Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Д. П. Коузов, Ю. А. Соловьева

ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ ПЛОСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ, АМПЛИТУДА КОТОРОЙ ЛИНЕЙНО НАРАСТАЕТ ВДОЛЬ ФРОНТА

1. Введение

В последнее время возник интерес к плоским волнам, амплитуда которых линейно изменяется вдоль фронта. В работе [1] показана возможность возникновения волны Рэлея на поверхности однородного упругого полупространства, обладающей такой особенностью. Волны с подобным поведением представляют интерес и в теории разрушения.

При построении решения дифракционной задачи в настоящей работе используется метод Смирнова–Соболева (метод функционально-инвариантных решений [2]). Этот метод неоднократно применялся в автомодельных задачах теории дифракции, т.е. в тех задачах, в которых эволюция волновой картины во времени представляет собой преобразование подобия. В однородных переменных $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ волновая картина как бы останавливается и вместо трех переменных (двух декартовых координат x, y и времени t) процесс удается описать только двумя однородными переменными. При надлежащем выборе окончательных аргументов волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа, что позволяет использовать методы теории функций комплексной переменной для нахождения решения.

С помощью метода Смирнова–Соболева были получены точные аналитические решения ряда задач дифракции плоских нестационарных волн на полубесконечных экранах [2–4], а также решена задача о динамическом нагружении упругой полосы с полубесконечным разрезом [5]. Во всех этих работах зависимость профиля падающей волны [2–4] или возбуждающей нагрузки [5] задавались функцией Хэвисайда. Вдоль фронта амплитуда волны или нагрузки предполагалась постоянной.

Ниже находится точное аналитическое решение новой дифракционной задачи со сходной геометрией модели. Отличие от традиционных рассмотрений [2–5] состоит в структуре падающей волны, которая, однако, по-прежнему задается однородной функцией нулевого порядка декартовых координат и времени. В настоящей работе источником дифракционного поля служит падающая плоская волна, имеющая δ-образный профиль. Амплитуда ее предполагается нарастающей вдоль фронта по линейному закону. Однородность падающего поля позволяет для нахождения решения использовать метод Смирнова-Соболева. Тем не менее, процедура построения дифракционного поля для такого источника обладает существенной спецификой и содержит ряд новых моментов.

2. Постановка задачи

Однородная идеальная акустическая среда, в которой для давления выполняется волновое уравнение

$$\Box p \equiv \Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

(c – скорость звука) заполняет пространство. Полуплоскость $y = 0$, $x \geqslant 0$ свободна от напряжений

$$p = 0 \quad (y = 0, \quad x \geqslant 0). \qquad (2)$$

Источником поля является плоская нестационарная волна $p_0 = (x \sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0) \cdot \delta(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct)$, ($t < 0$, δ – дельта-функция Дирака), наклонно падающая на экран (рис. 1).

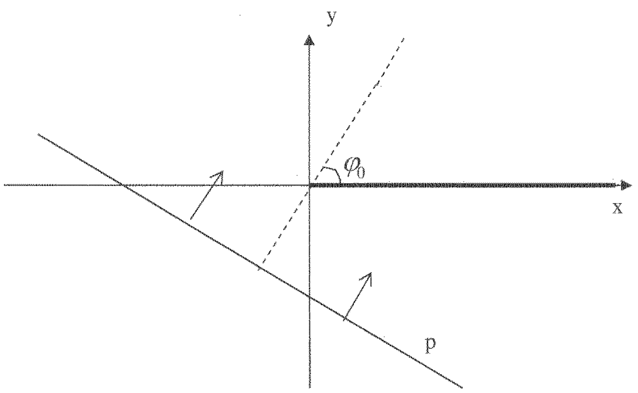


Рис. 1.

Зависимость падающего поля и геометрии задачи от аппликаты z (а стало быть, и всего решения p) отсутствует, таким образом, задача является двумерной. До начала дифракции полное поле p в модели состоит только из падающей волны

$$p = p_0, \quad t < 0,$$

причем до фронта волны ($x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct > 0$), а также позади него ($x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct < 0$) поле отсутствует.

В момент времени $t = 0$ волна p_0 доходит до острия экрана и начинается процесс дифракции. Возникающая при этом волновая картина изображена на рис. 2.

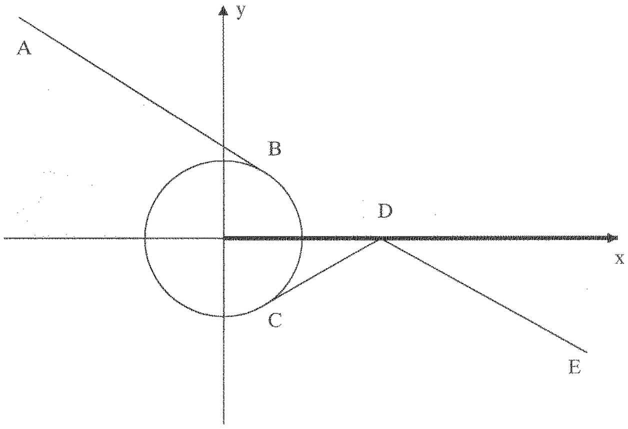


Рис. 2.

Полное поле после начала дифракции представляет собой сумму геометрической p_0 и дифракционной q частей поля

$$p = p_0 + q \quad (t > 0).$$

Геометрическая часть поля при $t > 0$ сосредоточена на лучах AB и DE (прошедший фронт) и отрезке DC (отраженный фронт):

$$\begin{aligned} p_0 = {} & (x\sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0)\vartheta(-x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \\ & \delta(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct) \\ & +(-x\sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0)\theta(x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \\ & \delta(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0 - ct), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Дифракционная часть поля отлична от нуля лишь внутри круга дифракции

$$q = q_0 \vartheta \left(ct - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \tag{4}$$

($\vartheta(x)$ – функция Хэвисайда; $\vartheta(x) = 0$, $x < 0$; $\vartheta(x) = 1$, $x \geqslant 0$).

Применим волновой оператор к геометрической части поля (3). После вычисления производных получим

$$\begin{aligned}\Box p_0 = &-\delta(-x \sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \cdot \delta(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct) \\ &-\delta(x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \cdot \delta(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0 - ct).\end{aligned}$$

Поскольку для полного поля p имеет место однородное волновое уравнение (1) для дифракционной части поля q должно быть выполнено неоднородное волновое уравнение

$$\begin{aligned}\Box q = &+\delta(-x \sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \cdot \delta(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - ct) \\ &+\delta(x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0) \cdot \delta(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0 - ct).\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения дифракционного поля q требуется найти решение неоднородного волнового уравнения (5), удовлетворяющее граничному условию (6)

$$q = 0 \quad (y = 0, \quad x \geqslant 0) \tag{6}$$

Заметим, что уравнение для дифракционного поля сохраняет справедливость для произвольного угла падения $\varphi_0 \ni]0, \pi[$, а не только для ситуации, изображенной на рис. 1, когда падающее поле не претерпевает отражения до начала дифракции.

Искомое решение (как это видно из представления (4)) автоматически удовлетворяет начальному условию $q = 0$, $t \leqslant 0$.

3. Однородные переменные

Поскольку падающее поле p_0 (а с ним и геометрическая часть поля p_0 после начала дифракции) представляет собой однородную функцию нулевого порядка декартовых координат и времени, а модель при растяжении не изменяется, следует ожидать, что дифракционная часть поля q также будет зависеть только от однородных переменных $\xi = \frac{x}{ct}$, $\eta = \frac{y}{ct}$. Переходя в (5) к однородным переменным, получим уравнение

$$
\begin{aligned}
&(\xi^2-1)\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 q}{\partial\xi\partial\eta} + (\eta^2-1)\frac{\partial^2 q}{\partial\eta^2} + 2\xi\frac{\partial q}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial q}{\partial\eta} \\
&= -\delta(-\xi\sin\varphi_0 + \eta\cos\varphi_0)\cdot\delta(\xi\cos\varphi_0 + \eta\sin\varphi_0 - 1) \\
&\quad -\delta(\xi\sin\varphi_0 + \eta\cos\varphi_0)\cdot\delta(\xi\cos\varphi_0 - \eta\sin\varphi_0 - 1).
\end{aligned}
$$

Геометрия задачи такова, что напрашивается переход к полярным координатам $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$

$$
(r^4-r^2)\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + (2r^3-r)\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2} = -\delta(r-1)\cdot[\delta(\varphi-\varphi_0)+\delta(\varphi+\varphi_0)].
$$

Для упрощения последнего уравнения проведем инверсию $\frac{1}{r} = \rho$

$$
(\rho^2-1)\frac{\partial^2 q}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial q}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2} = -\delta(\rho-1)\cdot[\delta(\varphi-\varphi_0)+\delta(\varphi+\varphi_0)]. \quad (7)
$$

4. Граничное условие на периферии круга дифракции

Следует ожидать, что из соображений непрерывности дифракционное поле на периферии круга дифракции ($\rho = 1$) обращается в нуль, если отвлечься от особых точек $\varphi = \pm\varphi_0$. Проверим это непосредственной выкладкой.

Удалим названные особые точки вместе с их некоторыми малыми окрестностями и рассмотрим уравнение (7) в оставшейся части плоскости ρ, φ. Мы имеем однородное уравнение

$$
(\rho^2-1)\frac{\partial^2 q}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial q}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (8)
$$

Воспользуемся представлением (4), которое в наших переменных имеет вид $q = q_0\cdot\vartheta(\rho-1)$ и подставим его в уравнение (8). Выполнив дифференцирование, получим

$$
\left[(\rho^2-1)\frac{\partial^2 q_0}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial q_0}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 q_0}{\partial\varphi^2}\right]\cdot\vartheta(\rho-1) + q_0\cdot\delta(\rho-1) = 0.
$$

В силу линейной независимости функций Хэвисайда и Дирака имеем равенства

$(\rho^2-1)\frac{\partial^2 q_0}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial q_0}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 q_0}{\partial\varphi^2} = 0$, $(\rho < 1)$;

$$q_0\Big|_{\rho=1} = 0.$$

Таким образом, для функции q_0 внутри круга дифракции ($\rho < 1$) имеет место однородное уравнение (8), а на периферии круга ($\rho = 1$) она должна обращаться в нуль всюду, за исключением двух сингулярных точек.

5. Краевая задача

Уравнение (8) внутри круга дифракции ($\rho < 1$) является эллиптическим. Переходя к каноническим переменным φ, θ ($\rho = ch\theta$) приведем его к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 q_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_0}{\partial \varphi^2} = 0.$$

На данном этапе мы не можем воспользоваться неоднородным уравнением (7), поскольку $ch\theta - 1$ имеет при $\theta = 0$ корень второго порядка, и функция $\delta(ch\theta - 1)$ не имеет однозначного истолкования.

Таким образом, искомое поле q_0 является гармонической функцией аргументов θ и φ в области своего задания и может быть представлена реальной (или мнимой) частью некоторой искомой аналитической функции $f(z)$

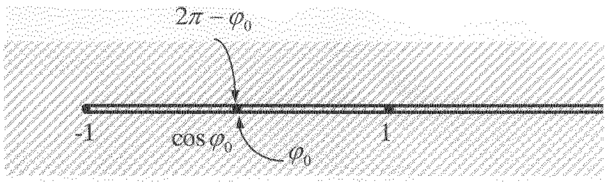
$$q_0 = \operatorname{Im} f(z).$$

В качестве z можно выбрать любую аналитическую функцию аргумента $\varphi + i\theta$. Положим $z = \cos(\varphi + i\theta)$. Тогда, возвращаясь к переменным ρ, φ, получим

$$q_0 = \operatorname{Im} f(\rho \cos\varphi - i \sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 - 1}).$$

Область изменения переменной z является образом круга дифракции, изображенного на рис. 2. При ее построении сохраним ориентацию области, так что при обходе круга дифракции на рис. 2 и его образа на плоскости z (рис. 3) в положительном направлении обе области должны лежать слева.

Задача нахождения дифракционного поля свелась к нахождению функции переменной z, аналитической в области, указанной на рис. 3. При этом мнимая часть $f(z)$ на границе области обращается в нуль за исключением двух сингулярных точек $z = \cos\varphi_0$,



Плоскость z
Рис. 3.

расположенных на обоих берегах разреза. Особенность $f(z)$ в этих точках должна быть подобрана таким образом, чтобы было выполнено неоднородное уравнение (7).

6. Эвристическое решение задачи

Преобразованием $w = \sqrt{z+1}$ переведем область изменения переменной z в верхнюю полуплоскость переменной w.

Таким образом, нас интересует аналитическая в верхней полуплоскости функция, мнимая часть которой на действительной оси обращается в нуль и которая имеет в точках $w = \pm\sqrt{1+\cos\varphi_0}$ особенности, причем такие, что для функции $q = \operatorname{Im} f \cdot \vartheta(\rho - 1)$ имеет место уравнение (7).

Следует ожидать, что искомое решение имеет вид

$$q = \vartheta(\rho-1)\left[\frac{A_1}{w-\sqrt{1+\cos\varphi_0}} + \frac{A_2}{w+\sqrt{1+\cos\varphi_0}}\right],$$

поскольку $\frac{1}{w-w_0}$ выполняет на комплексной плоскости роль $\delta(w-w_0)$ (для контура, обходящего особенность) [6]. Константы A_1 и A_2 нуждаются в подборе. Проверку уравнения (7) мы проведем в следующем разделе, а пока преобразуем предполагаемое решение и запишем его в переменных ρ, φ

$$q_1 = A_1\vartheta(\rho-1)\cdot\operatorname{Im}\frac{1}{w-\sqrt{1+\cos\varphi_0}}$$
$$= -A_1\frac{\sqrt{\rho-1}\,\vartheta(\rho-1)\sin\frac{\varphi}{2}[\rho+1+\cos\varphi_0+\cos\varphi+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\rho+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}]}{(\rho-\cos(\varphi+\varphi_0))(\rho-\cos(\varphi-\varphi_0))}$$

$$q_2 = A_2\vartheta(\rho-1)\cdot\operatorname{Im}\frac{1}{w+\sqrt{1+\cos\varphi_0}}$$
$$= -A_2\frac{\sqrt{\rho-1}\,\vartheta(\rho-1)\sin\frac{\varphi}{2}[\rho+1+\cos\varphi_0+\cos\varphi-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\rho+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}]}{(\rho-\cos(\varphi+\varphi_0))(\rho-\cos(\varphi-\varphi_0))}$$

7. Проверка неоднородного дифференциального уравнения для предполагаемого решения $q(z)$

Для того, чтобы убедиться в том, что при соответствующем выборе константы A, найденное выражение для $q(z)$ удовлетворяет уравнению (7), рассмотрим действие оператора L

$$L = (\rho^2 - 1)\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 - 1)\frac{\partial}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

на функцию q_1. Продуктом этого действия должна оказаться сингулярная обобщенная функция. Мы будем исходить из традиционного определения обобщенной функции как линейного непрерывного функционала над пространством бесконечно дифференцируемых финитных основных функций [6].

Рассмотрим некоторую основную функцию $\psi(\rho, \varphi)$, носитель которой сосредоточен в некоторой окрестности $U(1, \varphi_0)$ особой точки $(1, \varphi_0)$, причем $U(1, \varphi_0) \subset]0, R[\times]0, 2\pi[$ и $(1, 2\pi - \varphi_0) \notin U(1, \varphi_0)$. Функционал (ψ, Lq_1) истолковывается перебрасыванием дифференцирования на основную функцию

$$(\psi, Lq_1) = (\widetilde{L}\psi, q_1), \quad \widetilde{L}\psi = \frac{\partial}{\partial \rho}\left((\rho^2 - 1)\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\psi) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

Результат такой переброски истолковывается как сходящийся интеграл

$$(\widetilde{L}\psi, q_1) = \iint\limits_{U(1,\varphi_0)} q_1 \widetilde{L}\psi d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R q_1 \widetilde{L}\psi d\rho$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^R q_1^0 \widetilde{L}\psi d\rho, \quad q_1 = q_1^0 \vartheta(\rho - 1).$$

Исключим из области интегрирования точку $(1, \varphi_0)$, заменив интеграл пределом

$$(\widetilde{L}\psi, q_1) = \lim_{\rho \to 1+0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\rho^R q_1^0 \widetilde{L}\psi d\rho.$$

Теперь возможно интегрирование по частям с возвращением операции дифференцирования на функцию q_1^0

$$(\widetilde{L}\psi, q_1) = \lim_{\rho\to 1+0}\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_\rho^R \varphi L q_1^0 d\rho + \int_\rho^R \left[q_1^0 \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \psi\frac{\partial q_1^0}{\partial\varphi}\right]\Big|_0^{2\pi} d\rho \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi}\left[q_1^0(\rho^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \psi(\rho^2-1)\frac{\partial q_1^0}{\partial\rho} + \rho\psi q_1^0\right]\Big|^R \rho d\varphi\right].$$

Вне особой точки $(1,\varphi_0)$ $Lq_1 = 0$, а в силу финитности ψ

$$q_1^0\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \psi\frac{\partial q_1^0}{\partial\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{и}$$

$$\left[q_1^0(\rho^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \psi(\rho^2-1)\frac{\partial q_1^0}{\partial\rho} + \rho\psi q_1^0\right]\Big|^R = 0.$$

Таким образом,

$$(\psi, Lq_1) = \lim_{\rho\to 1+0}\int_0^{2\pi}\left[q_1^0(\rho^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \psi(\rho^2-1)\frac{\partial q_1^0}{\partial\rho} + \rho\psi q_1^0\right] d\varphi. \qquad (9)$$

Подынтегральное выражение содержит три слагаемых. Рассмотрим соответствующие пределы последовательно. Напомним, что вторая плохая точка $\varphi = 2\pi - \varphi_0$, $\rho = 1$ функции q_1^0 лежит вне носителя функции $\psi(\rho,\varphi)$ и не вносит особенности в подынтегральное выражение.

В силу оценки $0 < \frac{\rho-1}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)} < 1$ интеграл $\int_0^{2\pi}(\rho^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}q_1^0 d\varphi$ не имеет особенности при $\varphi=\varphi_0$, $\rho = 1$ и за счет множителя $\sqrt{\rho-1}$ обращается при $\rho\to 1+0$ в пределе в нуль.

При вычислении $\lim\limits_{\rho\to 1+0}\int_0^{2\pi}\psi q_1^0 d\varphi$ нам будет полезен интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\rho^2-1}},$$

вычисляемый заменой $z = e^{i(\varphi-\varphi_0)}$ и последующим использованием теоремы о вычетах. Представим искомый предел в виде разности

$$\lim_{\rho\to 1+0}\int\limits_0^{2\pi}\psi q_1^0 d\varphi = \lim_{\rho\to 1+0}\sqrt{\rho-1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\chi(1,\varphi_0)}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi$$

$$+\lim_{\rho\to 1+0}\sqrt{\rho-1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\chi(\rho,\varphi)-\chi(1,\varphi_0)}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi.$$

Здесь

$$\chi(\rho,\varphi) =$$

$$\psi(\rho,\varphi)\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\left[\rho+1+\cos\varphi_0+\cos\varphi+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\rho+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]}{\rho-\cos(\varphi+\varphi_0)}.$$

Первый передел вычисляется непосредственным интегрированием

$$\lim_{\rho\to 1+0}\sqrt{\rho-1}\chi(1,\varphi_0)\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)} = \chi(1,\varphi_0)\frac{2\pi}{\sqrt{\rho+1}}$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\psi(1,\varphi_0).$$

Второй предел равен нулю. Чтобы убедиться в этом, разобьем контур интегрирования на две части: $[\varphi_0-\delta_1,\varphi_0+\delta_1]$ и $[0,2\pi]\setminus[\varphi_0-\delta_1,\varphi_0+\delta_1]$. За счет выбора δ_1 интеграл $\sqrt{\rho-1}\int\limits_{\varphi_0-\delta_1}^{\varphi_0+\delta_1}\frac{\chi(\rho,\varphi)-\chi(1,\varphi_0)}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi$ может быть сделан как угодно малым в силу непрерывности функции $\chi(\rho,\varphi)$. Малость второго интеграла

$$\sqrt{\rho-1}\left(\int\limits_0^{\varphi_0-\delta_1}+\int\limits_{\varphi_0+\delta_1}^{2\pi}\right)\frac{\chi(\rho,\varphi)-\chi(1,\varphi_0)}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi$$

вытекает из ограниченности подынтегральной функции (при заранее выбранном δ_1) и наличия фактора $\sqrt{\rho-1}$, стремящегося к нулю.

Оценка второго слагаемого под знаком предела в выражении (9)

$$\lim_{\rho\to 1+0}\int(\rho^2-1)\psi\frac{\partial q_1^0}{\partial\rho}d\varphi$$

содержит элементы рассмотрения как первого, так и третьего слагаемых. Дифференцирование функции осуществим так

$$\frac{\partial q_1^0}{\partial\rho}=s(\rho,\varphi)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\sqrt{\rho-1}}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0}+\frac{\sqrt{\rho-1}}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}\frac{\partial s(\rho,\varphi)}{\partial\rho},$$

где

$$s(\rho,\varphi)=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}[\rho+1+\cos\varphi_0+\cos\varphi+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\rho+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}]}{\rho-\cos(\varphi+\varphi_0)}.$$

В силу оценки $\frac{\rho^2-1}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}<1$ и наличия фактора $\sqrt{\rho-1}$ имеем

$$\lim_{\rho\to 1+0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\rho^2-1)\sqrt{\rho-1}\psi(\rho,\varphi)\frac{\partial s}{\partial\rho}}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi=0.$$

Второй предел, с учетом того, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sqrt{\rho-1}}{\rho-\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)d\varphi=\frac{\pi}{(\rho+1)^{3/2}}$$

может быть рассмотрен подобно тому, как рассматривался предел $\lim\limits_{\rho\to 1+0}\int\limits_0^{2\pi}2\rho\psi q_1^0$. С учетом фактора ρ^2-1 второй предел также равен нулю.

Вторым корнем знаменателя функции q_1 является точка $(1,2\pi-\varphi_0)$. Мы можем провести для нее те же рассмотрения, что и для $(1,\varphi_0)$, но так как при $\rho=1$, $\varphi=2\pi-\varphi_0$ обращается в нуль также и числитель функции q_1, вклада в правую часть уравнения $Lq_1=f$ для этой точки не будет.

Таким образом

$$(\psi,Lq_1)=-\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\pi\sqrt{2}}\delta(\rho-1)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

и решением уравнения

$$Lq_1=-\delta(\rho-1)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0)$$

является функция

$$q_1 = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{\vartheta(\rho-1)\sqrt{\rho-1}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\left[\rho+1+1\cos\varphi_0+\cos\varphi+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\rho+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{(\rho-\cos(\varphi+\varphi_0))(\rho-\cos(\varphi-\varphi_0))}.$$

Аналогично доказывается, что функция q_2 при надлежащем выборе A_2

$$A_2 = \frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\pi\sqrt{2}}$$

является решением уравнения

$$Lq_2 = -\delta(\rho-1)\cdot\delta(\varphi+\varphi_0).$$

8. Заключение

Итоговое выражение с учетом найденных коэффициентов A_1 и A_2 для дифракционного поля $q = q_1 + q_2$ имеет вид

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\vartheta(\rho-1)\sqrt{\rho-1}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}[\rho+1+\cos\varphi_0+\cos\varphi]}{(\rho-\cos(\varphi+\varphi_0))(\rho-\cos(\varphi-\varphi_0))}.$$

В переменных r, φ выражение для q запишется следующим образом

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\vartheta(1-r)\sqrt{r-r^2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}[r+1+r\cos\varphi_0+r\cos\varphi]}{(1-r\cos(\varphi+\varphi_0))(1-r\cos(\varphi-\varphi_0))}.$$

Поведение дифракционного поля в развертке (r, φ рассматриваются как декартовы координаты, значения φ указаны в радианах) представлено на рис. 4–6. Графики нарисованы для различных углов падения φ_0, равных $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$, соответственно.

Очевидно, что поле в круге дифракции не положительно, на границе круга и на разрезе равно нулю, а при подходе к сингулярной точке в радиальном направлении поле стремится к бесконечности. Картинка для произвольного угла падения φ_0 будет подобна трем представленным выше, изменится лишь положение областей сингулярности в зависимости от значения φ_0.

Заметим в заключение, что в целях автомодельности решения мы потребовали специального расположения узловой точки фронта падающей волны. В момент начала дифракции она оказывалась в начале системы координат, т.е. на острие экрана. В

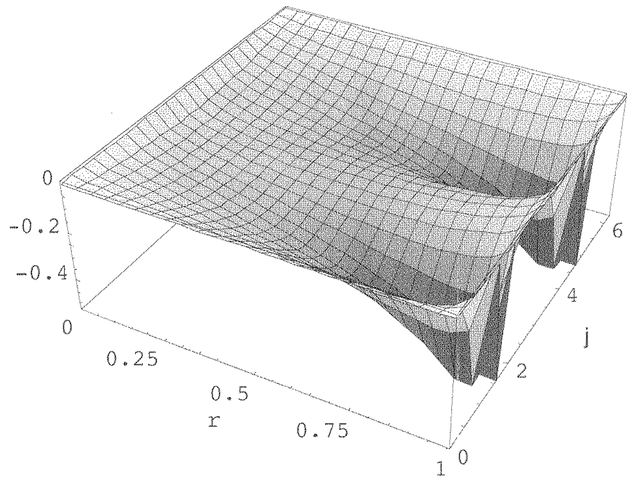


Рис. 4. Поведение дифракционного поля для угла падения, равного $\frac{\pi}{2}$.

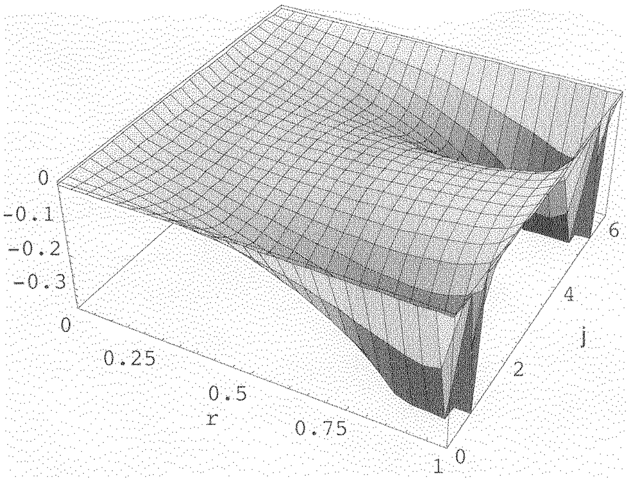


Рис. 5. Поведение дифракционного поля для угла падения, равного $\frac{\pi}{4}$.

общем случае, когда узловая точка расположена произвольным образом, решение получается как линейная комбинация данного решения и дифференцированного по времени решения, традици-

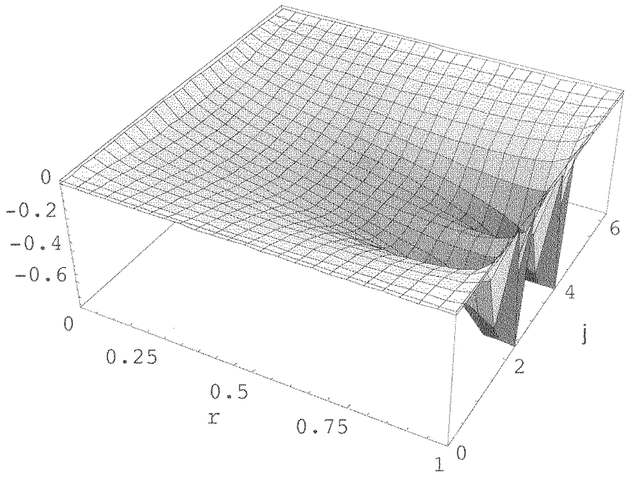


Рис. 6. Поведение дифракционного поля для угла падения, равного $\frac{3\pi}{4}$.

онно получаемого методом Смирнова–Соболева, когда источником поля является функция Хэвисайда.

Авторы признательны академику РАН Н. Ф. Морозову, привлекшему их к данной тематике и указавшего ее важность для теории разрушений.

Литература

1. A. P. Kiselev, *Rayleigh wave with a transverse structure Proceedings of the Royal Society.* A (2004) 460, 3059–3064.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики,* т. 3, ч. 2.
3. М. М. Фридман, *Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко заделанной щели.* — Ученые записки ЛГУ Но. 114, Серия математических наук. Вып. 17, ЛГУ, Ленинград (1949), 72–94.
4. А. Ф. Филиппов, *Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн.* — ПММ, **20**, No. 6 (1956).
5. Ю. В. Петров, А. А. Уткин, *Асимптотика напряжений у вершины трещины в динамических задачах теории упругости.* — ИПМАШ РАН, СПбГУ, Учебное пособие (2001).
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции.* ГИФМЛ, М. (1959). Вып. 1.

Kouzov D. P., Solov'eva Yu. A. Diffraction on half infinite screen of

plane non-stationary wave, which amplitude linearly increases along the front.

Exact analytical solution of two variables non-stationary problem of diffraction on ideal half infinite screen is obtained by Smirnoff–Sobolev method. Source of the field is incident plane acoustic wave with δ-function profile. Wave amplitude is a linear function of variable, changing along the front. Bibliography: 6 titles.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет

Поступило 13 февраля 2007 г.