sum_{\substack{m \neq 0, \\ m=-\infty}}^{+\infty} \left[\frac{i}{2b} \frac{e^{i\Lambda_m(t)y-y_1)+i\Gamma_m(t)|z-z_1|}}{\Gamma_m(t)} - i\frac{\cosh(\frac{t}{b}|z - z_1| - i\frac{2\pi m}{b}(y - y_1))}{2\pi m} e^{i\frac{t}{b}(y-y_1) - \frac{2\pi m}{b}|z-z_1|} \right].$$

Основная идея вывода формулы (25) совершенно естественна: из слагаемых бесконечной суммы вычитается старший член их асимптотики при больших номерах. Суммирование старших

[6] Выделение логарифмической особенности ядра $G_\beta(t, y, 0, y_1, 0)$ в уравнении (23), т.е. при $z_1 = 0$, проводится аналогично, хотя при этом участвуют оба слагаемые в (16).

членов асимпотики проводится явно и дает нерегулярные слагаемые Φ_1 и Φ_2, тогда как разность G_1 абсолютно и равномерно сходится, так как слагаемые в G_1 допускают оценку $O(1/m^2)$.

Старшие члены разложения для квазипериодической функции Грина G_β имеют вид

$$G_\beta(t, y, z, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{2\pi}{b} + C(t, z_1) + O(r_1 \log r_1), \tag{26}$$

где

$$C(t, z_1) = \frac{i}{2b} \frac{1}{\Gamma_0(t)} + \sum_{\substack{m \neq 0 \\ m=-\infty}}^{\infty} \left[\frac{i}{2b} \frac{1}{\Gamma_m(t)} - \frac{i}{2\pi m} \right]$$

$$+ \frac{i}{2b} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma_m(t)} \frac{\Gamma_m(t) - \beta}{\Gamma_m(t) + \beta} e^{i2\Gamma_m(t)z_1}, \quad r_1 = \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Хорошо известно, что интегральное уравнение второго рода с логарифмическим ядром обладает фредгольмовым свойством и, значит, может быть быть решено с помощью стандартной численной процедуры.

Принимая во внимание (22) и (3), находим разложение для функции Грина решетки из импедансных полос

$$g(y, z, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2\pi}{b} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt C(t, z_1)$$

$$+ \frac{i(\alpha - \beta)}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} G_\beta(t, y_1, z_1, s, 0) G(t, s, 0, y_1, z_1) ds \right\} + O(r_1 \log r_1). \tag{27}$$

Последнюю формулу мы используем для построения асимптотики рассеянного поля в задаче с малым дефектом над периодической структурой.

4. Задача о дефекте над периодической решеткой

Предположим теперь, что над решеткой расположен дефект Σ (рис. 1). Полное поле

$$u(y,z) = u^i(y,z) + u^r(y,z) + w(y,z) \tag{28}$$

представимо суммой трех слагаемых, где u^i и u^r известное волновое поле из задачи дифракции на решетке без дефекта, $u^i(y,z) + u^r(y,z) =: g(y,z,y_0,z_0)$. Эти слагаемые предполагаются известными, и процедура их вычисления описана выше. Неизвестное слагаемое $w(y,z)$ может быть преобразовано с помощью формул (2), (3)

$$W(t,y,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(y+mb,z)e^{-imt},$$

$$w(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} W(t,y,z)dt. \tag{29}$$

Функция $w(y,z)$ $(W(t,y,z))$ играет роль возмущения благодаря дефекту и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)w = 0 \tag{30}$$

и граничному условию на дефекте

$$L(u^i + u^r + w)|_\sigma = 0, \tag{31}$$

где L тождественный оператор для условия Дирихле и $L = \partial_n - i\gamma$ для импедансного условия на дефекте. На поверхности решетки полное поле u удовлетворяет условиям (6), (7). Условие излучения Зоммерфельда для w имеет вид ($\mathrm{Re}\,\alpha > 0$)

$$\int\limits_{S_R} |\partial_r w - ikw|^2 ds \to 0, \quad R \to \infty,$$

S_R полуокружность радиуса R, $z > 0$.

Функция $W(t,y,z)$ подчинена условиям Блоха–Флоке

$$\partial_y^j W(t,y+b,z) = e^{it}\partial_y^j W(t,y,z), \quad j = 0,1. \tag{32}$$

Условие излучения удобно переформулировать в терминах $W(t,y,z)$,

$$U(t,y,z) = U^i(t,y,z) + U^r(t,y,z) + W(t,y,z)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n^0(t,z) + R_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z} + V_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z})\Psi_n(t,y), \quad (33)$$

где $G(t,y,z,y_0,z_0) =: U^i(t,y,z) + U^r(t,y,z)$ известны заранее, а $V_n(t)$ в (33) неизвестны. Если полное поле $U(t,y,z)$ вычислено, что эквивалентно определению $W(t,y,z)$, то коэффициенты $V_n(t)$ находятся явно

$$V_n(t) = \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} W(t,y,z)\big|_{z=z^*} \overline{\Psi_n(t,y)dy} \right\} e^{-i\Gamma_n(t)z^*}, \quad (34)$$

(см. также (17)), z^* достаточно велико.

В приложении показано, что наличие дефекта приводит к появлению на бесконечности цилиндрической волны, расходящейся от дефекта как от источника и имеющей асимптотику

$$w(r,\varphi) = \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} F_w(\varphi)(1 + O(r^{-1})), \quad (35)$$

$F_w(\varphi)$ – диаграмма рассеяния связана с V_n явной формулой (см. Приложение), (r,φ) полярные координаты. Эта неравномерная по φ асимптотика согласуется с условиями излучения.

5. Основное энергетическое тождество и “оптическая” теорема

Обозначим D полосу $z > 0$, $z \leqslant z_2$, $|y| < \infty$ над решеткой. Ее граница ∂D состоит из границы σ дефекта Σ, границы решетки и линии $z = z_2$, $|y| < \infty$. Как и ранее, мы предполагаем, что поле возбуждается точечным источником в точке (y_0, z_0)

$$u^i(y,z) =: g_0(y,z,y_0,z_0) = \frac{iA}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{(z-z_0)^2 + (y-y_0)^2}), \quad (36)$$

A – интенсивность источника. Полное поле

$$u(y,z) = u^i(y,z) + u^r(y,z) + w(y,z) \quad (37)$$

является суммой падающей волны, отраженной от решетки $u^r =: g_r(y,z,y_0,z_0)$ и рассеянной дефектом $w(y,z)$, и удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)u(y,z) = -A\delta(y-y_0, z-z_0). \tag{38}$$

Предполагается, что справедливы граничные условия на решетке (6), (7), условия Мейкснера и условия на дефекте (31), а также условия излучения (33).

Умножим уравнение (38) на $\bar{u}$. Затем, комплексно сопряженное к (38) ($k > 0$) умножим на u и вычтем из предыдущего. Результат проинтегрируем по D, имеем

$$\int\limits_D (u\Delta\bar{u} - \bar{u}\Delta u)dydz = A\int\limits_D (\bar{u}(y,z) - u(y,z))\delta(y-y_0, z-z_0)d\mu dz$$
$$= -\frac{iA}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Im} U(t,y_0,z_0)dt. \tag{39}$$

Для левой части равенств (39) применим формулу Грина и перепишем (39) в виде

$$-\frac{iA}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Im} U(t,y_0,z_0)dt = \int\limits_{\partial D}\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{S_m}\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u(y,z_2)\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}(y,z_2) - \bar{u}(y,z_2)\frac{\partial u}{\partial z}(y,z_2))dy$$
$$+\int\limits_\sigma\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \tag{40}$$

Заметим, что точки смены импеданса $(\pm a/2 + mb, 0)$ при интегрировании в (40) обходятся по дугам малого радиуса ε. Соответствующие традиционные оценки, использующие условия Мейкснера, мы опускаем.

Обратимся к второму слагаемому в правой части (40)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(y,z_2)\frac{\partial \bar u}{\partial z}(y,z_2)dy = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-b/2+mb}^{b/2+mb} u(y,z_2)\frac{\partial \bar u}{\partial z}(y,z_2)dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-b/2}^{b/2} dy\int_0^{2\pi} dt\int_0^{2\pi} d\tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(t-\tau)}U(t,y,z_2)\frac{\partial \bar U}{\partial z}(\tau,y,z_2), \tag{41}$$

где, в частности, мы использовали условие Флоке–Блоха. Примем во внимание соотношение

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(t-\tau)},$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Используем это соотношение в (41) и, кроме того, будем считать z_2 достаточно большим. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy u(y,z_2)\frac{\partial \bar u}{\partial z}(y,z_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\int_{-b/2}^{b/2} dy U(t,y,z_2)\frac{\partial \bar U}{\partial z}(t,y,z_2)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-b/2}^{b/2} dy\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}[B_m(t,z_2)\Psi_m(t,y)$$

$$+V_m(t)e^{i\Gamma_m(t)z_2}\Psi_m(t,y)]\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=z_2}[\bar B_n(t,z)\overline{\Psi}_n(t,y)$$

$$+\bar V_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z}\overline{\Psi}_n(t,y)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(B_n(t,z_2)$$

$$+V_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z_2})\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=z_2}(\bar B_n(t,z)+\bar V_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z}), \tag{42}$$

где мы использовали ортогональность $\Psi_n(t,\cdot)$ на интервале $[-b/2,b/2]$; $B_n(t,z) = B_n^0(t,z) + R_n(t)e^{i\Gamma_m(t)z}$ предполагаются известными. Воспользуемся равенствами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial B_n^0}{\partial z}(t,z) = -i\Gamma_n(t)B_n^0(t,z),\\
\frac{\partial}{\partial z}(\bar{R}_n e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z} + \bar{V}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z} + \bar{B}_n^0(t,z))\\
= i\overline{\Gamma}_n(t)\bar{B}_n^0(t,z) - i\overline{\Gamma}_n(t)[(\bar{B}_n^0(t,z) + \bar{R}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z} + \bar{V}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n z})\\
-\bar{B}_n^0(t,z)] = -i\overline{\Gamma}_n(t)(\bar{B}_n^0(t,z) + \bar{R}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z} + \bar{V}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n z})\\
+i\overline{\Gamma}_n(t)\bar{B}_n^0(t,z) + \frac{\partial}{\partial z}\bar{B}_n^0(t,z).
\end{gathered}
$$

Правая часть равенства (42) может быть переписана в виде

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\bigg|_{z=z_2} dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\bigg\{ -i\overline{\Gamma}_n(t)\bigg|B_n^0(t,z_2) + R_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z_2}\\
+V_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z_2}\bigg|^2 + (B_n^0(t,z_2) + [R_n(t)+V_n(t)]e^{i\Gamma_n(t)z_2})\\
\times(i\overline{\Gamma}_n(t)\bar{B}_n^0(t,z_2) + \frac{\partial}{\partial z}\bar{B}_n^0(t,z_2))\bigg\}. \qquad (43)
\end{gathered}
$$

Из (43) следует, что

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=z_2} dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{i\Gamma_n(t)|B_n^0(t,z_2)\\
+R_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z_2} + V_n(t)e^{i\Gamma_n(t)z_2}\big|^2 - (\bar{B}_n^0(t,z_2)\\
+(\bar{R}_n(t)+\bar{V}_n(t))e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z_2})\cdot(i\Gamma_n(t)B_n^0(t,z_2) - \frac{\partial B_n^0}{\partial z}(t,z_2))\}. \quad (44)
\end{gathered}
$$

С учетом граничных условий на решетке и дефекте, используя (43), (44), основное энергетическое соотношение (40) может быть представлено в виде

$$\frac{-iA}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}U(t,y_0,z_0)dt=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{S_0}\int\limits_0^{2\pi}(\zeta(y)+\overline{\zeta}(y))|U(t,y,z)|^2dtdy$$

$$+\int\limits_{\sigma}\Big(\frac{1}{i\gamma}+\frac{1}{\overline{i\gamma}}\Big)\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{-i\overline{\Gamma}_n(t)|B_n^0(t,z_2)$$

$$+(R_n(t)+V_n(t))e^{i\Gamma_n(t)z_2}|^2-i\Gamma_n(t)|B_n^0(t,z_2)+(R_n(t)+V_n(t))$$

$$\cdot e^{i\Gamma_n(t)z_2}|^2+(B_n^0(t,z_2)+(R_n(t)+V_n(t))e^{i\Gamma_n(t)z_2})$$

$$\times(i\overline{\Gamma}_n(t)\overline{B_n^0}(t,z_2)+\frac{\partial\overline{B_n^0}}{\partial z}(t,z_2))+(\overline{B_n^0}(t,z_2)+(\bar{R}_n(t)+\bar{V}_n(t)e^{-i\overline{\Gamma}_n(t)z_2})$$

$$\times(-i\Gamma_n(t)B_n^0(t,z_2)+\frac{\partial B_n^0}{\partial z}(t,z_2))\}dt, \qquad (45)$$

где мы использовали также очевидное равенство

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_{S_m}\Big(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}-\bar{u}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)ds=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\Big\{\int\limits_{S_0}dy(\zeta(y)+\overline{\zeta}(y))\big|U(t,y,0)\big|^2\Big\},$$

где

$$\zeta(y)=\alpha,\quad y\in[-a/2,a/2];\quad \zeta(y)=\beta,\quad \frac{a}{2}<|y|<b.$$

Кроме того, используем равенство

$$|B_n(t,z_2)-B_n^0(t,z_2)|^2=|B_n^0(t,z_2)|^2+|B_n(t,z_2)|^2-B_n\overline{B_n^0}-\overline{B_n}B_n^0,$$

вычислим мнимую часть в (45), получим

$$-\frac{A}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}U(t,y_0,z_0)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{S_0}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\zeta(s)|U(t,s,0)|^2dtds$$

$$+2\operatorname{Re}(1/\gamma)\int\limits_{\sigma}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2ds=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\sum_n{}'|R_n(t)+V_n(t)|^2\Gamma_n(t)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\sum_n{}'|B_n^0(t,z_2)|^2\Gamma_n(t), \qquad (46)$$

где суммирование в правой части (46) ведется по тем номерам n, для которых $\Gamma_m(t) > 0$, что обозначено штрихом.

Соотношение (46) это основное энергетическое соотношение. В различных приложениях равенства такого сорта называют "оптической" теоремой. В частности, из этого соотношения следует единственность решения, если источник отсутствует $A = 0$, $B_n^0 = 0$ и $\mathrm{Re}(1/\gamma) \geqslant 0$ ($\mathrm{Re}\,\zeta(y) > 0$). В этом случае решение без источника тривиально, что равносильно единственности.

6. Интегральное уравнение на дефекте в случае условия Дирихле

Вывод интегрального уравнения для дефекта с условием Дирихле на нем традиционно. Мы используем уравнения для w и для функции Грина g решетки без дефекта, применим теорему Грина для области $\Omega_{R,\sigma}$ с границей $\partial\Omega_{R,\sigma} = S_R \cup \sigma \cup \{z = 0, |y| < R\}$. Эта область внутри полуокружности S_R радиуса R, вне дефекта σ и над решеткой S, $z = 0$. Имеем ($R \to \infty$)

$$w(y,z) = \int\limits_{\Omega_{R,\sigma}} (\Delta w g - \Delta g w) dy' dz'$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_{R,\sigma}} (\partial_n w g - \partial_n g w) ds = \int\limits_{\sigma} (\partial_n w g - \partial_n g w) ds, \qquad (47)$$

если $R \to \infty$ то интеграл по S_R исчезает ввиду условий излучения для w и g. Из-за выполнения граничных условий пропадает интеграл по границе $z = 0$, $(\partial_n w - i\zeta(y) w)\big|_S = 0$.

Воспользуемся граничным условием на дефекте (31) в (47) и положим $M = (y, z) \to \sigma$, получим интегральное уравнение

$$\int\limits_{\sigma} g(M, M'\big|_{\sigma}) \partial_n w\big|_{M' \in \sigma} ds = F(M), \quad M \in \sigma, \qquad (48)$$

где

$$F(M) = -(u^i + u^r) - \int\limits_{\sigma} \partial_n g \cdot (u^i + u^r) d\sigma.$$

Решив интегральное уравнение, в принципе, можно восстановить возмущение w от дефекта над решеткой. Уравнение (48) имеет логарифмическую особенность ядра и имеет единственное решение, если исходная задача однозначно разрешима при $k > 0$. Для импедансного условия получается интегральное уравнение второго рода на дефекте.

7. Асимптотика решения задачи в случае дефекта малого размера и условия Дирихле на нем

Асимптотическое решение задачи, если относительные размеры дефекта малы, может быть построено с помощью сшивания локальных асимптотических разложений. Обратимся сначала к условию Дирихле на дефекте

$$w\big|_{\sigma} = -(u^i + u^r)\big|_{\sigma}. \tag{49}$$

Пусть дефект над решеткой Σ_ε зависит от малого параметра $\varepsilon \ll 1$, $\sigma_\varepsilon = \partial\Sigma_\varepsilon$. Мы считаем, что область Σ_ε определяется с помощью преобразования подобия с коэффициентом ε из некоторой фиксированной области Σ

$$\Sigma_\varepsilon = \{(y,z) : (y - y_1, z - z_1) = \varepsilon(Y,Z), (Y,Z) \in \Sigma\}, \tag{50}$$

где (y_1, z_1) некоторая точка внутри Σ_ε.

Мы рассмотрим нахождение лишь старшего члена формального асимптотического решения. Будем искать внешнее разложение в виде суммы мультиполей

$$w(y,z) \sim P_0^0(\varepsilon) g(y,z,y_1,z_1) + \varepsilon(P_1^0 g + P_1^1 g) + \dots, \tag{51}$$

где P_0^0 постоянная, зависящая от $\log\varepsilon$ рационально, P_i^j дифференциальные операторы по y_1 и z_1 порядков, зависящих от номера члена асимптотического ряда. Напомним, что мы обсуждаем лишь старшие члены, $g(y,z,y_1,z_1)$ функция Грина в задаче без дефекта.

Внутреннее разложение имеет вид

$$w(y,z) \sim w_0(Y,Z,\log\varepsilon) + \varepsilon w_1(Y,Z,\log\varepsilon) + \dots. \tag{52}$$

Разложения (51) и (52) сшиваются в области, где $\sqrt{Y^2 + Z^2} \to \infty$, $\sqrt{(y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Более подробное описание области сшивания мы опускаем, так как оно совершенно традиционно [3]. Функции $w_j(Y,Z,\log\varepsilon)$ зависят от $\log\varepsilon$ рационально.

Старший член в разложении (52) решает задачу

$$\Delta_{Y,Z} w_0 = 0, \tag{53}$$

$$w_0\big|_{\sigma=\partial\Sigma} = -(u^i + u^r)\big|_{(y_1,z_1)}, \tag{54}$$

с условием на бесконечности $\sqrt{Y^2+Z^2} \to \infty$, которое получается из сшивания в старшем порядке внешнего (51) и внутерннего (52) разложений

$$w_0(Y, Z, \log\varepsilon) \sim P_0^0(\varepsilon) g(y, z, y_1, z_1) \tag{55}$$

при $\sqrt{y^2+z^2} \to \infty$, $\sqrt{(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Для обеспечения условия (55) необходимо знать асимптотику правой части при $\sqrt{(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \to 0$. Результат соответствующего вычисления представлен (27). Для нахождения постоянной $P_0^0(\varepsilon)$ введем вспомогательную функцию $V(Y,Z)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta V = 0,$$
$$V\big|_\sigma = 0,$$
$$V(Y,Z) = -\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{Y^2+Z^2} - \frac{1}{2\pi}W^* + O\Big(\frac{1}{\sqrt{Y^2+Z^2)}}\Big),$$

где, по определению, W^* винеровская мера области $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Эта интегральная характеристика области связана с конформным радиусом ρ^* [4] области, $W^* = -\log\rho^*$. Например, для эллписа с полуосями a_0, b_0 винеровская мера $W^* = -\log\frac{a_0+b_0}{2}$.

В терминах $V(Y,Z)$ решение задачи (53)–(55) ищем в виде

$$w_0(Y,Z) = \alpha_0 V(Y,Z) + \beta_0.$$

Сравнивая задачу для V и (53)–(55), находим

$$\beta_0 = -(u^i + u^r)\big|_{(y_1,z_1)},$$
$$\alpha_0 = P_0^0,$$
$$-\alpha_0 \;\; \frac{W^*}{2\pi} + \beta_0 = P_0^0\delta,$$

где

$$\delta(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\Big[-\log\varepsilon-\log\frac{2\pi}{b}\Big]+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt c(t,z_1)$$

$$+\frac{i(\alpha-\beta)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\Big\{\int\limits_{-a/2}^{a/2}G_\beta(t,y_1,z_1,s,0)G(t,s,0,y_1,z_1)ds\Big\},\quad (56)$$

где квазипериодическая функция Грина G должна быть найдена как решение задачи без дефекта.

Теперь мы легко находим старший член внешнего разложения для $w(y,z)$

$$w(y,z)\sim-\frac{(u^i+u^r)(y_1,z_1)}{(\delta(\varepsilon)+W^*/2\pi)}\;g(y,z,y_1,z_1),\quad (57)$$

которое справедливо вне некоторой окрестности дефекта. Имея выражения (57), несложно вычислить старший член асимптотики диаграммы рассеяния $F_w(\varphi)$ от малого дефекта (см. Приложение).

8. Малый дефект с импедансным краевым условием

Мы считаем, что на дефекте Σ_ε выполнено импедансное краевое условие

$$\frac{\partial(u^i+u^r+w)}{\partial u}-i\gamma(u^i+u^r+w)\big|_{\sigma_\varepsilon}=0.\quad (58)$$

Старший член аситптотики решения в этом случае находится аналогично случаю Дирихле. Однако, внешнее и внутреннее разложения имеют несколько иную форму:

$$w(y,z)\sim\varepsilon B_1(M_0)g(y,z,y_1,z_1)+\varepsilon^2(B_2g+\sum_{j=1}^{2}B_{2j}\partial_{x_j^1}g)+\dots\quad (59)$$

внешнее разложение,

$$w(y,z)\sim\varepsilon w_1(Y,Z)+\varepsilon^2w_2(Y,Z)+\dots\quad (60)$$

внутренее разложение. Мы используем следующее разложение для $u^i + u^r$

$$(u^i + u^r)(M, M_0) = (u^i + u^2)\big|_{M=M_1} + \varepsilon Y D_y(M_1, M_0)$$
$$+\varepsilon Z D_z(M_1, M_0) +)(\varepsilon^2), \tag{61}$$

где $M_1 = (y_1, z_1)$, D_y и D_z известные величины, явное выражение для которых нам не потребуется.

Подставим разложение (61) в граничное условие (58), записанное в координатах (Y, Z),

$$\big(\cos(n', Y)\frac{\partial}{\partial Y} + \cos(n', Z)\frac{\partial}{\partial Z}\big)[\varepsilon w_1(Y, Z) + \varepsilon^2(Y, Z)$$
$$+(u^i + u^r)(M_1, M_0) + \varepsilon Y D_y(M_1, M_0) + \varepsilon Z D_z(M_1, M_0) + \dots]$$
$$= i\gamma(\varepsilon(u^i + u^r)(M_1, M_0) + \varepsilon^2 w_1(Y, Z) + \dots),$$

n' единичная внутреняя нормаль к σ.

Традиционным образом мы получаем, что w_1 в старшем приближении решает задачу

$$\Delta w_1 = 0,$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial n'}\big|_\sigma = i\gamma\big[(u^i + u^r)(M_1, M_0) - \big(D_y\frac{\partial Y}{\partial n'} + D_z\frac{\partial Z}{\partial n'}\big)\big],$$
$$w_1(Y, Z) \sim B_1(M_0)\big(-\frac{1}{2\pi}\big)\log(\varepsilon\sqrt{Y^2 + Z^2}) + \text{const} + \dots \tag{62}$$

при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon\sqrt{Y^2 + Z^2} \to \infty$. Последнее условие в (62) следует из сшивания внешнего и внутреннего разложений в старшем порядке. Коэффициент B_1, который представляет наибольший интерес для нас, находится стандартным образом с помощью применения теоремы об интеграле по границе от нормальной производной гармонической функции,

$$B_1 = i\gamma(u^i + u^r)(M_1, M_0)|\varkappa|,$$

где $\varepsilon|\varkappa|$ асимптотически (по ε) равна длине $|\sigma_\varepsilon|$ кривой σ_ε. В результате мы находим

$$w(M, M_0) = i\gamma|\sigma_\varepsilon|(u^i + u^r)(M_1, M_0)g(M, M_1)(1 + O(\varepsilon)) \tag{63}$$

вне малой окрестности дефекта.

9. Приложение. Диаграмма рассеяния от дефекта над решеткой

Диаграмма рассеяния $F_w(\varphi)$ в (35) может быть представлена в терминах коэффициентов $V_n(t)$. Соответствующие вычисления близки использованным в задаче о точечном источнике над решеткой [1]. Имеем

$$w(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(t,y,z)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} V_m(t)e^{i\Gamma_m(t)z}\Psi_m(t,y)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} V_m(\tau-2\pi m)e^{i\Gamma_m(\tau-2\pi m)}\Psi_m(\tau-2\pi m,y)d\tau, \tag{69}$$

где $\tau = t+2\pi m$. Введем новую переменную интегрирования

$$b\lambda = \begin{cases} \tau+2\pi n, & n=-m, m>0 \\ \tau, & n=0 \\ \tau-2\pi n, & n=m, m>0, \end{cases}$$

тогда $(-\infty<\lambda<\infty)$

$$w(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(\lambda)e^{i\Gamma(\lambda)z+i\lambda y}d\lambda, \tag{70}$$

где $\Gamma(\lambda)=\sqrt{k^2-\lambda^2}$,

$$V(\lambda) = \sqrt{b}\begin{cases} V_n(\lambda b-2\pi n), & 2\pi n<\lambda b\leqslant 2\pi(n+1), n>0 \\ V_0(\lambda b), & 0<\lambda b\leqslant 2\pi \\ V_{-n}(\lambda b+2\pi n), & -2\pi n<\lambda b\leqslant -2\pi(n-1), n>0 \end{cases}$$

Вычислим асимптотику интеграла (70) при $r\to\infty$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, $|\varphi|\leqslant\pi/2$,

$$w(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda)e^{irh(\lambda)}d\lambda,$$

где $h(\lambda) = \sqrt{k^2 - \lambda^2}\cos\varphi + \lambda\sin\varphi$. Единственная стационарная точка удовлетворяет уравнению

$$h'(\lambda_0) = 0, \quad \lambda_0 = k\sin\varphi,$$

где

$$h'(\lambda_0) = -\frac{\lambda_0\cos\varphi}{\sqrt{k^2\lambda_0^2}} + \sin\varphi,$$

$$h''(\lambda_0) = -\frac{k^2\cos\varphi}{\sqrt{k^2 - \lambda_0^2}} \leqslant 0.$$

Используя метод стационарной фазы, получаем

$$w(r,\varphi) = \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} V(\lambda_0)[k^2\cos^2\varphi]^{1/2}\big(1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\big)$$

или

$$w(r,\varphi) = \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} F_w(\varphi)\big(1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\big),$$

где

$$F_w(\varphi) = \sqrt{b}k\cos\varphi \begin{cases} V_n(kb\sin\varphi - 2\pi n), & 2\pi n \leqslant \lambda_0 b < kb \\ V_0(kb\sin\varphi), & 0 \leqslant \lambda_0 b < 2\pi \\ V_{-n}(kb\sin\varphi + 2\pi n), & -kb < \lambda_0 b \leqslant -2\pi(n-1), \end{cases}$$

$n = \left[\frac{kb}{2\pi}\right]$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$, $[A]$ целая часть числа A.

Литература

1. Т. Н. Галишникова, А. С. Ильинский, *Численные методы в задачах дифракции.* Изд-во МГУ, Москва (1987).
2. А. С. Ильинский, Ю. В. Шестопалов, *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн*, Изд-во МГУ, М. (1989).
3. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М. (1989).
4. N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, New York (1972).

Lyalinov M. A. Scattering of waves by a diffraction grating with a local default of its periodic structure.

Scattering of waves by an impedance strips grating with a local defect over its surface is considered. Formulation of the problem and a basic energy correlation are discussed. Integral equations for the problem at hand is studied. The leading term of the asymptotic solution for a small defect is represented. The latter depends on integral characteristics of the defect.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 января 2007 г.