Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Н. Я. Кирпичникова П. В. Крауклис, А. П. Крауклис

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ P-ВОЛН ОТ ЛИНИИ РАЗРЫВА УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ

В работе рассмотрены задачи дифракции поверхностных P-волн от линии разрыва упругих параметров. Поверхностные P-волны распространяются вблизи свободной от напряжений границы со скоростью, близкой к скорости продольных волн. Смещение частиц внутри областей для P-волн происходит параллельно плоскости рассмотрения в касательном направлении к лучу продольной волны. Характер этих волновых процессов существенным образом зависит от поведения продольной скорости в окрестности границы полупространства. Кроме того, ряд интересных особенностей возникает при расположении излучателя волн на поверхности. В этом случае возникает так называемый поверхностный волновод (в акустике и сплошных средах – звуковой канал). Если скорость распространения волн в среде растет с глубиной, то лучи, выходящие из излучателя под малым углом скольжения, распространяются путем многократных отражений от поверхности. Если поверхность гладкая, то эти лучи удерживаются в пределах поверхностного волновода (канала) и обуславливают волноводное распространение. В этом случае несправедлив традиционный лучевой (геометрооптический) подход к решению задачи. Поле в областях интерференции поверхностных волн наиболее полно описывается в рамках метода параболического уравнения (ПУ) [1, 2].

Найдены отраженные и преломленные от линии разрыва упругих параметров волны в полупространстве, зависящем от одной координаты. Метод нахождения интерференционных поверхностных волновых полей, предложенный здесь, полностью переноситься на случай трехмерной упругой среды, ограниченной произвольной, гладкой, свободной от напряжений поверхностью.

Так в работе [3] были подробно исследованы P-волны типа волн соскальзывания и волн шепчущей галереи. Рассмотрена по-

ляризация, дисперсия и затухание P-волн.

В данной работе проведено сравнение волн Релея [4], P-волн и волн SV-поляризации [5, 6].

Для некоторых соотношений между скоростями в средах Ω_1 и Ω_2 найдены численные значения коэффициентов трансформации при переходе через линию разрыва упругих параметров.

1. Поле падающей волны от точечного источника

Рассмотрим двумерное полупространство $-\infty < x < \infty$, $z \geqslant 0$, состоящее из двух упругих сред Ω_i с различными скоростями $b_i = b_i(z)$, $a_i = a_i(z)$, $i = 1, 2$, распространения поперечных и продольных волн. Среды Ω_1 $(x \leqslant 0)$ и Ω_2 $(x \geqslant 0)$ разделены вертикальной линией $x = 0$, $z \geqslant 0$, на которой заданы условия жесткого контакта и происходит скачок скоростей. Пусть со стороны полупространства $x < 0$ (со стороны среды Ω_1) набегает P-волна, излучаемая точечным источником M_0 с координатами $(-x_0, z_0)$, $x_0 > 0$, $z_0 = 0$. Точечный источник находится в среде Ω_1 на границе полупространства $z = 0$. Ось z направлена вертикально вниз.

Исследуется волновой процесс, образованный точечным источником $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Падающее на вертикальную линию раздела поле имеет поляризацию P-волн. Вектор смещений $\mathbf{u}(x, z) = (u, 0, w)$ этих волн асимптотически в главном имеет не равную нулю горизонтальную продольную компоненту $u_a \neq 0$ при $z > 0$.

По заданному падающему полю P-волны $\mathbf{u}(x, z) = (u, 0, w)$ отыскиваются отраженное (в среде Ω_1) и преломленное (в среде Ω_2) волновые поля, той же поляризации. Среды Ω_i, $i = 1, 2$, предполагаются либо однородными, т.е. с постоянными, но различными скоростями распространения волн в них, либо градиентными с положительными (с отрицательными) изменениями градиентов скоростей. Граница $z = 0$ считается свободной от напряжений.

Рассматриваются поверхностные волны $(z \geqslant 0)$, т.е. волны, существенно отличные от нуля в слое вблизи границы $z = 0$ и быстро убывающие при удалении от этого слоя. В неоднородной среде с положительным (соответственно, с отрицательным) изменением градиента скорости в слое $z \sim O(k^{-2/3})$ распространяются известные волны шепчущей галереи (соответственно, волны соскальзывания). В однородной среде существуют волны, осциллирующие вблизи поверхности $z = 0$ в слое $z \sim O(k^{-1})$.

Вертикальная линия $\{x = 0,\ z \geqslant 0\}$ отделяет область Ω_1 от

области Ω_2. Область Ω_1 является упругой полуплоскостью $x<0$, $z\geqslant 0$ с параметрами Ламе λ_1,μ_1 и плотностью среды ρ_1, достаточно плавно зависящими от координаты z. Будем считать, что вблизи границы области Ω_1 скорость продольных волн $a_1(z)=\sqrt{(\lambda+2\mu_1)/\rho_1}$ возрастает (убывает, постоянна): $\frac{\partial a_1}{\partial z}>0$, ($\frac{\partial a_1}{\partial z}<0$, $\frac{\partial a_1}{\partial z}=0$,) при $z>0$. Скорость поперечных волн $b_1(z)=\sqrt{\mu_1/\rho_1}$ может меняться произвольно.

Упругая полуплоскость $x>0$, $z\geqslant 0$ с параметрами Ламе λ_2,μ_2 и плотностью среды ρ_2 составляет область Ω_2.

Падающее на линию раздела областей Ω_1 и Ω_2 волновое поле $\mathbf{u}^{\rm inc}=(u^{\rm inc},0,w^{\rm inc})$ есть решение следующей задачи при $z>0$, $x<0$

$$(\lambda+2\mu)u_{xx}+\mu u_{zz}+(\lambda+\mu)w_{xz}+\rho\omega^2 u+\mu_z(w_x+u_z)=0, \quad (1.1)$$

$$(\lambda+\mu)u_{xz}+\mu w_{xx}+(\lambda+2\mu)w_{zz}+\rho\omega^2 w+\lambda_z(u_x+w_z)+2\mu_z w_z=0, \quad (1.2)$$

с граничными условиями для полупространства:

$$\mu(u_z+w_x)|_{z=0}=0, \quad (1.3)$$

$$(\lambda+2\mu)w_z+\lambda u_x|_{z=0}=-\delta(x+x_0). \quad (1.4)$$

На границе раздела упругих сред $x=0, z\geqslant 0$ выполняютя условия жесткого контакта

$$\begin{gathered}[\mathbf{u}]|_{x=0}=0, \quad [\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)u_x+\lambda w_z]|_{x=0}=0,\\ [\sigma_{xz}=\mu(u_z+w_x)]|_{x=0}=0.\end{gathered} \quad (1.5)$$

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.5) следует добавить условие излучения $\mathbf{u}$ при $r=\sqrt{(x+x_0)^2+z^2}\to\infty$:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r}-i\frac{\omega}{a(0)}\mathbf{u}\right)=0. \quad (1.6)$$

Решение $\mathbf{u}$ задачи (1.1)–(1.4), (1.6) будем искать в виде

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\ w\end{pmatrix}=e^{ikx}\begin{pmatrix}U+U_b\,e^{ikz\sqrt{1-\gamma^2}/\gamma}\\ W+W_b\,e^{ikz\sqrt{1-\gamma^2}/\gamma}\end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где $k=\omega/a(0), \gamma=b(0)/a(0)$.

Найдем лишь главные компоненты в асимптотическом разложении вектора смещений (1.7)

$$U = \sum_{l=0} \frac{U^l}{k^{l/3}}, \quad W = \sum_{l=0} \frac{W^l}{k^{l/3}}. \tag{1.8}$$

Для упругих P-волн рассмотрим простейшие варианты изменения продольных скоростей $a_i(z)$ при возрастании $z > 0$ с глубиной в областях Ω_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}_1: \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0; \qquad &&\mathbf{U}_2: \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = 0; \\ &\mathbf{W}_1: \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} > 0; \qquad &&\mathbf{W}_2: \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} > 0; \\ &\mathbf{C}_1: \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} < 0; \qquad &&\mathbf{C}_2: \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} < 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь введены следующие обозначения упругих сред, соответствующие первым буквам английских слов: $\mathbf{U}$ – однородный (Uniform), $\mathbf{W}$ – волны шепчущей галереи (Whispering gallery waves), $\mathbf{C}$ – волны соскальзывания (Creeping waves).

В пункте 3 рассмотрим случай однородной волны $\mathbf{U}_2$, набегающей из среды Ω_1 на линию разрыва упругих параметров со средой Ω_2. В среде Ω_2 распространяются трансформированные волны шепчущей галереи. Обозначим это так: $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{W}_2$. Кроме этого случая рассмотрим еще четыре варианта: $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_2$, $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_2$, $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ и $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{U}_2$. Всего можно рассмотреть девять вариантов.

Поле в областях интерференции поверхностных волн описывается в рамках метода параболического уравнения (ПУ) Леонтовича–Фока [1] или метода пограничного слоя при нахождении следующих приближений [2].

Введем, следуя методу параболического уравнения (ПУ), растянутые координаты:

$$\nu_j = \psi_j k_j^{2/3} 2^{1/3} z > 0, \quad \sigma_j = \psi_j^2 k_j^{1/3} 2^{-1/3} x, \quad k_j = \frac{\omega}{a_j(0)},$$

$$j = 1, 2, \quad \sigma_0 = \psi_1^2 k_1^{1/3} 2^{-1/3} x_0. \tag{1.10}$$

При решении данной задачи в однородной среде $\psi_{\mathrm{U}} = 1$, для других сред величина ψ определена следующим выражением

$$\psi_{\mathbf{W}}^3 = \frac{a_z'(0)}{a(0)} > 0, \quad \psi_{\mathrm{C}}^3 = \frac{-a_z'(0)}{a(0)} > 0.$$

Для P-волн из уравнений (1.1)–(1.4), (1.6) имеем серию соотношений, связывающих компоненты (1.7)–(1.8) вектора смещений друг с другом:

$$U^0 \neq 0; \quad W^0 = 0; \quad U_b^0 = W_b^0 = 0; \quad W = -ik^{-1}\frac{\partial U}{\partial z} = -i \quad \frac{\psi\, 2^{1/3}}{k^{1/3}}\frac{\partial U}{\partial \nu};$$

$$U_b^1 = -\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}W_b^1; \quad \frac{\partial U_b^j}{\partial \nu} = \frac{\partial W_b^j}{\partial \nu} = 0; \quad j = 0, 1. \tag{1.11}$$

Из граничных условий (1.3)–(1.4) для этих же компонент получим

$$U^0|_{z=0} = i\frac{\delta(x+x_0)}{\lambda\, k}; \quad U^1|_{z=0} = \frac{2\mu}{\lambda}U_b^1\Big|_{z=0};$$

$$W_b^1|_{z=0} = -\frac{2i\mu}{k\lambda}\frac{\partial U^0}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{1.12}$$

Итак, искомые составляющие U, W, U_b, W_b (см. формулу (1.7)) определяются с помощью компоненты U^0 и ее производной по z. Функция $U^0(\sigma, \nu)$ удовлетворяет следующей задаче

$$\left.\begin{array}{l} \left(i\dfrac{\partial U^0}{\partial \sigma} + \dfrac{\partial^2 U^0}{\partial \nu^2} + \varkappa\nu U^0\right) + O(k^{-2/3}) = 0, \quad \sigma < 0, \nu > 0; \\ U^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma+\sigma_0)\dfrac{\psi^2}{\lambda\, k^{2/3}\, 2^{1/3}}; \quad U^0 \underset{\substack{\nu\to\infty \\ \sigma\to\infty}}{\to} 0\,; \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0, & \text{в среде } U_2 \\ -1, & \text{в среде } W_2 \\ 1, & \text{в среде } C_2. \end{cases}$$

Здесь коэффициент $\varkappa$ принимает три значения в соответствии с вариантами изменения продольной скорости в среде. Так для сред U_j коэффициент $\varkappa = 0$, в средах W_j значение $\varkappa = -1$. Наконец, в средах C_j, соответствующих скоростям с отрицательным градиентом, коэффициент $\varkappa = 1$, $j = 1, 2$.

Зная выражение для продольной составляющей вектора смещений $U^0 \neq 0$ для $z > 0$, в разложении (1.8) получим остальные компоненты вектора $\mathbf{u}$ по формулам (1.11)–(1.12):

$$U^0 \neq 0; \quad W^0 = 0; \quad U_b^0 = W_b^0 = 0;$$

$$\frac{W^1}{k^{1/3}} = -ik^{-1}\frac{\partial U^0}{\partial z} = -i\,\frac{\psi\,2^{1/3}}{k^{1/3}}\frac{\partial U^0}{\partial \nu};$$

$$\left.\frac{W_b^1}{k^{1/3}}\right|_{z=0} = \frac{2\mu}{\lambda}\left.\frac{W^1}{k^{1/3}}\right|_{z=0} = -\frac{2i\mu}{k\lambda}\left.\frac{\partial U^0}{\partial z}\right|_{z=0};$$

$$\left.\frac{U^1}{k^{1/3}}\right|_{z=0} = \frac{4i\mu^2\sqrt{1-\gamma^2}}{k\lambda^2\gamma}\left.\frac{\partial U^0}{\partial z}\right|_{z=0};$$

$$\left.\frac{U_b^1}{k^{1/3}}\right|_{z=0} = \frac{2i\mu\sqrt{1-\gamma^2}}{k\lambda\gamma}\left.\frac{\partial U^0}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{1.14}$$

Окончательно выпишем вектор смещений падающей P-волны

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = \begin{pmatrix} u^{\mathrm{inc}} \\ w^{\mathrm{inc}} \end{pmatrix} = e^{ik_1x}\begin{pmatrix} U^{\mathrm{inc}} + U_b^{\mathrm{inc}}e^{ik_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}/\gamma_1} \\ W^{\mathrm{inc}} + W_b^{\mathrm{inc}}e^{ik_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}/\gamma_1} \end{pmatrix} = \tag{1.15}$$

$$= e^{ik_1x}\begin{pmatrix} U^0 + \frac{i2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{k_1\lambda_1\gamma_1}\frac{\partial U^0}{\partial z}\left[\frac{2\mu_1}{\lambda_1} + e^{ik_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}/\gamma_1} + O(k_1^{-1/3})\right] \\ -\frac{i}{k_1}\frac{\partial U^0}{\partial z}\left[1 + \frac{2\mu_1}{\lambda_1}e^{ik_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}/\gamma_1} + O(k_1^{-1/3})\right] \end{pmatrix}.$$

Для трех вариантов изменения поперечных скоростей (1.9) найдем падающее поле, т.е. вектор смещений $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = (u^{\mathrm{inc}}, 0, w^{\mathrm{inc}})$, для которого горизонтальная составляющая $e^{ik_1x}U^0$ при $z > 0$ является определяющей.

На поверхности $z = 0$ функция U^0 равна нулю. Составляющие U^1, W^1, W_b^1, U_b^1 не обращаются в нуль при $z = 0$. Продольная и поперечная компоненты вектора смещений определяются через производную по z от функции U^0.

Итак, пусть на вертикальную границу из упругой среды Ω_1 набегает поверхностная P-волна $\mathbf{u}_{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{inc}}$, возбуждаемая точечным источником на границе $z = 0$.

$\mathbf{U}_1$: Из однородной упругой среды Ω_1 набегает поверхностная волна, образованная точечным источником в точке $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$, вида

$$u_{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{inc}}(x, z, k_1) \sim \frac{z\,e^{-i\,\pi/4}e^{i\,k_1\,(x+x_0)}e^{i\,k_1\,\dfrac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\lambda_1\,(x+x_0)\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}$$

$$= e^{i\,k_1\,x}U_{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{inc}} = e^{i\,k_1\,x}U_{\mathbf{U}_1}^{0,\mathrm{inc}}. \tag{1.16}$$

В координатах σ_1 и ν_1 функция $U_{\mathbf{U}_1}^{0,\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом

$$U_{\mathbf{U}_1}^{0,\mathrm{inc}} = U_{\mathbf{U}_1}^{0,\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{\nu_1\, e^{-i\,\pi/4} e^{ik_1x_0} e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{2\lambda_1\sqrt{\pi(\sigma_1+\sigma_0)^3}\,2^{1/3}\,k_1^{2/3}} =$$

$$= \mathcal{A}_{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{inc}} \frac{\nu_1 e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}, \quad \mathcal{A}_{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{inc}} = \frac{e^{-i\,\pi/4} e^{ik_1x_0}}{2^{4/3}k_1^{2/3}\,\lambda_1\,\sqrt{\pi}}. \tag{1.17}$$

Отметим, что имеет место предельная формула

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{e^{-i\,\pi/4} e^{\,i\,\dfrac{\nu^2}{4\,\sigma}}}{2\,\sqrt{\pi\,\sigma}} = \delta(\nu).$$

Из этой формулы видно, что падающая волна (1.17) имеет при $-\sigma_1 \to \sigma_0$ и $\nu_1 = 0$ соответствующую особенность.

$\mathbf{W}_1$: В этом случае из среды Ω_1 на вертикальную линию раздела $x = 0$ набегает волна шепчущей галереи номера p, $p = 1, 2, 3\ldots$,

$$u_{\mathbf{W}_{1,p}}^{\mathrm{inc}}(x,z,k_1) = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p} \frac{v(-\zeta_p+\nu_1)}{v'(-\zeta_p)}$$

$$= e^{ik_1x} U_{\mathbf{W}_{1,p}}^{0,\mathrm{inc}} = e^{ik_1x} U_{\mathbf{W}_{1,p}}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1x} \mathcal{A}_{\mathbf{W}_{1,p}}^{\mathrm{inc}} e^{-i\sigma_1\zeta_p} v(-\zeta_p+\nu_1), \tag{1.18}$$

причем $v(-\zeta_p) = 0$, а коэффициент $\mathcal{A}_{\mathbf{W}_{1,p}}^{\mathrm{inc}}$ равен

$$\mathcal{A}_{\mathbf{W}_{1,p}}^{\mathrm{inc}} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0} e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}. \tag{1.19}$$

$\mathbf{C}_1$: Если рассматривать случай максимума скорости на границе $z = 0$, то на вертикальную линию раздела $x = 0$ из среды Ω_1 набегает волна соскальзывания номера q, удовлетворяющая условию Дирихле на границе $z = 0$. Горизонтальная компонента вектора продольных смещений U^0 определена выражением

$$u_{\mathbf{C}_{1,q}}^{\mathrm{inc}}(x,z,k_1) = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}} e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q} \frac{w_1(\xi_q-\nu_1)}{w_1'(\xi_q)}$$

$$= e^{ik_1x}U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathrm{C}_{1,q}} = e^{ik_1x}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathrm{C}_{1,q}}e^{i\sigma_1\xi_q}w_1(\xi_q-\nu_1), \tag{1.20}$$

причем $w_1(\xi_q)=0$, а коэффициент $\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathrm{C}_{1,q}}$ равен

$$\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathrm{C}_{1,q}} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_q}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}w_1'(\xi_q)}, \quad \arg(\xi_q-\nu_1)=\pi/3. \tag{1.21}$$

Заметим, что в главном приближении достаточно рассмотреть лишь первый корень функции $w_1(\xi_1)$, так как все корни ξ_q имеют положительный аргумент $\arg\xi_q=\pi/3$, а модули этих корней растут с ростом номера q. Решение (1.20) при $q=1$ экспоненциально убывает медленнее, чем для $q>1$.

Остальные компоненты u^{inc} и w^{inc} вектора смещений (1.7), содержащие каждая продольную и поперечную составляющие, найдем по формулам (1.14)-(1.15).

2. Нахождение отраженного и преломленного полей

В предыдущем пункте в области Ω_1 найдено волновое поле, излучаемое точечным источником в точке $(-x_0,0)$, $x_0>0$, и набегающее на вертикальную границу раздела $x=0$, $z\geqslant 0$.

Функция $U=U^0$ при $x<0$ является асимптотическим решением уравнения Леонтовича–Фока в области Ω_1

$$L_1U \equiv i\frac{\partial U}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial^2U}{\partial\nu_1^2}+\varkappa\nu_1U=0, \tag{2.1}$$

но перестает быть решением уравнения (2.1) при $x>0$, так как скорость изменяется скачком при $x=0$.

Предположим, что решение W, удовлетворяющее уравнению Леонтовича–Фока (2.1) при $x<0$, будет удовлетворять аналогичному уравнению и при $x>0$

$$L_2U \equiv i\frac{\partial U}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial^2U}{\partial\nu_2^2}+\varkappa\nu_2U=0. \tag{2.2}$$

Это предположение позволит найти решение, асимптотически (при $k_j\to\infty$, $j=1,2$) удовлетворяющее всем условиям задачи.

Представим решение, удовлетворяющее задаче (1.1)–(1.8), в следующем виде:

$$\mathbf{u}_1 = e^{ik_1x}\mathbf{u}_1^{\mathrm{inc}}+\mathcal{R}e^{-ik_1x}\mathbf{u}_1^{\mathrm{ref}}, \quad x<0,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathcal{T} e^{ik_2 x} \mathbf{u}_2^{\mathrm{tr}}, \quad x > 0. \tag{2.3}$$

Определим неизвестные матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ из условий сопряжения на вертикальной линии $x = 0$:

$$[\mathbf{u}]|_{x=0} = 0, \quad [\sigma_{xx} \equiv (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda w_z]|_{x=0} = 0,$$
$$[\sigma_{xz} \equiv \mu(u_z + w_x)]|_{x=0} = 0. \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) обеспечивают выполнение начальных условий на вертикальной линии $x = 0$ для компонент искомых векторов отраженного и преломленного от этой линии полей.

Найдем выражения для матриц $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ и начальные данные для искомых компонент. Проведя достаточно громоздкие выкладки, получим следующие результаты

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21} = \mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{21} = 0;$$
$$\mathcal{R}_{11} = \frac{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 - [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2};$$
$$\mathcal{T}_{11} = \frac{2[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2};$$
$$\mathcal{R}_{22} = \frac{\mu_1(z)\, k_1 - \mu_2(z)\, k_2}{\mu_1(z)\, k_1 + \mu_2(z)\, k_2} + \frac{[k_1\mu_1(z) - k_2\mu_2(z)]\mathcal{T}_{11}}{[\mu_1(z)]k_1 + [\mu_2(z)]k_2} = \mathcal{R}_{11};$$
$$\mathcal{T}_{22} = \frac{2\mu_1(z)\, k_1}{\mu_1(z)\, k_1 + \mu_2(z)\, k_2} + \frac{[k_1\mu_1(z) - k_2\mu_2(z)]\mathcal{T}_{11}}{\mu_1(z)k_1 + \mu_2(z)k_2} = \mathcal{T}_{11}. \tag{2.5}$$

Матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются единичными, умноженными на компоненты отражения $\mathcal{R}_{11}$ и преломления $\mathcal{T}_{11}$ соответственно. Компоненты отражения $\mathcal{R}_{11}$ и преломления $\mathcal{T}_{11}$ совпадают со скалярным случаем нормального падения волны на линию раздела $x = 0$. Это не удивительно, так как определяющей компонентой для P-волны является горизонтальная составляющая вектора продольных смещений $u_{1,a}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1 x} U_1^{\mathrm{inc}}$. Составляющие вектора продольных смещений преобразуются на линии раздела по формуле

$$\mathbf{u}_1|_{x=0} = \mathbf{u}_2|_{x=0}; \quad \begin{pmatrix} U_1^{\mathrm{inc}} \\ W_1^{\mathrm{inc}} \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{11} \begin{pmatrix} U_1^{\mathrm{ref}} \\ W_1^{\mathrm{ref}} \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{11} \begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{tr}} \\ W_2^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Начальные данные для компонент вектора продольных смещений на вертикальной линии $x = 0$ следует выбрать такими

$$U_1^{\mathrm{ref}}|_{x=0} = U_2^{\mathrm{tr}}|_{x=0} = U_1^{\mathrm{inc}}|_{x=0}. \tag{2.7}$$

Функции U_1^{ref}, U_2^{tr}, как и функция U_1^{inc} являются решениями параболического уравнения Леонтовича-Фока (2.1) либо (2.2). С их помощью векторная задача для P-волны (1.15) переходит в скалярную. По функции U_1^{inc}, построенной в пункте 1, найдем U_1^{ref}, U_2^{tr}.

Преломленное волновое поле U_2^{tr} в области $x > 0$, $z > 0$, является решением смешанной начально-краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L_2\, U_2^{\mathrm{tr}} &= 0, && \sigma_2 > 0, \quad \nu_2 > 0, \\ U_2^{\mathrm{tr}} &= 0, && \sigma_2 > 0, \quad \nu_2 = 0, \\ U_2^{\mathrm{tr}} &= U_1^{\mathrm{inc}}, && \sigma_2 = 0, \quad \nu_2 > 0, \\ U_2^{\mathrm{tr}} &\to 0, && \sigma_2 \to \infty, \quad \nu_2 \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Отраженное поле U_1^{ref} в области Ω_1 является решением задачи:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{L}_1\, U_1^{\mathrm{ref}} &\equiv -i\frac{\partial U_1^{\mathrm{ref}}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial^2 U_1^{\mathrm{ref}}}{\partial \nu_1^2} + \varkappa \nu_1 U_1^{\mathrm{ref}} = 0, \\ \widehat{L}_1\, U_1^{\mathrm{ref}} &= 0, && \sigma_1 < 0, \quad \nu_1 > 0, \\ U_1^{\mathrm{ref}} &= 0, && \sigma_1 < 0, \quad \nu_1 = 0, \\ U_1^{\mathrm{ref}} &= U_1^{\mathrm{inc}}, && \sigma_1 = 0, \quad \nu_1 > 0, \\ U_1^{\mathrm{ref}} &\to 0, && \sigma_1 \to \infty, \quad \nu_1 \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Решение этих задач найдем с помощью соответствующих функций Грина $G_j(\sigma_j, \nu_j; \sigma_j', \nu_j')$:

$$U_1^{\mathrm{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = \\ = \int_0^\infty (-i) U_1^{\mathrm{inc}}(0, \nu_1') G_1(-\sigma_1, \nu_1; 0, \nu_1') n_1(\nu_1', a_1, b_1) d\nu_1', \tag{2.10}$$

$$U_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2) = \int_0^\infty i U_1^{\mathrm{inc}}(0, \nu_2') G_2(\sigma_2, \nu_2; 0, \nu_2') n_2(\nu_2', a_2, b_2) d\nu_2', \tag{2.11}$$

где $n_i(\nu_i', a_i, b_i)$ есть некоторые нейтрализаторы, подчиненные следующим свойствам:

$$n_i(\nu_i', a_i, b_i) \equiv 1 \quad \text{при} \quad \nu_i' < a_i;$$

$$n_i \equiv 0 \quad \text{при} \quad \nu_i' > b_i; \quad n_i \in C^\infty(0, \infty).$$

Выражение для функции Грина ищется стандартным образом:

$$G(\sigma, \nu; 0, \nu') = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^\infty e^{i\sigma\zeta} \frac{V_1(\nu_<) V_2(\nu_>)}{W(V_1, V_2)} d\zeta. \tag{2.12}$$

Функции $V_{1,2}$ удовлетворяют уравнению $\widetilde{L}_j\, V_{1,2} = 0$ и граничным условиям при $\nu = 0$ и $\nu \to \infty$ соответственно, $W(V_1, V_2)$ – вронскиан, причем

$$\widetilde{L}_j = \frac{\partial^2}{\partial \nu_j^2} + (\varkappa \nu_j - \zeta), \quad j = 1, 2.$$

В средах с постоянной скоростью распространения $\mathbf{U}_j$ функция Грина имеет следующий вид

$$G_{\mathbf{U}_j}(\sigma_j, \nu_j; 0, \nu_j') = \frac{e^{3i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\sigma_j}} \left[e^{\frac{i(\nu_j - \nu_j')^2}{4\sigma_j}} - e^{\frac{i(\nu_j + \nu_j')^2}{4\sigma_j}} \right]. \tag{2.13}$$

Для функции Грина, соответствующей задаче Дирихле и минимуму скорости продольных волн на поверхности, при $\psi_j > 0, \nu_j \geqslant 0$, в среде $\mathbf{W}_j$ получаем выражение

$$G_{\mathbf{W}_j}(\sigma_j, \nu_j; 0, \nu_j') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i\sigma_j\zeta} \left[\frac{w_2(\zeta + \nu_{j>})}{w_2(\zeta)} - \frac{v(\zeta + \nu_{j>})}{v(\zeta)} \right] \times$$

$$\times [v(\zeta + \nu_{j<}) w_2(\zeta) - w_2(\zeta + \nu_{j<}) v(\zeta)] d\zeta, \quad \nu_j \geqslant 0, \quad \nu_j' \geqslant 0. \tag{2.14}$$

В формуле (2.14) контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

В случае, когда на границе полупространства скорость в среде имеет максимальное значение и когда величина ψ_j равна

$$\psi_j^3 = -\frac{a_j{}_z'(0)}{a_j(0)} > 0, \quad \nu_j > 0,$$

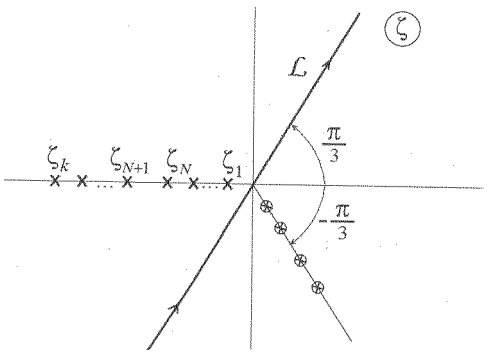

Рис. 1.

функция Грина граничного условия Дирихле имеет следующее интегральное представление

$$G_{C_j}(\sigma_j\,,\nu_j;0,\nu_j') = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\infty e^{i(\pi-\delta)}}^{\infty e^{i\varepsilon}} e^{i\sigma_j\xi}\left[\frac{w_1(\xi-\nu_{j>})}{w_1(\xi)}\right]\times$$

$$\times[w_1(\xi-\nu_{j<})w_2(\xi)-w_2(\xi-\nu_{j<})w_1(\xi)]d\xi,\quad \nu_j\geqslant 0,\quad \nu_j'\geqslant 0. \quad (2.15)$$

Контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}_0$ на рис. 2.

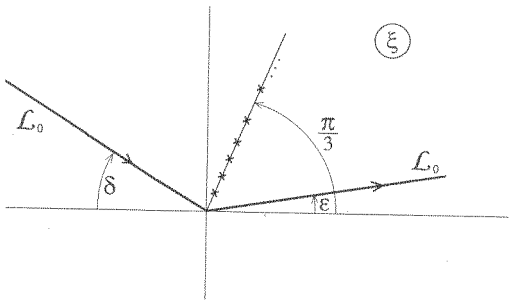

Рис. 2.

Итак, из области Ω_1 на вертикальную границу раздела $x=0$, $z\geqslant 0$ набегает падающее волновое поле $u_1^{\rm inc}=e^{ik_1x}U_1^{\rm inc}$, выражение для которого дано формулами (1.17), (1.18)–(1.19), (1.20)–(1.21) в зависимости от вариантов изменения скоростей (1.9).

Проведем сравнение поверхностных волн Релея, P-волн и SV-волн, образованных от точечного источника на границе $z = 0$.

Вектор смещений волн Релея представлен в виде суммы векторов продольной и поперечной волн:

$$\mathbf{u}_R = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = e^{ik_R x} \begin{pmatrix} U_a^0 e^{-k_R z\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} + U_b^0 e^{-k_R z\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}} \\ W_a^0 e^{-k_R z\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} + W_b^0 e^{-k_R z\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где $k_R = \omega/c$,

$$U(W) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{U^s(W^s)}{k^{s/3}}.$$

Скорость распространения волн Релея c самая медленная по сравнению с поперечной и продольной скоростями распространения в изотропной упругой среде $c < b < a$. Продольная и поперечная составляющие вектора $\mathbf{u}_R$ экспоненциально убывают при отходе от границы (при $z > 0$). На свободной от напряжения границе составляющие U_a^0, U_b^0, W_a^0 и W_b^0 не разделяются на продольные и поперечные волны, не равны нулю и распространяются по границе с фазовой скоростью, близкой к скорости релеевских волн.

Вектор смещений P-волн (см. работу [3] и настоящую статью) также есть сумма продольного и поперечного векторов смещений:

$$\mathbf{u}_P = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = e^{ik_P x} \begin{pmatrix} U_a^0 + \frac{1}{(k_P)^{1/3}}[U_a^1 + U_b^1 e^{ik_P z\sqrt{1-\gamma^2}/\gamma}] \\ \frac{1}{(k_P)^{1/3}}[W_a^1 + W_b^1 e^{ik_P z\sqrt{1-\gamma^2}/\gamma}] \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

где $k_P = \omega/a(0)$, $\gamma = b(0)/a(0)$. Фазовая скорость распространения этих волн близка к скорости продольных волн. Вблизи поверхности при $z > 0$ P-волны имеют главную (асимптотически) горизонтальную составляющую вектора продольных смещений $U_a^0 \neq 0$. Вектор поперечных смещений осциллирует при отходе от границы в слое порядка $k_P z = O(1)$. В области $z \geqslant 0$ составляющие $U_b^0 = W_b^0 = W_a^0 = 0$, а U_b^1, W_b^1, U_a^1 и W_a^1 есть некоторые функции от производной $\partial U_a^0/\partial z$. На поверхности составляющая U_a^0 обращается в нуль, а функции U_b^1, W_b^1, U_a^1 и W_a^1 есть величины одного порядка относительно асимптотического параметра (при $k_P \to \infty$) и не равны нулю. На поверхности эти составляющие не разделяются на продольные и поперечные. Смещение частиц

P-волн в упругой среде $z>0$ происходит параллельно плоскости (x,z) вдоль касательной к лучу продольной волны.

Вектор смещений SV-волн (см. [5, 6]) найден в виде суммы продольного и поперечного векторов смещений:

$$\mathbf{u}_{SV}=\begin{pmatrix}u\\ w\end{pmatrix}= \\ =e^{ik_{SV}x}\begin{pmatrix}\frac{1}{(k_{SV})^{1/3}}[[U_b^1+U_a^1\,e^{-k_{SV}z\sqrt{1-\gamma^2}}]\\ W_b^0+\frac{1}{(k_{SV})^{1/3}}[[W_b^1+W_a^1e^{-k_{SV}z\sqrt{1-\gamma^2}}]\end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где $k_{SV}=\omega/b(0)$, $\gamma=b(0)/a(0)$.

Здесь определяющей компонентой служит вертикальная составляющая вектора поперечных смещений W_b^0, причем $W_b^0\neq 0$ при $z>0$. Другие компоненты (U_b^1, U_a^1, W_a^1, W_b^1) есть величины следующего порядка малости (см. формулу (1.8)) и определяются через производную от W_b^0 по z. Смещение частиц внутри области ($z>0$) происходит параллельно плоскости (x,z) в направлении нормали к границе. SV-волны распространяютя вблизи границы с фазовой скоростью, близкой к поперечной скорости b. Продольная SV-волна сразу убывает при удалении от границы подобно волне Релея (сравните формулы (2.16) и (2.18)). Поперечная составляющая сосредоточена в некотором приповерхностном волноводе. Поведение SV-волны вблизи границы $z=0$ зависит от свойств скорости поперечной волны.

3. Частные случаи нахождения отраженного и преломленного полей

Найдем функции $U_1^{0,\mathrm{ref}}$, $U_2^{0,\mathrm{tr}}$ по формулам (2.10)–(2.11). Для этого используем функции Грина (2.13)–(2.15) и решения $U_1^{0,\mathrm{inc}}$ для рассматриваемых случаев изменения скоростей (1.9). Всего можно рассмотреть девять вариантов.

Зная функции $U_1^{0,\mathrm{ref}}$, $U_2^{0,\mathrm{tr}}$, определим вектора смещений отраженных и преломленных волн из формулы (1.15). На границе $z=0$ эти вектора примут следующий вид (в главном асимптотическом приближении):

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}\big|_{z=0}= \\ =\frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1x}}{k_1\lambda_1}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\frac{\partial U_1^{0,\mathrm{inc}}}{\partial z}\bigg|_{z=0}\big[1+O(k_1^{-1/3})\big], \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}|_{z=0} =$$
$$= \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{-ik_1x}}{k_1\lambda_1}\mathcal{R}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\frac{\partial U_1^{0,\mathrm{ref}}}{\partial z}\bigg|_{z=0}\big[1+O(k_1^{-1/3})\big], \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tr}}|_{z=0} =$$
$$= \frac{i(\lambda_2+2\mu_2)e^{ik_2x}}{k_2\lambda_2}\mathcal{T}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\lambda_2\gamma_2}\\ -1\end{pmatrix}\frac{\partial U_2^{0,\mathrm{tr}}}{\partial z}\bigg|_{z=0}\big[1+O(k_2^{-1/3})\big]. \quad (3.3)$$

В формулах (3.1)–(3.3) производная по z от функции U^0 равна

$$\frac{\partial U^0}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial U^0}{\partial \nu_j}\bigg|_{\nu_j=0} k_j^{2/3}\psi_j 2^{1/3}, \quad j=1,2.$$

Здесь будут рассмотрены пять вариантов: $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_2$, $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_2$, $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ и $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{W}_2$. Перейдем к решению этих задач.

3.1. Преобразование волны шепчущей галереи в приповерхностную волну: $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{U}_2$

Исследуем сначала задачу об отражении и преломлении волны шепчущей галереи, набегающей на границу раздела $x=0$ с однородной средой.

Пусть на вертикальную границу, разделяющую область с положительным изменением градиента скорости и область с постоянной скоростью, набегает p-я волна шепчущей галереи:

$$u^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(x,z,k_1) = e^{ik_1x}U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} = e^{ik_1x}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}e^{-i\sigma_1\zeta_p}v(-\zeta_p+\nu_1),$$

$$\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}v'(-\zeta_p)}.$$

Из формулы (2.11), в которой функция Грина определена выражением (2.13), а $U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}$ есть волна шепчущей галереи номера p, получаем функцию $U^{0,\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}$ вида

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(\sigma_2,\nu_2) = \frac{-e^{i\pi/4}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}}{2\sqrt{\pi\sigma_2}}\int\limits_0^\infty v\bigg(-\zeta_p+\nu_2'\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}}\bigg)\times$$

$$\times\left[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}}-e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\right]d\nu_2',\quad \mathcal{A}^{\rm inc}_{\mathbf{w}_{1,p}}=\frac{-\psi_1^2\,e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}v'(-\zeta_p)}. \quad (3.1.1)$$

Обратимся к вычислению отраженного поля $u^{0,\rm ref}_{\mathbf{w}_{1,p}}$. Оно отыскивается точно так же, как и преломленное поле.

Падающее на вертикальную границу $x=0$ поле шепчущей галереи $U^{0,\rm inc}_{\mathbf{w}_{1,p}}$, номера p определено формулами (1.18)–(1.19). Тогда отраженное поле представляется в виде

$$u^{0,\rm ref}_{\mathbf{w}_{1,p}}=\mathcal{R}_{11}e^{-ik_1x}U^{\rm ref}_{\mathbf{w}_{1,p}}, \quad (3.1.2)$$

где

$$U^{0,\rm ref}_{\mathbf{w}_{1,p}}(\sigma_1,\nu_1)= \int\limits_0^\infty(-i)\mathcal{A}^{\rm inc}_{\mathbf{w}_{1,p}}\,v(-\zeta_p+\nu_1')\,G_{\mathbf{w}_1}(-\sigma_1,\nu_1;\sigma_1'=0,\nu_1')\,d\nu_1'. \quad (3.1.3)$$

Функция Грина в области Ω_1 выражается формулой (2.14), в которой контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

Поменяем порядок интегрирования в формуле (3.1.3) и продеформируем контур $\mathcal{L}$, (см. рис. 1) в $\mathcal{L}_N$ так, что он будет охватывать отрицательную полуось $\mathrm{Re}\,\zeta<0$, начиная с $(N+1)$-го корня функции Эйри (см. рис. 3).

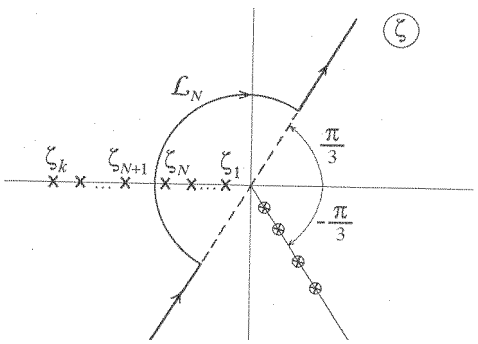

Рис. 3.

При таком преобразовании контура интегрирования $\mathcal{L}$ в контур $\mathcal{L}_N$, (см. рис. 3) из интеграла выделится конечная сумма собственных функций типа волн шепчущей галереи номеров

$n = 1, 2, \ldots, N$ так, что

$$U^{0,\mathrm{ref}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(\sigma_1,\nu_1) = \sum_{n=1}^{N} U^{0,\mathrm{ref}}_{p,n}(\sigma_1,\nu_1) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\nu_1' \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} v(-\zeta_p+\nu_1') e^{-i\sigma_1\zeta} \times$$

$$\times \int_{L_N} \frac{v(\zeta+\nu_{1>})}{v(\zeta)} [v(\zeta+\nu_{1<})w_2(\zeta) - w_2(\zeta+\nu_{1<})v(\zeta)]d\zeta. \qquad (3.1.4)$$

Здесь

$$U^{0,\mathrm{ref}}_{p,n}(\sigma_1,\nu_1) = R_{pn}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} v(-\zeta_n+\nu_1) e^{i\sigma_1\zeta_n} = R_{pn} U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(-\sigma_1,\nu_1).$$

Коэффициенты отражения R_{pn} равны

$$R_{pn} = \frac{-v'(-\zeta_n)w_2(-\zeta_n)}{[v'(-\zeta_n)]^2} \int_0^\infty v(-\zeta_p+\nu_1')v(-\zeta_n+\nu_1')d\nu_1' = 1, \quad (3.1.5)$$

так как

$$\int_0^\infty v(-\zeta_p+\nu_1')v(-\zeta_n+\nu_1')d\nu_1' = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq n, \\ [v'(-\zeta_n)]^2 & \text{при} \quad p = n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u^{\mathrm{ref}}_{\mathbf{w}_{1,p}} = \mathcal{R}_{11} e^{-ik_1 x} \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} e^{i\sigma_1\zeta_p} v(-\zeta_p+\nu_1) =$$
$$= \mathcal{R}_{11} e^{-ik_1 x} R_{pn} U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(-\sigma_1,\nu_1). \qquad (3.1.6)$$

Продольная компонента $u_{j,a}$ вектора смещений $\mathbf{u}_j$ в области Ω_j является определяющей и имеет следующий вид:

$$u^0_{1a} = \sum_{p=1} (e^{ik_1 x} U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} + e^{-ik_1 x} \mathcal{R}_{11} U^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}});\ u^0_{2a} =$$
$$= \sum_{p=1} e^{ik_2 x} \mathcal{T}_{11} U^{0,\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}. \quad (3.1.7)$$

Зная продольные компоненты вектора смещений и компоненты падающего поля, найдем по формулам (1.12)–(1.13) первые, не равные нулю, компоненты асимптотического разложения (1.8) вектора смещений $\mathbf{u}_j$ u^1_{1a}, w^1_{1b}, u^1_{1b}, w^1_{1a}, u^1_{2a}, w^1_{2a}, w^1_{2b}, u^1_{2b}.

Вертикальные составляющие вектора продольных смещений $\mathbf{u}_j$, $j = 1, 2$, равны

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{w}_{1,p}} &= e^{ik_1 x}\, W^{0,\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} + e^{-ik_1 x}\mathcal{R}_{11} W^{0,\mathrm{ref}}_{\mathbf{w}_{1,p}}; \\ w_{2,\mathbf{w}_{1,p}} &= e^{ik_2 x}\, \mathcal{T}_{11}\, W^{0,\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Коэффициенты $\mathcal{T}_{11}$ и $\mathcal{R}_{11}$ определены формулами (2.5).

Функции $W^{1,\mathrm{ref}}_{\mathbf{w}_{1,p}}$ и $W^{1,\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}$ представлены выражениями:

$$W^{\mathrm{ref}}_{\mathbf{w}_{1,p}} = -\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}} e^{i\sigma_1\zeta_p} \frac{i\psi_1 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} v'(-\zeta_p + \nu_1) =$$

$$= \frac{i\psi_1^3 e^{ik_1 x_0} e^{-i(-\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p}}{\lambda_1 k_1 v'(-\zeta_p)} v'(-\zeta_p + \nu_1), \tag{3.1.9}$$

$$W^{\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}(\sigma_2, \nu_2) = \frac{-e^{-i\pi/4}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}}{2^{2/3} k_2^{1/3} 2\sigma_2\sqrt{\pi\sigma_2}} \int_0^\infty v\Big(-\zeta_p + \nu_2'\alpha \Big) \times$$

$$\times \left[(\nu_2' - \nu_2) e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}} + (\nu_2' + \nu_2) e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}} \right] d\nu_2', \tag{3.1.10}$$

где

$$\alpha = \alpha_{\mathbf{w}_1 \to \mathrm{U}_2} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}} = \frac{a_2^{2/3}(0)(a_{1z}'(0))^{1/3}}{a_1(0)}.$$

Проведя интегрирование по частям, формулу для составляющей $W^{\mathrm{tr}}_{\mathbf{w}_{1,p}}$ (3.1.10) можно привести к другому виду:

$$W^{\mathrm{tr}}_{2,\mathbf{w}_{1,p}} =$$

$$= \frac{ie^{i\pi/4}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}\alpha}{\sqrt{2\pi k_2 x}} \int_0^\infty v'(\nu_2'\alpha - \zeta_p) \left[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}} + e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}} \right] d\nu_2', \tag{3.1.11}$$

На границе $\nu_2 = 0$

$$W^{\mathrm{tr}}_{2,\mathbf{w}_{1,p}}(\sigma_2, 0) = \frac{2ie^{i\pi/4}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{w}_{1,p}}\alpha}{\sqrt{2\pi k_2 x}} \int_0^\infty e^{\frac{i(\nu_2')^2}{4\sigma_2}} v'(-\zeta_p + \nu_2'\alpha) d\nu_2'. \tag{3.1.12}$$

Выпишем значение векторов смещений волн падающей на линию разрыва упругих параметров отраженной и преломленной от этой линии.

$$\mathbf{u}^{\rm inc}|_{z=0} =$$
$$= \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1x}}{k_1\lambda_1}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{-\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{-i(\sigma_0+\sigma_1)\zeta_p}}{\lambda_1}\right], \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{u}^{\rm ref}|_{z=0} =$$
$$= \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{-ik_1x}}{k_1\lambda_1}\mathcal{R}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{-i(\sigma_0-\sigma_1)\zeta_p}}{\lambda_1}\right], \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{u}^{\rm tr}|_{z=0} = \frac{i(\lambda_2+2\mu_2)e^{ik_2x}}{k_2\lambda_2}\mathcal{T}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\lambda_2\gamma_2}\\ -1\end{pmatrix}$$
$$\times\left[\frac{-\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\lambda_1\sqrt{\pi\sigma_2}v'(-\zeta_p)}\int_0^\infty e^{\frac{i(\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\,v'(-\zeta_p+\nu_2'\alpha)d\nu_2'\right]. \quad (3.1.15)$$

3.2. Дифракция волны соскальзывания от линии раздела сред ц отрицательным градиентным ростом скоростей с глубиной: $C_1 \to C_2$

Пусть на вертикальную границу, разделяющую две области с отрицательным изменением градиента скорости, набегает q-я волна соскальзывания P поляризации. Вектор смещений $\mathbf{u}_q^{\rm inc}$ волны, набегающей на границу раздела $x=0$ областей Ω_1 и Ω_2, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.4), (1.6). Ее горизонтальная компонента $u_a^0 \neq 0$ вектора продольных смещений определена выражением

$$u_{a,q}^{0,\rm inc}(x,z,k_1) = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}}e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q}\frac{w_1(\xi_q-\nu_1)}{w_1'(\xi_q)} =$$
$$= e^{ik_1x}U_{a,q}^{0,\rm inc} = e^{ik_1x}\mathcal{A}_{C_1,q}^{\rm inc}e^{i\sigma_1\xi_q}w_1(\xi_q-\nu_1),$$
$$\arg(\xi_q-\nu_1) = \pi/3. \quad (3.2.1)$$

Здесь $w_1(\xi_q)=0$, а коэффициент $\mathcal{A}_{C_1,q}^{\rm inc}$ равен

$$U_{a,q}^{0,\rm inc} = \mathcal{A}_{C_1,q}^{\rm inc}e^{i\sigma_1\xi_q}w_1(\xi_q-\nu_1), \quad \mathcal{A}_{C_1,q}^{\rm inc} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_q}}{\lambda_1 2^{1/3}k_1^{2/3}w_1'(\xi_q)}. \quad (3.2.2)$$

Заметим, что в главном приближении достаточно рассмотреть лишь первый корень функции $w_1(\xi_1) = 0$.

Продольная компонента u_{ja} вектора смещений $\mathbf{u}_j$ в области Ω_j является определяющей и имеет следующий вид:

$$u^0_{1a,q} = e^{ik_1x}\,U^{0,\mathrm{inc}}_{a,q} + e^{-ik_1x}\,\mathcal{R}_{11}\,U^{0,\mathrm{ref}}_{a,q}; \quad u^0_{2a,q} = e^{ik_2x}\,\mathcal{T}_{11}\,U^{0,\mathrm{tr}}_{a,q}. \quad (3.2.3)$$

Зная продольные компоненты вектора смещений и компоненты падающего поля, найдем по формулам (1.12)–(1.13) первые, не равные нулю компоненты асимптотического разложения (1.8) вектора смещений $\mathbf{u}_j$ u^1_{1b}, w^1_{1b}, u^1_{1a}, w^1_{1a}, u^1_{2a}, w^1_{2a}, w^1_{2b}.

Вертикальные составляющие вектора продольных смещений $\mathbf{u}_j$, $j = 1, 2$, равны

$$w_{1a,q} = e^{ik_1x}\,W^{\mathrm{inc}}_{a,q} + e^{-ik_1x}\mathcal{R}_{11}W^{\mathrm{ref}}_{a,q}; \quad w_{2a,q} = e^{ik_2x}\,\mathcal{T}_{11}\,W^{\mathrm{tr}}_{a,q}. \quad (3.2.4)$$

Коэффициенты $\mathcal{T}_{11}$ и $\mathcal{R}_{11}$ определены формулами (2.5).

Составляющей $W^{\mathrm{inc}}_{a,q}$ найдется в виде

$$W^{\mathrm{inc}}_{a,q} = \frac{-i\,\psi_1\,2^{1/3}}{k_1^{1/3}} e^{i\sigma_1\xi_q}\frac{\partial U^{\mathrm{inc}}_{a,q}}{\partial\nu_1} = \frac{-i\psi_1^3\,e^{ik_1x_0}}{\lambda_1\,k_1} e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q}\frac{w_1'(\xi_q-\nu_1)}{w_1'(\xi_1)} =$$

$$= \frac{i\,\psi_1\,2^{1/3}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{C_1,q}}{k_1^{1/3}} e^{i\sigma_1\xi_q}\,w_1'(\xi_q-\nu_1), \quad \arg(\xi_q-\nu_1) = \pi/3. \quad (3.2.5)$$

Составляющая $u^{1,inc}_{a,q}$ на границе $z = 0$ равна

$$\left.\frac{u^{1,inc}_{a,q}}{k_1^{1/3}}\right|_{z=0} = e^{ik_1x}\frac{4i\mu_1^2\sqrt{1-\gamma_1^2}}{k_1\lambda_1^2\gamma_1}\left.\frac{\partial U^0}{\partial z}\right|_{z=0}. \quad (3.2.6)$$

Горизонтальная $u^{1,inc}_{b,q=1}$ и вертикальная $w^{1,inc}_{b,q=1}$ компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_q$ падающей поперечной P волны, распространяющиеся с поперечной скоростью, удовлетворяют соотношениям (1.14).

Следовательно, вектор падающей волны соскальзывания $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ на границе $z = 0$ равен

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = \frac{i\psi_1^3(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1(x_0+x)}e^{i(\sigma_0+\sigma_1)\xi_q}}{\lambda_1^2k_1}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Далее, действуя по схеме пункта 3.1, для функции $U^{\rm tr}_{a,q}$ получаем

$$U^{\rm tr}_{a,q}(\sigma_2,\nu_2)=\sum_{n=1}^{N}U^{\rm tr}_{a,q,n}(\sigma_2,\nu_2)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}}d\nu_2'\mathcal{A}^{\rm inc}_{C_{1,q}}w(\xi_1-\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2')\times$$

$$\times\int\limits_{\mathcal{L}_0^1}e^{i\sigma_2\xi}\frac{w_1(\xi-\nu_{2>})}{w_1(\xi)}[w_1(\xi-\nu_{2<})w_2(\xi)-w_2(\xi-\nu_{2<})w_1(\xi)]d\xi. \quad (3.2.8)$$

Контур интегрирования продеформирован из контура $\mathcal{L}_0$ (см. рис. 2) в контур $\mathcal{L}_0^1$, охватывающий полуось $\arg\xi=\pi/3$, начиная со второго корня производной функции Эйри w_1. Здесь

$$U^{\rm tr}_{a,q,n}(\sigma_2,\nu_2)=T_{q,n}\mathcal{A}^{\rm inc}_{C_{1,q}}w_1(\xi_n-\nu_2)e^{i\sigma_2\xi_n}. \quad (3.2.9)$$

Коэффициент трансформации $T_{q,n}$ в случае $C_1\rightharpoonup C_2$, когда в средах Ω_1 и Ω_2 скорость имеет максимум на границе полупространства, находится по формуле:

$$T_{q,n}=\frac{-1}{[w_1'(\xi_n)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}}w_1(\xi_q-\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2')w_1(\xi_n-\nu_2')d\nu_2'.$$

Здесь $\psi_1>0$, $\psi_2>0$ и $\nu_2'>0$. Перепишем коэффициенты $T_{q,n}$ в виде

$$T_{q,n}=\frac{-1}{[w_1'(\xi_n)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}}w_1(\xi_q-\alpha\nu_2')w_1(\xi_n-\nu_2')d\nu_2', \quad (3.2.10)$$

где коэффициент α равен

$$\alpha=\alpha_{C_1\rightharpoonup C_2}=\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^{1/3}\frac{a_2}{a_1}\Big|_{z=0}>0.$$

Для преломленного поля при $C_1\rightharpoonup C_2$ функция $U^{0,{\rm tr}}_{a,q,n}(\sigma_2,\nu_2)$ определена соотношениями (3.2.2), (3.2.9)– (3.2.10).

Продольная вертикальная компонента $W^{\rm tr}_{a,q,n}(\sigma_2,\nu_2)$ вектора смещений $\mathbf{u}_2$ найдена по формуле (1.12) и равна

$$W^{\rm tr}_{a,q,1}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{i\psi_2 2^{1/3}}{k_2^{1/3}}e^{i\sigma_1\xi_q}\frac{\partial U^{\rm tr}_{a,q,n}}{\partial\nu_2}=$$

$$=\frac{i\psi_2 2^{1/3}}{k_1^{1/3}}T_{q,n}\mathcal{A}^{\rm inc}_{C_{1,q}}w_1'(\xi_n-\nu_2)e^{i\sigma_2\xi_n}. \quad (3.2.11)$$

Функция $U^{0,\mathrm{ref}}_{a,q,n}(\sigma_1,\nu_1)$, аналогично пункту 3.1, определена выражением

$$U^{0,\mathrm{ref}}_{a,q,n}(\sigma_1,\nu_1) = \sum_{n=1} R_{q,n}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{C_{1,q}} w_1(\xi_n-\nu_1)e^{-i\sigma_1\xi_n} = U^{0,\mathrm{inc}}_{a,q}(-\sigma_1,\nu_1). \quad (3.2.12)$$

Формула (3.2.12) следует из равенства коэффициента $R_{q,n}$ отражения следующему соотношению

$$R_{q,n} = \frac{-1}{[w_1'(-\xi_n)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q-\nu_1')w_1(\xi_n-\nu_1')d\nu_1' = 1,$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q-\nu_1')w_1(\xi_n-\nu_1')d\nu_1' = \begin{cases} 0 & \text{при } q\neq n,\\ -[w_1'(\xi_q)]^2 & \text{при } q=n.\end{cases}$$

Следовательно,

$$u^{\mathrm{ref}}_{a,q} = \mathcal{R}_{11}\,e^{-i\,k_1\,x}\,U^{0,\mathrm{inc}}_{a,q}(-\sigma_1,\nu_1). \quad (3.2.13)$$

Выпишем окончательный вид векторов $\mathbf{u}_j$ в задаче $W_1 \to U_2$ на границе $z=0$.

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}|_{z=0} = \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1x}}{k_1\lambda_1}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{i(\sigma_0+\sigma_1)\xi_q}}{\lambda_1}\right], \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}|_{z=0} = \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{-ik_1x}}{k_1\lambda_1}\mathcal{R}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{-\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{i(\sigma_0-\sigma_1)\xi_q}}{\lambda_1}\right], \quad (3.2.15)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tr}}|_{z=0} = \frac{i(\lambda_2+2\mu_2)e^{ik_2x}}{k_2\lambda_2}\mathcal{T}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\lambda_2\gamma_2}\\ -1\end{pmatrix}\times \quad (3.2.16)$$

$$\times\left[\frac{\psi_1^2\psi_2 e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_q}e^{i\sigma_2\xi_1}k_2^{2/3}}{\lambda_1 w_1'(\xi_q)w_1'(\xi_1)k_1^{2/3}}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q-\alpha\nu_2')w_1(\xi_1-\nu_2')d\nu_2'\right].$$

Входящие в формулы (3.2.14)–(3.2.16) коэффициенты $\mathcal{R}_{11}$ и $\mathcal{T}_{11}$ определены равенствами (2.5).

Замечание 1. Коэффициент трансформации $T_{q,n}$

$$T_{q,n} = -\frac{1}{[w_1'(\xi_n)]^2} \int_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q - \alpha\nu) w_1(\xi_n - \nu)\, d\nu$$

может быть преобразован в интеграл по вещественной оси. Для этого необходимо воспользоваться соотношением, связывающим функции Эйри w_1 и v и их корни

$$w_1(te^{i\pi/3}) = 2v(-t)e^{i\pi/6}, \quad \zeta_s = \xi_s e^{i\pi/3}.$$

Тогда получим

$$T_{q,n} = \frac{1}{[v(-\zeta_n)]^2} \int_0^{\infty} v(\alpha\nu - \zeta_q) v(\nu - \zeta_n)\, d\nu. \tag{3.2.17}$$

3.3. Переход волны шепчущей галереи в сумму волн шепчущей галереи: $W_1 \to W_2$

Найдем отраженные и преломленные от границы раздела между средой Ω_1 и средой Ω_2 волновые поля. В обеих средах скорости распространения волнового процесса на границе $z = 0$ имеют минимум. Падающее поле определено волной шепчущей галереи номера p

$$u^{0,\mathrm{inc}}_{W_1,a,p}(x,z,k_1) = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\lambda_1 2^{1/3} k_1^{2/3}} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p} \frac{v(-\zeta_p+\nu_1)}{v'(-\zeta_p)}$$

$$= e^{ik_1 x} U^{0,\mathrm{inc}}_{a,p} = e^{ik_1 x} \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p} e^{-i\sigma_1\zeta_p} v(-\zeta_p + \nu_1), \tag{3.3.1}$$

причем $v(-\zeta_p) = 0$, а коэффициент $\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}$ равен

$$\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1 x_0} e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\lambda_1 2^{1/3} k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}. \tag{3.3.2}$$

По горизонтальной компоненте падающего поля $U^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}$ найдем вертикальную компоненту падающего поля $W^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}$, используя формулу (1.12). Для составляющей $W^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}$ найдем, что

$$W^{0,\mathrm{inc}}_{a,p} = \frac{-i\,\psi_1\, 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} e^{-i\sigma_1\zeta_p} \frac{\partial U^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}}{\partial\nu_1} =$$

$$= \frac{i\psi_1^3\, e^{ik_1x_0}}{\lambda_1\, k_1} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p} \frac{v_1'(-\zeta_p+\nu_1)}{v'(\zeta_p)} =$$

$$= \frac{-i\,\psi_1\, 2^{1/3}\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}}{k_1^{1/3}} e^{i\sigma_1\xi_q} v'(-\zeta_p+\nu_1). \qquad (3.3.3)$$

Составляющая $u^{1,inc}_{a,p}$ на границе $z=0$ равна

$$\frac{u^{1,inc}_{a,p}}{k_1^{1/3}} = e^{\,ik_1x}\, 4\, i\, \sqrt{1-\gamma_1^2}\, U^{0,\rm inc}_{a,p}. \qquad (3.3.4)$$

Падающее на вертикальную границу $x=0$ поле шепчущей галереи $U^{0,\rm inc}_{W_1,p}$, номера p определено формулами (1.18)–(1.19). Тогда отраженное поле представляется в виде

$$u^{0,\rm ref}_{a,p} = \mathcal{R}_{11} e^{-ik_1x} U^{0,\rm ref}_{a,p}, \qquad (3.3.5)$$

где

$$U^{0,\rm ref}_{a,p}(\sigma_1,\nu_1) =$$

$$= \int_0^\infty (-i)\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}\, v(-\zeta_p+\nu_1')\, G_{W_1}(-\sigma_1,\nu_1;\sigma_1'=0,\nu_1')\, d\nu_1'. \qquad (3.3.6)$$

Функция Грина в области Ω_1 выражается формулой (2.14), в которой контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

В формуле (3.3.6) поменяем порядок интегрирования и продеформируем контур $\mathcal{L}$, (см. рис. 1) в $\mathcal{L}_N$ так, что он будет охватывать отрицательную полуось $\mathrm{Re}\,\zeta<0$, начиная с $(N+1)$-го корня функции Эйри (см. рис. 3).

При таком преобразовании контура интегрирования $\mathcal{L}$ в контур $\mathcal{L}_N$, (см. рис. 3) из интеграла выделится конечная сумма собственных функций типа волн шепчущей галереи номеров $n=1,2,\ldots,N$ так, что

$$U^{0,\rm ref}_{a,p}(\sigma_1,\nu_1) = \sum_{n=1}^{N} U^{0,\rm ref}_{a,p,n}(\sigma_1,\nu_1) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\nu_1' \mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} v(-\zeta_p+\nu_1') e^{i\sigma_1\zeta} \times$$

$$\times \int_{L_N} \frac{v(\zeta+\nu_{1>})}{v(\zeta)} [v(\zeta+\nu_{1<})w_2(\zeta) - w_2(\zeta+\nu_{1<})v(\zeta)] d\zeta. \qquad (3.3.7)$$

Здесь

$$U^{0,\mathrm{ref}}_{a,p,n}(\sigma_1,\nu_1) = R_{pn}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}v(-\zeta_n+\nu_1)e^{-i\sigma_1\zeta_n}.$$

Коэффициенты трансформации R_{pn} равны

$$R_{pn} = \frac{-v'(-\zeta_n)w_2(-\zeta_n)}{[v'(-\zeta_n)]^2}\int\limits_0^\infty v(\nu_1'-\zeta_p)v(\nu_1'-\zeta_n)d\nu_1' = 1, \qquad (3.3.8)$$

так как

$$\int\limits_0^\infty v(-\zeta_p+\nu_1')v(-\zeta_n+\nu_1')d\nu_1' = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p\neq n, \\ [v'(-\zeta_n)]^2 & \text{при} \quad p=n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u^{0,\mathrm{ref}}_{a,p}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{R}_{11}e^{-ik_1x}U^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}(-\sigma_1,\nu_1). \qquad (3.3.9)$$

Обратимся к вычислению преломленного поля

$$u^{0,\mathrm{tr}}_{a,p} = \mathcal{T}_{11}\,e^{ik_2\,x}\,U^{0,\mathrm{tr}}_{a,p}. \qquad (3.3.10)$$

. Аналогично пути, которым определено отраженное поле, найдем преломленное

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{a,p}(\sigma_2,\nu_2) = \sum_{n=1}^{N}U^{0,\mathrm{tr}}_{a,p,n}(\sigma_2,\nu_2) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty U^{0,\mathrm{inc}}_{a,p}(\sigma_2'=0,\nu_2')d\nu_2'\int\limits_{L_N}e^{i\sigma_2\zeta}\times$$

$$\times\frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{2<})v(\zeta)]d\zeta. \qquad (3.3.11)$$

Здесь

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{a,p,n}(\sigma_2,\nu_2) = T_{p,n}A^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}v(-\zeta_n+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n)}. \qquad (3.3.12)$$

Коэффициенты трансформации $T_{p,n}$ в случае $W_1 \to W_2$, когда в среде Ω_1 и в среде Ω_2 скорость имеет минимум на границе полупространства, находятся по формуле:

$$T_{p,n} = \frac{-1}{[v'(-\zeta_n)]^2}\int\limits_0^\infty v(-\zeta_p+\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2')v(-\zeta_n+\nu_2')d\nu_2'.$$

Здесь $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$.

Перепишем коэффициенты $T_{p,n}$ в виде

$$T_{p,n} = \frac{-1}{[v'(-\zeta_n)]^2} \int\limits_0^\infty v(-\zeta_p + \alpha\nu_2')v(-\zeta_n + \nu_2')d\nu_2', \qquad (3.3.13)$$

где коэффициент α равен

$$\alpha = \alpha_{W_1 \to W_2} = \left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^{1/3} \frac{a_2}{a_1}\Big|_{z=0} > 0.$$

Величину горизонтальной продольной компоненты $u_{a,p}^{0,\mathrm{tr}}$ вектора смещений преломленного поля в ситуации, когда $\mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_2$, получим по формулам (3.3.10), (3.3.12)–(3.3.13).

Найдем вертикальную продольную составляющую вектора смещений преломленного поля

$$W_{a,p,n}^{0,\mathrm{tr}} = \frac{i\,\psi_2\, 2^{1/3}}{k_2^{1/3}} e^{-i\sigma_2\zeta_n} \frac{\partial U_{a,p,n}^{0,\mathrm{tr}}}{\partial \nu_2} =$$

$$= \frac{i\,\psi_2\, 2^{1/3} T_{p,n}}{k_1^{1/3}} A_{W_1,p}^{\mathrm{inc}} e^{-i\sigma_2\zeta_n} v'(-\zeta_n + \nu_1). \qquad (3.3.14)$$

Далее, как в пунктах 3.1–3.2, зная горизонтальные продольные компоненты падающего, отраженного и преломленного полей $U_{a,p}^{0,\mathrm{inc}}$, $U_{a,p}^{0,\mathrm{ref}}$ и $U_{a,p,n}^{0,\mathrm{tr}}$, найдем вертикальные продольные компоненты падающего, отраженного и преломленного полей $W_{a,p}^{\mathrm{inc}}$, $W_{a,p}^{\mathrm{ref}}$ и $W_{a,p,n}^{\mathrm{tr}}$. По формулам (1.12)–(1.13) найдем все составляющие искомых векторов отраженного и преломленного полей. Формулы для векторов смещений падающего, отраженного и преломленного полей совпадают с идентичными формулами пунктов 3.1–3.2. Запишем вектора смещений на границе $z = 0$ для падающего, отраженного и преломленного полей.

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}|_{z=0} =$$

$$= \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1x}}{k_1\lambda_1} \begin{pmatrix} \frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1} \\ -1 \end{pmatrix} \left[\frac{-\psi_1^3 e^{ik_1x_0} e^{-i(\sigma_0+\sigma_1)\zeta_p}}{\lambda_1}\right], \qquad (3.3.15)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}|_{z=0} =$$

$$= \frac{i(\lambda_1+2\mu_1)e^{-ik_1x}}{k_1\lambda_1} \mathcal{R}_{11} \begin{pmatrix} \frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1} \\ -1 \end{pmatrix} \left[\frac{\psi_1^3 e^{ik_1x_0} e^{-i(\sigma_0-\sigma_1)\zeta_p}}{\lambda_1}\right], \qquad (3.3.16)$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tr}}|_{z=0} = \frac{i(\lambda_2+2\mu_2)e^{ik_2x}}{k_2\lambda_2}\mathcal{T}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\lambda_2\gamma_2}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{\psi_1^2\psi_2 e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta_p}k_2^{2/3}}{\lambda_1 v'(-\zeta_p)k_1^{2/3}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}\frac{e^{-i\sigma_2\zeta_n}}{v'(-\zeta_n)}\int_0^\infty v(-\zeta_p+\alpha\nu_2')v(-\zeta_n+\nu_2')d\nu_2'\right]. \qquad (3.3.17)$$

Замечание 2. Здесь, как и в пункте 1, для значений $\alpha = \alpha_{\mathbf{w}_1\to\mathbf{u}_2}$ равных (а): $\alpha = 0.8$; (б): $\alpha = 1,0$; (в): $\alpha = 1.2$; найдена матрица T пятого порядка 5×5 (см. рис. 4) коэффициентов трансформации $T_{p,n}$. Ее элементы равны

$$T_{p,n} = \int_0^\infty v(-\zeta_n+\nu)\,v'(-\zeta_p+\nu\alpha)d\nu.$$

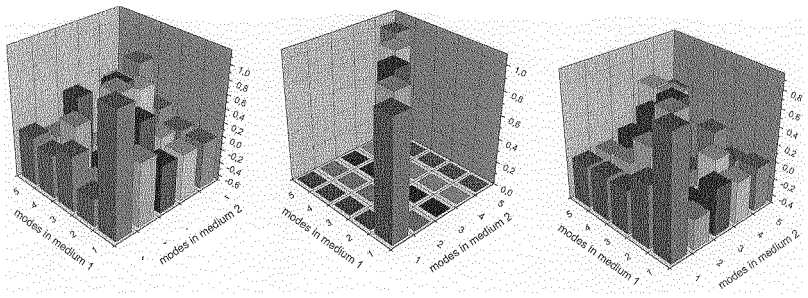

Рис. 4.

3.4. Дифракция поверхностной волны от линии раздела между средами с постоянными скоростями: $U_1 \to U_2$

Пусть на вертикальную границу, разделяющую две области с постоянными скоростями из области Ω_1 набегает поверхностная P-волна. Вектор смещений $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = (u, 0, w)$ волны, набегающей на границу раздела $x = 0$ областей Ω_1 и Ω_2, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.4), (1.6), и имеет следующий вид

$$u^{0,\mathrm{inc}}_{U_{1,a}}(x,z,k_1) = \frac{z\,e^{-i\,\pi/4}e^{i\,k_1\,(x+x_0)}e^{i\,k_1\,\frac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\lambda_1\,(x+x_0)\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}\left(1+O(k_1^{-1})\right) =$$

$$= e^{\,i\,k_1\,x}\,U^{0,\mathrm{inc}}_{U_1,a}. \qquad (3.4.1)$$

В координатах σ_1 и ν_1 функция $U^{0,\mathrm{inc}}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом:

$$U^{0,\mathrm{inc}}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{\nu_1\, e^{-i\,\pi/4} e^{ik_1x_0} e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{2\lambda_1\,(\sigma_1+\sigma_0)\sqrt{\pi(\sigma_1+\sigma_0)}2^{1/3}k_1^{2/3}}\left(1+O\left(k_1^{-1/3}\right)\right) =$$

$$= \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}\frac{\nu_1 e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}, \quad \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1} = \frac{e^{-i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2^{4/3}k_1^{2/3}\,\lambda_1\sqrt{\pi}}. \qquad (3.4.2)$$

Отметим, что имеет место предельная формула

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-i\,\pi/4}e^{\,i\,\dfrac{\nu^2}{4\,\sigma}}}{2\sqrt{\pi\,\sigma}} = \delta(\nu). \qquad (3.4.3)$$

Для составляющей $W^{\mathrm{inc}}_{U_1,a}$ найдем, что

$$W^{\mathrm{inc}}_{U_1,a} = \frac{-i\,2^{1/3}}{k_1^{1/3}}\frac{\partial U^{0,\mathrm{inc}}_{U_1,a}}{\partial\nu_1} == \frac{-i\,2^{1/3}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}}{k_1^{1/3}}\frac{e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}} =$$

$$\frac{-e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2k_1\,\lambda_1\sqrt{\pi}}\frac{e^{\,i\,\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}. \qquad (3.4.4)$$

Функцию $U^{0,\mathrm{tr}}_{U_1,a}(\sigma_2,\nu_2)$ найдем из формулы (2.11), в которой функция Грина определена выражением (2.13), а $U^{0,\mathrm{inc}}_{U_1,a}(\sigma_2'=0,\nu_2')$ есть приповерхностная волна (3.4.1)–(3.4.2) вида

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{U_1,a}(\sigma_2,\nu_2) = \frac{-ie^{-i\pi/4}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}}{2\sqrt{\pi\sigma_2}\sqrt{\sigma_0^3}}\int\limits_0^\infty\left(\nu_2'\frac{k_1^{2/3}}{k_2^{2/3}}\right)e^{\,i\,\dfrac{(\nu_2')^2k_1^{4/3}}{4\,\sigma_0k_2^{4/3}}}\times$$

$$\times\left[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}} - e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\right]d\nu_2'. \qquad (3.4.5)$$

Проводя громоздкие вычисления получим функцию $U^{0,\mathrm{tr}}_{U_{1,a}}(\sigma_2,\nu_2)$ следующего вида

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{U_{1,a}}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{-e^{i\pi/2}k_2^{4/3}\nu_2\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}e^{\,i\dfrac{\nu_2^2}{4\left(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}}\right)}}}{k_1^{4/3}\sqrt{(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})^3}}. \tag{3.4.6}$$

Соответствующая вертикальная компонента $W^{\mathrm{tr}}_{U_{1,a}}(\sigma_2,\nu_2)$ может быть вычислена и равна

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{U_{1,a}}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{i2^{1/3}k_2^{4/3}\nu_2\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}e^{\,i\dfrac{\nu_2^2}{4\left(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}}\right)}}}{2k_1^{4/3}k_2^{1/3}\sqrt{(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})^3}}. \tag{3.4.7}$$

Аналогично вычисляются все компоненты векторов смещений отраженного и преломленного полей. Схема одна и та же. Если вычислены продольные компоненты этих полей, то и все поле найдено.

Для функции $U^{0,\mathrm{ref}}_{U_{1,a}}(\sigma_1,\nu_1)$ получаем

$$U^{0,\mathrm{ref}}_{U_{1,a}}(\sigma_1,\nu_1)=U^{0,\mathrm{inc}}_{U_{1,a}}(-\sigma_1,\nu_1). \tag{3.4.8}$$

На границе полупространства вектора смещений равны

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}|_{z=0}=\frac{(\lambda_1+2\mu_1)e^{ik_1x}}{k_1\lambda_1}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{e^{i\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2\lambda_1\sqrt{\pi(\sigma_0+\sigma_1)^3}}\right], \tag{3.4.9}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}|_{z=0}=$$
$$=\frac{(\lambda_1+2\mu_1)e^{-ik_1x}}{k_1\lambda_1}\mathcal{R}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\lambda_1\gamma_1}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{e^{i\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2\lambda_1\sqrt{\pi(\sigma_0-\sigma_1)^3}}\right], \tag{3.4.10}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tr}}|_{z=0}=$$
$$=\frac{(\lambda_2+2\mu_2)e^{ik_2x}}{k_2\lambda_2}\mathcal{T}_{11}\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\lambda_2\gamma_2}\\ -1\end{pmatrix}\left[\frac{e^{i\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2\lambda_1\sqrt{\pi(\sigma_0+\sigma_2\alpha^2)^3}}\right]. \tag{3.4.11}$$

3.5. Дифракция однородной волны от линии раздела со средой с положительным градиентным ростом скорости a_2 с глубиной: $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{W}_2$

Пусть на вертикальную линию набегает приповерхностная P-волна. Эта линия разделяет область Ω_1 с постоянной скоростью и область Ω_2 с положительным ростом градиента скорости с глубиной.

Вектор смещений $\mathbf{u}^{\rm inc} = (u, 0, w)$ волны, набегающей на границу раздела $x = 0$ областей Ω_1 и Ω_2, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.4), (1.6), и имеет следующий вид

$$u^{0,\rm inc}_{U_1,a}(x,z,k_1) = \frac{z\,e^{-i\,\pi/4} e^{i\,k_1\,(x+x_0)} e^{\displaystyle i\,k_1\,\frac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\lambda_1\,(x+x_0)\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}\left(1 + O(k_1^{-1})\right) =$$

$$= e^{i\,k_1\,x} U^{0,\rm inc}_{U_1,a}. \qquad (3.5.1)$$

В координатах σ_1 и ν_1 функция $U^{0,\rm inc}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом

$$U^{0,\rm inc}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{\nu_1\,e^{-i\,\pi/4} e^{ik_1x_0} e^{\displaystyle i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{2\lambda_1\,(\sigma_1+\sigma_0)\sqrt{\pi(\sigma_1+\sigma_0)}\,2^{1/3}k_1^{2/3}}\left(1 + O\big(k_1^{-1/3}\big)\right) =$$

$$= \mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1} \frac{\nu_1 e^{\displaystyle i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}, \quad \mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1} = \frac{e^{-i\,\pi/4} e^{ik_1x_0}}{2^{4/3}k_1^{2/3}\,\lambda_1\,\sqrt{\pi}}. \qquad (3.5.2)$$

Для функции $U^{0,\rm ref}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1)$ получаем тоже выражение, что и в предыдущем пункте

$$U^{0,\rm ref}_{U_1,a}(\sigma_1,\nu_1) = U^{0,\rm inc}_{U_1,a}(-\sigma_1,\nu_1). \qquad (3.5.3)$$

Функцию $U^{0,\rm tr}_{U_1,a}(\sigma_2,\nu_2)$ найдем из формулы (2.11), в которой функция Грина определена выражением (2.14), а $U^{0,\rm inc}_{U_1,a}(\sigma_2'=0,\nu_2')$ есть приповерхностная волна (3.5.1)–(3.5.2). Преобразуем двойной интеграл следующим образом. Переставим порядок интегрирования и преобразуем контур $\mathcal{L}$ в контур $\mathcal{L}_N$. После этого выделится конечная сумма одномерных интегралов по собственным функциям типа волн шепчущей галереи номеров $n =$

$1, 2, \ldots, N$ и двойной интеграл. Приведем выражение для функции $U^{0,\mathrm{tr}}_{U_1,a}(\sigma_2, \nu_2)$:

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{U_1,a}(\sigma_2,\nu_2) = \sum_{n=1}^{N} U^{0,\mathrm{tr}}_{n}(\sigma_2,\nu_2) + \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{\sigma_0^3}} \int\limits_0^\infty d\nu_2' \nu_2' \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1} e^{\,i\frac{\nu_2'^{\,2}}{4\,\sigma_0}} \times$$

$$\times \int\limits_{L_N} \frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v(\zeta)} [v(\zeta+\nu_{2<})w_2(\zeta) - w_2(\zeta+\nu_{2<})v(\zeta)]d\zeta. \qquad (3.5.4)$$

Здесь

$$U^{0,\mathrm{tr}}_{n}(\sigma_2,\nu_2) = -T_n \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1} \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma_0^3}[v'(-\zeta_n)]^2} v(-\zeta_n+\nu_1) e^{-i\sigma_2\zeta_n}.$$

Коэффициенты трансформации T_n равны

$$T_n = \int\limits_0^\infty \nu_2' e^{\,i\frac{\alpha\nu_2'^{\,2}}{4\,\sigma_2}} v(-\zeta_n+\nu_2')d\nu_2'. \qquad (3.5.5)$$

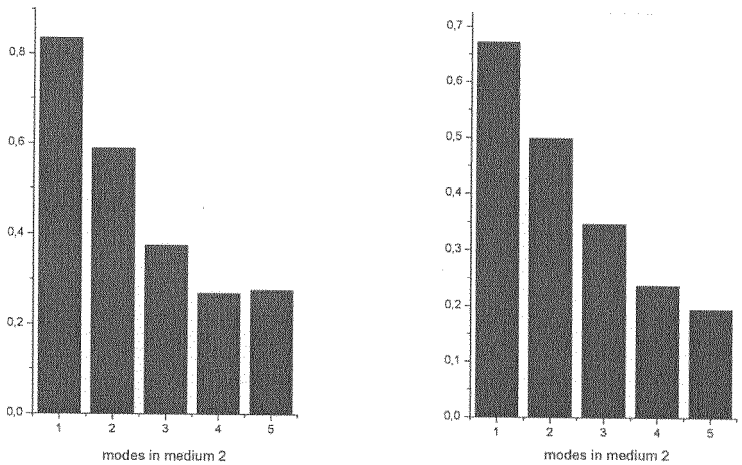

Рис. 5.

Замечание 3. В случае $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{W}_2$ для некоторых значений $\alpha = \alpha_{\mathbf{U}_1 \to \mathbf{W}_2}$ получены численные значения (см. рис. 5) коэффициента трансформации $T_{\mathbf{U}_1 n}$ на поверхности $z = 0$

$$T_{\mathbf{U}_1 n} = \int_0^\infty e^{\frac{i\alpha(\nu_2')^2}{4\sigma_2}} v'(-\zeta_n + \nu_2') d\nu_2'$$

при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Литература

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — Журн. эксперим. и теор. физики, **16**, No. 7, (1946), 557–573.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Изд-во Ленингр. ун-та, Л. (1974), 124 с.
3. И. В. Мухина, Л. А. Молотков, *О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам.* — Изв. АН СССР. Физика Земли No. 4 (1967), 3–8.
4. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — Труды ордена Ленина Математического института им. В. А. Стеклова **CXV**. Математические вопросы теории дифракции и распространения волн. 1. Изд-во Наука, Ленинград (1971), 114–130.
5. Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция поверхностных* SV*-волн на линии разрыва упругих параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 77–105.

Kirpichnikova N. Ya., Krauklis P. V., Krauklis A. P. Reflection and refraction of the near-surface P-waves on a line of elastic parameters discontinuity.

The reflected and refracted problems on elastic surface waves of horizontal polarization (P-waves) from a line of elastic parameters jump are under consideration. The relevant coefficients of reflection, refraction, and transformation are obtained by means of the parabolic equation method. The comparison of the Rayleigh waves, SV-waves, and P-waves is carried out. Numerical values of the transformation matrix are obtained for the case of the passage of a wave of the whispering gallery to the sum of waves of the whispering gallery and a homogeneous wave to the first five modes of waves of the whispering gallery.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 мая 2007 г.