Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Крауклис П. В., Крауклис А. П.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ТРУБНОЙ ВОЛНЫ РАДИАЛЬНЫМ И ВЕРТИКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКАМИ, ПРИКРЕПЛЕННЫМИ К СТЕНКЕ СКВАЖИНЫ

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к задаче применения трубных волн для акустического каротажа. Однако, несмотря на то, что существует большое число работ, посвященных этой теме ([1, 2]), ряд вопросов, касающихся конкретных аспектов поведения поля в околоскважинном пространстве окончательно не выяснен [3]. В данной работе проводится анализ волновых процессов для двух типов источников, находящихся на стенке скважины.

Рассмотрим скважину (I) ($r \leqslant r_0$, $-\infty < z < \infty$) в цилиндрической системе координат (r, z, θ) заполненную жидкостью и помещенную в упругую среду (II) ($r > r_0$, $-\infty < z < \infty$). Обозначим через a_i и b_i скорости продольной и поперечной волн в соответствующей среде и через ρ_i, μ_i и λ_i – плотности и упругие модули. Скорости связаны с упругими модулями уравнениями:

$$\lambda_i + 2\mu_i = \rho_i a_i^2, \quad \mu_i = \rho_i b_i^2 \tag{1}$$

Мы рассмотрим два типа источников, прикрепленных к стенке скважины: радиальное напряжение, приложенное к участку скважины длиной $2h$, и вертикальное напряжение, приложенное к тому же участку.

Источники описываются формулами:

$$t_{rr}^0 = \begin{cases} q\delta(t), & -h \leqslant z \leqslant h, \\ 0, & |z| > h, \end{cases} \qquad q = \frac{1}{2\pi r_0 h} \tag{2}$$

$$t_{rz}^0 = \begin{cases} q\delta(t), & -h \leqslant z \leqslant h, \\ 0, & |z| > h, \end{cases} \qquad q = \frac{1}{2\pi r_0 h} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00936 и 05-05-65301).

Продольные φ_1, φ_2 и поперечный ψ_2 потенциалы смещений удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}-\frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}=0\ (i=1,2), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}-\frac{\psi_2}{r^2}-\frac{1}{b_2^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0. \tag{5}$$

Смещения u_r, u_z и напряжения t_{rr}, t_{rz} связаны с потенциалами следующими выражениями:
в жидкости: $u_r^{(1)}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}$; $u_z^{(1)}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$; $t_{rr}^{(1)}=\frac{\lambda_1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}$;
в твердом теле:

$$\begin{aligned}u_r^{(2)}&=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z};\ u_z^{(2)}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+\frac{\psi_2}{r};\ t_{rr}^{(2)}\\ &=\frac{\lambda_2}{a_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+2\mu_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}-2\mu_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\psi_2\partial z};\ t_{rz}^{(2)}\\ &=2\mu_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\varphi_2\partial z}+\rho_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-2\mu_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

На границе скважины удовлетворяются граничные условия, в соответствии с которыми нормальные к границе смещения и напряжения непрерывны, а сдвиговые напряжения исчезают. Рассмотрим задачи для радиального (2) и вертикального (3) источника отдельно.

Радиальный источник t_{rr}^0

В этом случае мы имеем следующие граничные условия:

$$u_r^{(1)}-u_r^{(2)}=0;\ t_{rr}^{(1)}-t_{rr}^{(2)}=t_{rr}^0;\ t_{rz}^{(2)}=0. \tag{7}$$

Используя преобразования Фурье-Бесселя и Фурье и принимая во внимание ограниченность поля на оси $r=0$ и убывание при $r\to\infty$, мы можем представить источник и потенциалы в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
t_{rr}^0 &= \frac{2q}{\pi} b_2 \int_0^\infty \sin\, kh \cos\, kz\, dk\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{k\eta b_2 t}\, d\eta\ ; \\
\varphi_1 &= b_2 \int_0^\infty k \cos\, kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} A I_0(kr\alpha_1) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta\ ; \\
\varphi_2 &= b_2 \int_0^\infty k \cos\, kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} B K_0(kr\alpha_2) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta\ ; \\
\psi_2 &= b_2 \int_0^\infty k \sin\, kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} C K_1(kr\beta_2) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\alpha_i = \left(1 - v^2/a_i^2\right)^{1/2}$, $\beta_2 = \left(1 - v^2/b_2^2\right)^{1/2}$, $v = -i\eta b_2$ и I_0, K_0, K_1 модифицированные функции Бесселя.

Подставляя (8) в условия (7) мы получаем систему трех алгебраических линейных уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 I_1(x_1) A + \alpha_2 K_1(x_2) B + K_1(y_2) C = 0; \\
&2\alpha_2 K_1(x_2) B + \left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right) K_1(y_2) C = 0; \\
&\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{v^2}{b_2^2} I_0(x_1) A + \left[\left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right) K_0(x_2) + \frac{2\alpha_2}{kr_0} K_1(x_2)\right] B + \\
&+ \left[2\beta_2 K_0(y_2) + \frac{2}{kr_0} K_1(y_2)\right] C = -\frac{2q}{\pi} \frac{\sin kh}{k^3 \mu_2};
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $x_1 = kr_0\alpha_1$; $x_2 = kr_0\alpha_2$; $y_2 = kr_0\beta_2$.

Приравнивая определитель системы (9) нулю, мы получаем дисперсионное уравнение, связывающее фазовые скорости нормальных волн и частоту f (или волновое число $k = 2\pi f/v$):

$$
\Delta \equiv \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{v}{b_2}\right)^2 I_0(x_1)\alpha_2 + \alpha_1 I_1(x_1) \times
$$

$$
\times \left[\left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right)^2 \frac{K_0(x_2)}{K_1(x_2)} - 4\alpha_2\beta_2 \frac{K_0(y_2)}{K_1(y_2)} - \frac{2}{kr_0} \frac{v^2}{b_2^2} \alpha_2\right] = 0
$$

Константы A, B, C определяются из системы (9) и они равны:

$$A = \Delta_A/\Delta;\ B = \Delta_B/\Delta;\ C = \Delta_C/\Delta;$$
$$\Delta_A = \alpha_2 T\eta^2;\ \Delta_B = \frac{-T\alpha_1(2+\eta^2)I_1(x_1)}{K_1(x_2)};$$
$$\Delta_C = \frac{2T\alpha_1\alpha_2 I_1(x_1)}{K_1(y_2)};\ T = \frac{2q}{\pi}\frac{\sin kh}{k^3\mu_2}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8) и используя (6) мы имеем:

$$u_r^{(1)} = b_2\int\limits_0^\infty k^2\cos kzT\,dk\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\alpha_1\alpha_2\eta^2}{\Delta}I_1(kr\alpha_1)e^{k\eta b_2 t}d\eta;$$

$$u_z^{(1)} = -b_2\int\limits_0^\infty k^2\sin kzT\,dk\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\alpha_2\eta^2}{\Delta}I_0(kr\alpha_1)e^{k\eta b_2 t}d\eta;$$

$$u_r^{(2)} = b_2\int\limits_0^\infty k^2\cos kzT\,dk\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\eta^2)[K_1(kr\alpha_2)/K_1(x_2)] - 2[K_1(kr\beta_2)/K_1(y_2)]}{\Delta}$$
$$\alpha_1\alpha_2 I_1(x_1)e^{k\eta b_2 t}\,d\eta;$$

$$u_z^{(2)} = b_2\int\limits_0^\infty k^2\sin kzT\,dk\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\eta^2)[K_0(kr\alpha_2)/K_1(x_2)] - 2\alpha_2\beta_2[K_0(kr\beta_2)/K_1(y_2)]}{\Delta}$$
$$\alpha_1 I_1(x_1)e^{k\eta b_2 t}\,d\eta. \tag{11}$$

Выражения (11) описывают полное поле, возбужденное источником. Нормальные волны описываются вычетами в корнях дисперсионного уравнения, умноженными на $2\pi i$. Мы будем рассматривать трубную волну с фазовой скоростью, обозначенной v. Вследствие комплексной сопряженности подынтегральных функций в точках, симметричных относительно реальной оси $\operatorname{Im}\eta =$

0, окончательные выражения будут вещественными и давление внутри скважины представляется в виде:

$$P = -\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty \frac{\rho \sin\, kh}{2hr_0\mu_2} \cos\, kz \frac{v^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial v}} e^{ikvt}\, dk. \qquad (12)$$

Формула (12) есть разложение давления в пространственный спектр. Функция возбуждения, характеризующая распределение амплитуды как функции осевого волнового числа, определяется выражением $(r = 0)$:

$$F = \frac{\sin\, kh}{hr_0\mu_2} \frac{v^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial v}} \rho. \qquad (13)$$

Заменяя переменную $k = 2\pi f/v$, функцию F можно выразить через частоту f.

Возможно из (11) получить следующее выражение для спектральных отношений как функций радиального расстояния:

$$\begin{cases} \frac{U_r^{(1)}(r)}{U_r^{(1)}(r_0)} = \frac{I_1(kr\alpha_1)}{I_1(x_1)}\,; \frac{U_z^{(1)}(r)}{U_z^{(1)}(r_0)} = \frac{I_0(kr\alpha_1)}{I_0(x_1)} \quad (r \leqslant r_0)\,; \\ \frac{U_r^{(2)}(r)}{U_r^{(2)}(r_0)} = \frac{-(2-v^2/b_2^2)[K_0(kr\alpha_2)/K_1(x_2)]+2[K_1(kr\beta_2)/K_1(y_2)]}{v^2/b_2^2} \quad (r > r_0)\,; \\ \frac{U_z^{(2)}(r)}{U_z^{(2)}(r_0)} = \frac{(2-v^2/b_2^2)[K_0(kr\alpha_2)/K_1(x_2)]-2\alpha_2\beta_2[K_0(kr\beta_2)/K_1(y_2)]}{(2-v^2/b_2^2)[K_0(x_2)/K_1(x_2)]-2\alpha_2\beta_2[K_0(y_2)/K_1(y_2)]} \quad (r > r_0)\,; \end{cases} \qquad (14)$$

Все величины, входящие в правые части (14), вычисляются в корнях дисперсионного уравнения. Придавая фиксированное значение частоты и находя из дисперсионного уравнения соответствующие фазовые скорости трубной волны, возможно получить распределение амплитуд радиальной U_r и вертикальной U_z спектральных компонент смещений вдоль радиуса r.

На рис. 1, 2 отношения радиальных смещений как функции расстояния представлены для различных частот и на рис. 3–4 те же зависимости для отношения вертикальных смещений. Видно, что уменьшение U_r и U_z практически не зависит от типа скоростного разреза. Компонента U_r убывает монотонно с удалением от стенки скважины Вертикальное смещение U_z в твердом теле меняет знак на некотором расстоянии, которое уменьшается с ростом частоты. Известно, что изменение знака происходит для волны Релея, распространяющейся вдоль свободной поверхности полупространства.

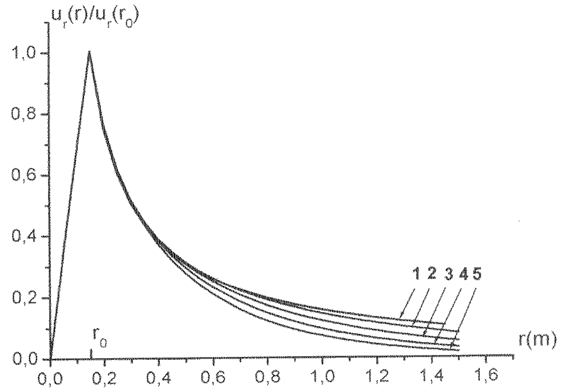

Рис. 1. Радиальная компонента смещения, нормированная на смещение на стенке скважины, как функция расстояния для различных частот. Параметры высокоскоростной модели: $r_0 = 0.15$м, $a_2 = 6000$м/с, $b_2 = 3000$м/с, $\rho = 3$ г/см^3, (1) - 150Гц, (2) - 300Гц, (3) - 450Гц, (4) - 600Гц, (5) - 750Гц.

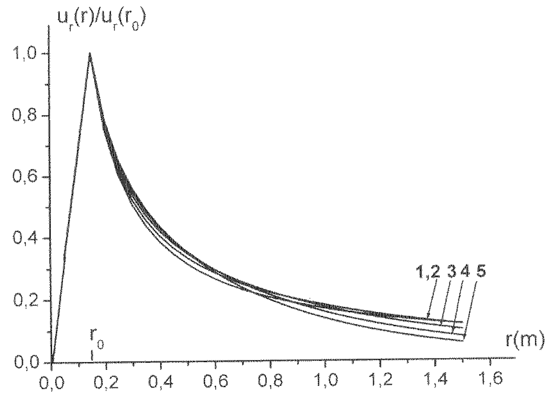

Рис. 2. Радиальная компонента смещения, нормированная на смещение на стенке скважины, как функция расстояния для различных частот. Параметры низкоскоростной модели: $r_0 = 0.15$м, $a_2 = 2700$м/с, $b_2 = 1215$м/с, $\rho = 1.85$ г/см^3, (1) - 150Гц, (2) - 300Гц, (3) - 450Гц, (4) - 600Гц, (5) - 750Гц.

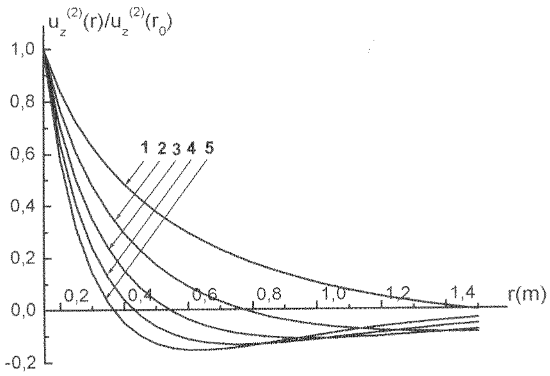

Рис. 3. Вертикальная компонента смещения, нормированная на смещение на стенке скважины, как функция расстояния для различных частот. Параметры высокоскоростной модели соответствуют Рис. 1.

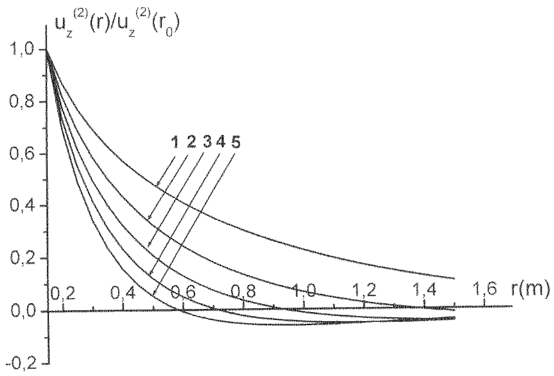

Рис. 4. Вертикальная компонента смещения, нормированная на смещение на стенке скважины, как функция расстояния для различных частот. Параметры низкоскоростной модели соответствуют Рис. 2.

Вертикальный источник t^0_{rz}

В этом случае мы имеем следующие граничные условия:

$$u_r^{(1)} - u_r^{(2)} = 0; \quad t_{rr}^{(1)} - t_{rr}^{(2)} = 0; \quad t_{rz}^{(2)} = t_{rz}^{(0)}, \tag{15}$$

где $t_{rz}^{(0)}$ представляется теми же формулами, что и $t_{rr}^{(0)}$, но продольный и сдвиговый потенциалы выражаются формулами:

$$\varphi_1 = b_2 \int\limits_0^\infty k \sin\ kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} A I_0(kr\alpha_1) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta,$$

$$\varphi_2 = b_2 \int\limits_0^\infty k \sin kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} B K_0(kr\alpha_2) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta,$$

$$\psi_2 = b_2 \int\limits_0^\infty k \cos kz\, dk \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} C K_1(kr\beta_2) e^{k\eta b_2 t}\, d\eta, \tag{16}$$

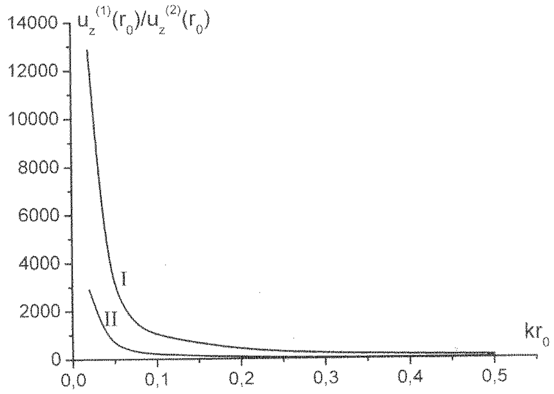

Рис. 5. Отношение вертикального смещения в жидкости к вертикальному смещению в формации как функция безразмерного волнового числа. (I) высокоскоростная среда (см. Рис. 1), (II) низкоскоростная среда (см. Рис. 2).

Подставляя (16) в граничные условия (15), мы имеем следующую систему алгебраических уравнений для определения

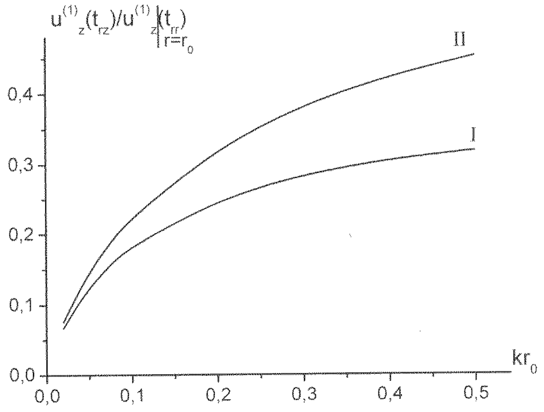

Рис. 6. Отношение вертикального смещения в жидкости для вертикального источника (t_{rz}) к нему же в случае радиального источника (t_{rr}) как функция безразмерного волнового числа. (I) высокоскоростная среда (см. Рис.1), (II) низкоскоростная среда (см. Рис.2).

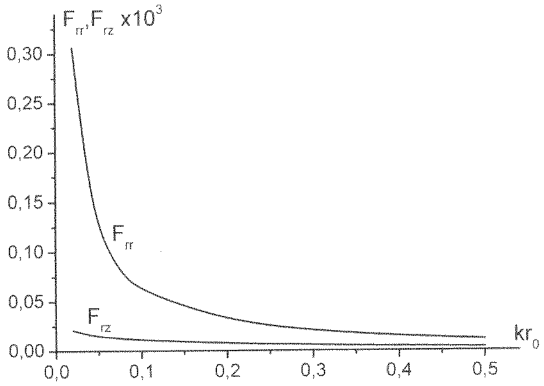

Рис. 7. Зависимость функции возбуждения радиального (F_{rr}) и вертикального (F_{rz}) источников от безразмерного волнового числа kr_0 для высокоскоростной среды.

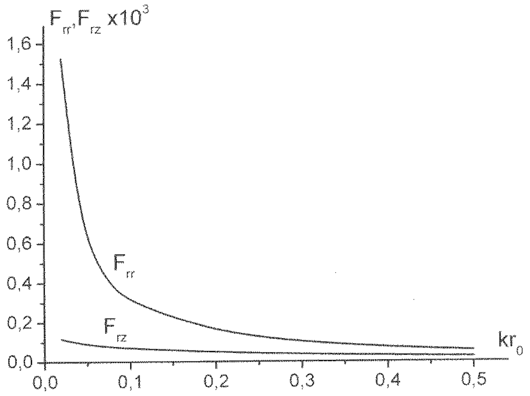

Рис. 8. Зависимость функции возбуждения радиального (F_{rr}) и вертикального (F_{rz}) источников от безразмерного волнового числа kr_0 для низкоскоростной среды.

A, B, C:

$$\begin{cases} \alpha_1 I_1(x_1)A + \alpha_2 K_1(x_2)B - K_1(y_2)C = 0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v^2}{b_2^2} I_0(x_1)A + \left[\left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right) K_0(x_2) + \frac{2\alpha_2}{kr_0} K_1(x_2)\right] B - \\ - \left[2\beta_2 K_0(y_2) + \frac{2}{kr_0} K_1(y_2)\right] C = 0 \\ 2\alpha_2 K_1(x_2)B - \left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right) K_1(y_2)C = -\frac{2q}{\pi}\frac{\sin kh}{k^3\mu_2} \end{cases} \tag{17}$$

Из (17) следуют следующие формулы для A, B, C:

$$\begin{cases} A = \frac{\Delta_A}{-\Delta}T,\ B = \frac{\Delta_B}{-\Delta}T,\ C = \frac{\Delta_C}{-\Delta}T, \\ \Delta_A = -2\alpha_2\beta_2 \frac{K_0(y_2)}{K_1(y_2)} + g_2 \cdot \frac{K_0(x_2)}{K_1(x_2)} \equiv d_1 \\ \Delta_B = \left\{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v^2}{b_2^2} I_0(x_1) + 2\alpha_1\beta_2 I_1(x_1)\frac{K_0(y_2)}{K_1(y_2)} + \frac{2\alpha_1}{kr_0} I_1(x_1)\right\} \frac{1}{K_1(x_2)} \equiv d_2 \\ \Delta_C = \left\{\alpha_1 I_1(x_1)\left[g_2 \frac{K_0(x_2)}{K_1(x_2)} + \frac{2\alpha_2}{kr_0}\right] - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v^2}{b_2^2}\alpha_2 I_0(x_1)\right\} \frac{1}{K_1(y_2)} \equiv d_3 \\ \Delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v^4}{b_2^4} I_0(x_1)\alpha_2 + \alpha_1 I_1(x_1)\left[\left(2 - \frac{v^2}{b_2^2}\right)^2 \frac{K_0(x_2)}{K_1(x_2)} - 4\alpha_2\beta_2\frac{K_0(y_2)}{K_1(y_2)} - \frac{2}{kr_0}\frac{v^2}{b_2^2}\alpha_2\right] \end{cases} \tag{18}$$

Из формул (6), (16), (18) возможно получить выражения для скачка вертикальных смещений на границе скважины в жидкости и твердом теле:

$$\frac{U_z^{(1)}(r_0)}{U_z^{(2)}(r_0)} = \frac{\alpha_2 \eta^2 I_0(x_1)}{-\alpha_1(2+\eta^2)\frac{I_1(x_1)}{K_1(x_2)}K_0(x_2) + \frac{2\alpha_1\alpha_2 I_1(x_1)\beta_2}{K_1(y_2)}K_0(y_2)}. \qquad (19)$$

Как это следует из рис. 5, скачок смещений в высокоскоростной среде более сильный, чем в низкоскоростной.

Отношение вертикальной спектральной компоненты для вертикального источника к такой же для радиального источника имеет следующее выражение:

$$\frac{U_z^{(1)}(kr_0)|_{t_{rz}^0}}{U_z^{(1)}(kr_0)|_{t_{rr}^0}} = \frac{2\alpha_2\beta_2\frac{K_0(y_2)}{K_1(y_1)} - g_2\frac{K_0(x_2)}{K_1(x_2)}}{\alpha_2\eta^2}. \qquad (20)$$

Из рис. 6 видно, что при низких частотах t_{rz}-источник создает более слабую волну, чем t_{rr}-источник. В низкоскоростной среде это различие больше. Функция возбуждения для t_{rr}-источника и t_{rz}-источника представлены на рис. 7 для высокоскоростной и рис. 8 для низкоскоростной среды.

Литература

1. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Волновое поле точечного источника в скважине.* — Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **XVI** (1976), 41–53.
2. M. A. Biot, *Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid.* — J. of Applied Phys. **13**, (1952), 997–1005.
3. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах.* II. Наука, Л. (1985).

Krauklis P. V., Krauklis A. P. Tube wave excitation by the radial and vertical sources clamped to the borehole wall.

Tube wave excitation by the radial and vertical sources clamped to the borehole wall is considered. Tube wave amplitude as the function of radial distance is represented in the cases with high velocity and low velocity media.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 марта 2007 г.