Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Н. Я. Кирпичникова

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ SV-ВОЛН НА ЛИНИИ РАЗРЫВА УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ

В данной работе рассмотрена серия задач дифракции поверхностных волн вертикальной поляризации (SV-волн) от линии разрыва упругих параметров. Эта линия разделяет полуплоскость на две области Ω_1 и Ω_2. На линии разрыва заданы условия жесткого контакта между упругими средами. Найдены отраженные в области Ω_1 и преломленные в области Ω_2 волны той же поляризации. Волны, набегающие из области Ω_1 на линию разрыва, образованы точечным источником.

Вблизи границы поле лучей (падающей, отраженной и преломленной волн) теряет свойство регулярности, и следовательно, лучевой или пространственно-временной лучевой методы не могут быть применены. Для того, чтобы выяснить характер волнового процесса, использован метод параболического уравнения (см. [1 ,2]) или метод пограничного слоя (см. [3]).

Схема получения дифракционных поверхностных SV-волн полностью применима для произвольной упругой трехмерной области, ограниченной достаточно гладкой поверхностью. Так в статьях [4–7] для различных гладких поверхностей были получены собственные функции, соответствующие поверхностным волнам вертикальной поляризации.

Упростим задачу и рассмотрим упругую полуплоскость (x, z), $\{-\infty < x < \infty,\ z \geqslant 0\}$ с параметрами, неоднородными относительно только координаты z. Это позволит яснее увидеть эффект дифракции волн от линии разрыва упругих параметров.

Граница полуплоскости $z = 0$ считается свободной от напряжений. Полуплоскость разделена линией $\{x = 0,\ z \geqslant 0\}$ на две области Ω_1 и Ω_2. Ось z направлена вертикально вниз. В области Ω_1 от источника в точке $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$, образуется падающее на линию раздела волновое поле. Ставится задача отыскания ди-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 05-01-00936).

фракционных волновых полей (отраженного в область Ω_1 и преломленного в область Ω_2).

Изучаемые здесь решения уравнений теории упругости в полуплоскости $z > 0$ есть волны, распространяющиеся вблизи поверхности с фазовой скоростью, близкой к поперечной скорости $b(z)$. Это так называемые волны SV поляризации. В отличие от волн Лява (SH-волн), обладающих перечисленными свойствами, смещение частиц внутри областей для SV-волн происходит параллельно плоскости (x, z) в направлении нормали к границе. У волн Лява смещение частиц в главном происходит ортогонально плоскости (x, z).

Вектор смещений волны SV поляризации $\mathbf{u}(x, z) = (u(x, z), v = 0, w(x, z))$ найден в виде суммы продольной $\mathbf{u}_a$ и поперечной $\mathbf{u}_b$ волн.

Полученные ниже результаты показывают, что продольная SV-волна сразу убывает при удалении от границы полуплоскости подобно волнам Релея. Поперечная волна сосредоточена в некотором приповерхностном волноводе. Поведение ее в приповерхностном слое зависит от поведения скорости продольной волны вблизи поверхности. Так при скорости $b(z)$, имеющей минимум на границе, соответствующие решения подобны собственным функциям типа шепчущей галереи. Если скорость $b(z)$ имеет максимум на границе, то вблизи границы поведение волн подобно волнам соскальзывания. Для упругих сред с постоянными параметрами из точных решений выделены приповерхностные волны.

Внутри упругой среды $z > 0$ асимптотически определяющими являются поперечные волны $\mathbf{u}_b = (u_b, v = 0, w_b)$, именно, вертикальная составляющая w_b. Смещение частиц в главном происходит в направлении нормали к границе паралельно плоскости (x, z), а не ортогонально плоскости (x, z), как у волн Лява (SH-волн).

Выделение вектора $\mathbf{u}_a$ из общего решения при $z \neq 0$ является условным, так как горизонтальная составляющая $|u_b|$ имеет тот же порядок малости, что и $|\mathbf{u}_a|$. На границе $z = 0$ порядок продольной и поперечной волн оказывается одинаковым.

Для SV-волн типа шепчущей галереи построен (см. [6]) набор высокочастотных установившихся приповерхностных волн, зависящих от целочисленного параметра $p = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая волна состоит из продольной $\mathbf{u}_a$ и поперечной $\mathbf{u}_b$ компонент, распространяющихся по границе с одной и той же фазовой скоростью

$$v_p = b(0)\left(1 + \frac{\zeta_p \psi^2}{k^{2/3}2^{1/3}} - \frac{4\psi^3\sqrt{1-\gamma^2}}{k} + O(k^{-4/3})\right).$$

Здесь величины ψ, ζ_p, k и γ равны

$$\psi^3 = \frac{b'_z(0)}{b(0)} > 0, \quad v(-\zeta_p) = 0, \quad \zeta_p > 0, \quad k = \frac{\omega}{b(0)}, \quad \gamma = \frac{b(0)}{a(0)}.$$

Продольная компонента $\mathbf{u}_a$ при удалении от границы затухает по закону $\exp(-kz\sqrt{1-\gamma^2})$, как волна Релея. Глубина проникновения поперечной волны значительно больше глубины проникновения продольной волны и равна

$$h_p = \frac{\zeta_p}{k^{2/3}\psi 2^{1/3}}, \quad v(-\zeta_p) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

При $z > h_p$ затухание поперечной волны происходит по экспоненциальному закону

$$v(x) \sim \frac{1}{2}x^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad x \to \infty.$$

Для волн вертикальной поляризации типа волн шепчущей галереи вектор поперечных смещений $\mathbf{u}_b$ определяет сосредоточенные вблизи границы волны. Они осциллируют в слое $O(\omega^{-2/3})$ по z подобно волнам Лява. Однако смещение частиц внутри тела в SV волнах происходит параллельно плоскости (x, z).

Аналогично можно исследовать поведение SV-волн соскальзывания и поверхностных волн для сред с постоянной скоростью.

Отраженные и преломленные SV-волны обладают всеми свойствами, характерными для SV-волн, набегающих на линию разрыва упругих параметров $x = 0$, $z \geqslant 0$. Дифракция от линии разрыва проявляется в наличии у коэффициентов отражения и преломления скачков упругих параметров сред Ω_1 и Ω_2. Эти коэффициенты связаны с различными свойствами сред при контакте на линии разрыва. В амплитуде преломленной волны присутствует коэффициент трансформации, зависящий от типа поверхностных волн.

В данной работе исследуются поверхностные SV-волны шепчущей галереи, волны соскальзывания и волны, распространяющиеся в упругих средах с постоянной поперечной скоростью.

1. Нахождение волнового поля от точечного источника

Пусть упругая полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $z \geqslant 0$ разделена вертикальной линией $x = 0$ на две области Ω_1 и Ω_2. Область $\Omega_1 = \{x \leqslant 0, z \geqslant 0\}$ есть упругая среда с параметрами Ламе $\lambda_1(z)$, $\mu_1(z)$ и плотностью $\rho_1(z)$. Соответственно область $\Omega_2 = \{x \leqslant 0, z \geqslant 0\}$ имеет упругие параметры $\lambda_2(z)$, $\mu_2(z)$ и $\rho_2(z)$. В точке $(-x_0, z=0), x_0 > 0$ области Ω_1 помещен точечный источник.

На линии $x = 0$, $z \geqslant 0$ раздела сред Ω_1 и Ω_2 заданы условия жесткого контакта и происходит скачок упругих параметров.

Пусть со стороны полупространства $x < 0$ (со стороны среды Ω_1) набегает SV-волна, излучаемая точечным источником с координатами $(-x_0, z_0)$, $x_0 > 0$, $z_0=0$.

По заданному падающему полю SV-волны $\mathbf{u}(x, z) = (u, 0, w)$ отыскиваются отраженное (в среде Ω_1) и преломленное (в среде Ω_2) волновые поля, той же поляризации. Среды Ω_i, $i=1, 2$, предполагаются либо однородными, т.е. с постоянными, но различными скоростями распространения волн в них, либо градиентными с положительными (с отрицательными) изменениями градиентов скоростей.

Исследуются приповерхностные волны ($z \geqslant 0$), т.е. волны, существенно отличные от нуля в слое вблизи границы $z = 0$ и убывающие при удалении от этого слоя. В неоднородной среде с положительным (соответственно, с отрицательным) изменением градиента скорости в слое по z порядка $O(k^{-2/3})$ распространяются известные волны шепчущей галереи (соответственно, волны соскальзывания). В однородной среде существуют волны, осциллирующие вблизи поверхности $z = 0$ в слое по z порядка $O(k^{-1})$.

Будем рассматривать три случая поведения поперечной скорости $b_j(z)$ вблизи границы полупространства. Скорость $b_j(z)$ может возрастать с ростом z, т.е. $(b_j)'_z = \frac{\partial b_j}{\partial z} > 0$, $j = 1, 2$, для $z > 0$, может убывать с ростом z, $(b_j)'_z = \frac{\partial b_j}{\partial z} < 0$, и, наконец, поперечная скорость является постоянной величиной $(b_j)'_z = \frac{\partial b_j}{\partial z} = 0$, $j = 1, 2$, при $z > 0$. Скорость продольных волн $a_j(z) = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j}$ меняется произвольно.

Падающее на границу раздела областей Ω_1 и Ω_2 волновое поле $\mathbf{u}^{\text{inc}} = (u^{\text{inc}}, 0, w^{\text{inc}})$ есть решение следующей задачи при $z > 0$, $x < 0$

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu u_{zz} + (\lambda + \mu)w_{xz} + \rho\omega^2 u + \mu_z(w_x + u_z) = 0, \quad (1.1)$$

$$(\lambda+\mu)u_{xz}+\mu w_{xx}+(\lambda+2\mu)w_{zz}+\rho\omega^2 w+\lambda_z(u_x+w_z)+2\mu_z w_z = 0, \quad (1.2)$$

с граничными условиями на линии $z = 0$:

$$\sigma_{xz} \equiv \mu(u_z + w_x)|_{z=0} = -\delta(x + x_0), \quad x + x_0 > 0, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{zz} \equiv (\lambda + 2\mu)w_z + \lambda u_x|_{z=0} = 0. \quad (1.4)$$

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.4) следует добавить условие излучения $\mathbf{u}$ при $r = \sqrt{(x + x_0)^2 + z^2} \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - ik\mathbf{u}\right) = 0, \quad k = \frac{\omega}{b(0)}. \quad (1.5)$$

Решение $\mathbf{u}$ задачи (1.1)–(1.5) будем искать в виде (см. [6])

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_b + u_a \\ w_b + w_a \end{pmatrix} = e^{ikx} \begin{pmatrix} U_b + U_a\, e^{-kz\sqrt{1-\gamma^2}} \\ W_b + W_a\, e^{-kz\sqrt{1-\gamma^2}} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где $\gamma = b(0)/a(0)$.

Найдем лишь главные слагаемые в асимптотическом разложении вектора смещений $\mathbf{u} = (u, 0, w)$

$$U = \sum_{l=0} \frac{U^l}{k^{l/3}}, \quad W = \sum_{l=0} \frac{W^l}{k^{l/3}}. \quad (1.7)$$

Для упругих SV-волн рассмотрим простейшие варианты изменения поперечных скоростей $b_i(z)$ при возрастании $z > 0$ с глубиной в областях Ω_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{llll} U_1: & b_1 = \text{const}; & U_2: & b_2 = \text{const}; \\ W_1: & \dfrac{\partial b_1}{\partial z} > 0; & W_2: & \dfrac{\partial b_2}{\partial z} > 0; \\ C_1: & \dfrac{\partial b_1}{\partial z} < 0; & C_2: & \dfrac{\partial b_2}{\partial z} < 0. \end{array} \quad (1.8)$$

Здесь введены обозначения упругих сред, соответствующие первым буквам английских слов: U – однородный (Uniform), W – волны шепчущей галереи (Whispering gallery waves), C – волны соскальзывания (Creeping waves).

В пункте 3 рассмотрим случай волн шепчущей галереи W_1, набегающих из среды Ω_1 на вертикальную границу раздела с однородной U_2 средой Ω_2. Обозначим это так: $W_1 \to U_2$. Кроме этого случая рассмотрим еще три варианта: $U_1 \to U_2$, $W_1 \to W_2$ и $C_1 \to C_2$. Всего можно рассмотреть девять вариантов.

Если скорость распространения волн в среде растет с глубиной, то лучи, выходящие из излучателя под малым углом скольжения, распространяются путем многократных отражений от поверхности. Вблизи гладкой поверхности лучи удерживаются в пределах поверхностного волновода (канала) и обуславливают волноводное распространение. В этом случае несправедлив традиционный лучевой (геометрооптический) подход к решению задачи. Поле в областях интерференции поверхностных волн наиболее полно описывается в рамках метода параболического уравнения Леонтовича–Фока [1–3].

Следуя методу параболического уравнения, введем растянутые координаты:

$$\nu_j = \psi_j k_j^{2/3} 2^{1/3} z > 0, \quad \sigma_j = \psi_j^2 k_j^{1/3} 2^{-1/3} x,$$

$$\sigma_0 = \psi_1^2 k_1^{1/3} 2^{-1/3} x_0, \quad k_j = \frac{\omega}{b_j(0)} \quad j = 1, 2, \tag{1.9}$$

причем в однородной среде $\psi_U = 1$. Для неоднородных сред величина ψ определена следующими выражениями

$$\psi_W^3 = \frac{b'_z(0)}{b(0)} > 0, \quad \psi_C^3 = \frac{-b'_z(0)}{b(0)} > 0. \tag{1.10}$$

Для волн типа SV из уравнений (1.1)–(1.5) имеем серию соотношений, связывающих компоненты вектора смещений друг с другом:

$$W_b^0 \neq 0, \quad U_b^0 = 0, \quad U_a^0 = W_a^0 = 0, \quad U_b = ik^{-1}\frac{\partial W_b}{\partial z} = i\,\frac{\psi\, 2^{1/3}}{k^{1/3}}\,\frac{\partial W_b}{\partial \nu},$$

$$W_a = i\sqrt{1-\gamma^2}U_a, \ \frac{\partial U_a^0}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^0}{\partial \nu} = 0, \ \frac{\partial U_a^1}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^1}{\partial \nu} = 0. \tag{1.11}$$

Из граничных условий (1.3)–(1.4) для этих же компонент получим

$$W_b^0\big|_{z=0} = i\frac{\delta(x+x_0)}{\mu\, k}; \quad U_a^1\big|_{z=0} = -2U_b^1\big|_{z=0} = \frac{-i\,2}{k^{2/3}}\,\frac{\partial W_b^0}{\partial z}\Big|_{z=0};$$

$$W_b^1|_{z=0} = -2W_a^1|_{z=0}$$
$$= -2i\sqrt{1-\gamma^2}\,U_a^1|_{z=0} = \frac{-4\sqrt{1-\gamma^2}}{k^{2/3}}\frac{\partial W_b^0}{\partial z}\Big|_{z=0}. \quad (1.12)$$

Итак, все составляющие U_a, W_a, U_b, W_b (см. формулу (1.6)) определяются через одну W_b^0.

В случае неоднородного полупространства с минимумом скорости на поверхности для функции W_b^0 имеем задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Big(i\frac{\partial W_b^0}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial\nu^2} - \nu W_b^0\Big) + O(k^{-2/3}) = 0, \quad \sigma<0,\ \nu>0;\\ &W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma+\sigma_0)\frac{\psi^2}{\mu\, k^{2/3}\, 2^{1/3}}; \quad W_b^0 \underset{\substack{\nu\to\infty\\ \sigma\to\infty}}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Для упругого полупространства с максимумом скорости на поверхности функция W_b^0 удовлетворяет следующей задаче

$$\left.\begin{aligned} &\big(i\frac{\partial W_b^0}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial\nu^2} + \nu W_b^0\big) + O(k^{-2/3}) = 0, \quad \sigma<0,\ \nu>0;\\ &W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma+\sigma_0)\frac{\psi^2}{\mu\, k^{2/3}\, 2^{1/3}}; \quad W_b^0 \underset{\substack{\nu\to\infty\\ \sigma\to\infty}}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

В однородном полупространстве соответствующая задача запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\big(i\frac{\partial W_b^0}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial\nu^2}\big) + O(k^{-2/3}) = 0, \quad \sigma<0,\ \nu>0;\\ &W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma+\sigma_0)\frac{1}{\mu\, k^{2/3}\, 2^{1/3}}; \quad W_b^0 \underset{\substack{\nu\to\infty\\ \sigma\to\infty}}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.15)$$

Вектор смещений падающей SV-волны равен

$$\mathbf{u}^{\rm inc} = \begin{pmatrix} u^{\rm inc}\\ w^{\rm inc}\end{pmatrix} = e^{ik_1x}\begin{pmatrix} U_b^{\rm inc} + U_a^{\rm inc}e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\\ W_b^{\rm inc} + W_a^{\rm inc}e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\end{pmatrix} = \quad (1.16)$$

$$e^{ik_1x}\begin{pmatrix} ik_1^{-1}\frac{\partial W_b^{0,\rm inc}}{\partial z}\Big[1-2e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}} + O(k_1^{-1/3})\Big]\\ W_b^{0,\rm inc} - 2k_1^{-1}\sqrt{1-\gamma_1^2}\frac{\partial W_b^{0,\rm inc}}{\partial z}\Big[2-e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}} + O(k_1^{-1/3})\Big]\end{pmatrix},$$

где неизвестна одна составляющая $W_b^{0,\rm inc}$.

Для трех вариантов изменения поперечных скоростей (1.8) найдем вектор смещений $\mathbf{u}^{\rm inc} = (u^{\rm inc}, 0, w^{\rm inc})$ падающего поля. Вертикальная составляющая $w_b^{0,\rm inc} = e^{ik_1x}W_b^{0,\rm inc}$ является асимптотически главной составляющей для SV поляризованной волны. На границе полупространства $z = 0$ составляющая $W_b^{0,\rm inc}$ равна нулю (выполнено краевое условие Дирихле).

Приведем выражения для составляющей $w_b^{\rm inc}$ в случае трех вариантов скоростей.

$\mathbf{U}_1$: Из однородной упругой среды Ω_1 набегает приповерхностная волна вида

$$w_{U_1,b}^{\rm inc}(x,z,k_1) = \frac{z\, e^{i\,\pi/4} e^{i\,k_1\,(x+x_0)} e^{i\,k_1\,\frac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\mu_1\,(x+x_0)\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}\Big(1+O(k_1^{-1})\Big)$$

$$= e^{i\,k_1\,x}W_{U_1,b}^{0,\rm inc}\Big(1+O(k_1^{-1})\Big). \qquad (1.17)$$

В координатах σ_1 и ν_1 функция $W_{U_1,b}^{0,\rm inc}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом

$$W_{U_1,b}^{0,\rm inc}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{\nu_1\, e^{i\,\pi/4} e^{ik_1x_0} e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{2\mu_1\sqrt{\pi(\sigma_1+\sigma_0)^3}\,2^{1/3}\,k_1^{2/3}}\Big(1+O\big(k_1^{-1/3}\big)\Big) =$$

$$= \mathcal{A}_{U_1}^{\rm inc}\frac{\nu_1 e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}, \quad \mathcal{A}_{U_1}^{\rm inc} = \frac{e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2^{4/3}k_1^{2/3}\,\mu_1\sqrt{\pi}}. \qquad (1.18)$$

Отметим, что имеет место предельная формула

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-i\,\pi/4}e^{i\,\frac{\nu^2}{4\,\sigma}}}{2\sqrt{\pi\,\sigma}} = \delta(\nu).$$

$\mathbf{W}_1$: В этом случае из среды Ω_1 на линию раздела $x = 0$ набегает волна шепчущей галереи номера p, $p = 1, 2, \ldots,$

$$w_{W_1,bp}^{0,\rm inc}(x,z,k_1) = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\mu_1 2^{1/3}k_1^{2/3}}e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p}\frac{v(-\zeta_p+\nu_1)}{v'(-\zeta_p)}$$

$$= e^{ik_1x}W_{W_1,p}^{0,\rm inc} = e^{ik_1x}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\rm inc}e^{-i\sigma_1\zeta_p}v(-\zeta_p+\nu_1), \qquad (1.19)$$

причем $v(-\zeta_p)=0$, а коэффициент $\mathcal{A}^{\text{inc}}_{W_1,p}$ равен

$$\mathcal{A}^{\text{inc}}_{W_1,p}=\frac{-\psi_1^2\,e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\mu_1 2^{1/3}k_1^{2/3}v'(-\zeta_p)}. \tag{1.20}$$

$\mathbf{C_1}$: Если рассматривать случай максимума скорости на границе $z=0$, то на линию раздела $x=0$ из среды Ω_1 набегает волна соскальзывания номера q, удовлетворяющая условию Дирихле на границе $z=0$. Ее вертикальная компонента $w_b^0\neq 0$ при $z>0$ определена выражением

$$w_{bq}^{0,\text{inc}}(x,z,k_1)=\frac{-\psi_1^2\,e^{ik_1(x+x_0)}}{\mu_1 2^{1/3}k_1^{2/3}}e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q}\frac{w_1(\xi_q-\nu_1)}{w_1'(\xi_q)} \tag{1.21}$$

$$=e^{ik_1x}W_q^{0,\text{inc}}=e^{ik_1x}\mathcal{A}^{\text{inc}}_{C_1,q}e^{i\sigma_1\xi_q}w_1(\xi_q-\nu_1),\quad \arg(\xi_q-\nu_1)=\pi/3.$$

Здесь $w_1(\xi_q)=0$, коэффициент $\mathcal{A}^{\text{inc}}_{C_1,q}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{A}^{\text{inc}}_{C_1,q}=\frac{-\psi_1^2\,e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_q}}{\mu_1 2^{1/3}k_1^{2/3}w_1'(\xi_q)}. \tag{1.22}$$

Заметим, что в главном приближении достаточно рассмотреть лишь первый корень функции $w_1(\xi_1)$, так как все корни ξ_q имеют положительный аргумент $\arg\xi_q=\pi/3$, а модули этих корней растут с ростом номера q. Решение (1.21) при $q=1$ экспоненциально убывает медленнее, чем для $q>1$.

Первые, неравные нулю компоненты $U_b^{1,\text{inc}}$, $U_a^{1,\text{inc}}$, и $W_a^{1,\text{inc}}$ вектора смещений (1.6) для $z\geqslant 0$ найдем по формулам (1.11)–(1.12) или (1.16).

2. Нахождение отраженного и преломленного полей

В предыдущем пункте в области Ω_1 найдено волновое поле, излучаемое точечным источником в точке $(-x_0,0)$, $x_0>0$, и набегающее на вертикальную границу раздела $x=0$, $z\geqslant 0$.

Функция $W=W_b^0$ при $x<0$ является асимптотическим решением одного из уравнений Леонтовича–Фока (1.13)–(1.15). Однако $W=W_b^0$ перестает быть решением уравнений (1.13)–(1.15) при $x>0$, так как скорость изменяется скачком при $x=0$.

Сделаем естественное предположение, что решение W, удовлетворяющее уравнениям Леонтовича–Фока (1.13)–(1.15) при $x < 0$, будет удовлетворять аналогичным уравнениям и при $x > 0$.

В дальнейшем покажем, что это предположение позволит найти решение, асимптотически (при $k_j \to \infty$, $j = 1, 2$) удовлетворяющее всем условиям задачи.

На границе раздела упругих сред $x = 0$, $z \geqslant 0$ выполняютя условия жесткого контакта

$$[\mathbf{u}]|_{x=0} = 0, \quad [\sigma_{xx} \equiv (\lambda{+}2\mu)u_x + \lambda w_z]|_{x=0} = 0, \\ [\sigma_{xz} \equiv \mu(u_z + w_x)]|_{x=0} = 0. \tag{2.1}$$

Пусть вектор смещений волны $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$, падающей на границу раздела, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.5) и может быть представлен формулой (1.16).

Будем искать отраженное и преломленное поля в виде

$$\mathbf{u}_1 = e^{ik_1x}\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} + e^{-ik_1x}\mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}, \quad x < 0, \\ \mathbf{u}_2 = e^{ik_2x}\mathcal{T}\mathbf{u}^{\mathrm{tr}}, \quad x > 0. \tag{2.2}$$

В формулах (2.2) неизвестные матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ определим из условий сопряжения на вертикальной линии $x = 0$ векторов смещений и тензоров напряжений:

$$[\mathbf{u}]|_{x=0} = 0, \quad [\sigma_{xx}]|_{x=0} = 0, \quad [\sigma_{xz}]|_{x=0} = 0.$$

Найдем из условий (2.1) выражения для матриц

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix}.$$

Проведя достаточно громоздкие выкладки, получим следующие результаты

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21} = \mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{21} = 0;$$

$$\mathcal{R}_{22} = \frac{\mu_1(z)\,k_1 - \mu_2(z)\,k_2}{\mu_1(z)\,k_1 + \mu_2(z)\,k_2}; \quad \mathcal{T}_{22} = \frac{2\mu_1(z)\,k_1}{\mu_1(z)\,k_1 + \mu_2(z)\,k_2};$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 - [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2} + \\ + \frac{-2\lambda_1(z)k_1 + [k_1\lambda_1(z) + k_2\lambda_2(z)]\mathcal{T}_{22}}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2} = \mathcal{R}_{22};$$

$$\mathcal{T}_{11} = \frac{2[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2} +$$

$$+ \frac{-2\lambda_1(z)k_1 + [k_1\lambda_1(z) + k_2\lambda_2(z)]\mathcal{T}_{22}}{[\lambda_1(z) + 2\mu_1(z)]k_1 + [\lambda_2(z) + 2\mu_2(z)]k_2} = \mathcal{T}_{22}. \qquad (2.3)$$

Матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ являются диагональными, а их компоненты отражения $\mathcal{R}_{22}$ и преломления $\mathcal{T}_{22}$ получаются такими же, как и в случае нормального падения волны на линию раздела $x = 0$. Это не удивительно, так как определяющей компонентой для SV-волны является вертикальная составляющая поперечного вектора $w_{1,b}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1 x} W_{1,b}^{\mathrm{inc}}$. Простые преобразования компонент отражения $\mathcal{R}_{11}$ и преломления $\mathcal{T}_{11}$ показывают, что $\mathcal{R}_{11} = \mathcal{R}_{22}$, а $\mathcal{T}_{11} = \mathcal{T}_{22}$. Составляющие вектора поперечных смещений преобразуются на линии раздела по формуле

$$\mathbf{u}_1\Big|_{x=0} = \mathbf{u}_2\Big|_{x=0}; \quad \begin{pmatrix} U_1^{\mathrm{inc}} \\ W_1^{\mathrm{inc}} \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{22} \begin{pmatrix} U_1^{\mathrm{ref}} \\ W_1^{\mathrm{ref}} \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{22} \begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{tr}} \\ W_2^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Начальные данные для вертикальных компонент вектора поперечных смещений на линии $x = 0$ следует выбрать такими

$$W_1^{\mathrm{ref}}|_{x=0} = W_2^{\mathrm{tr}}|_{x=0} = W_1^{\mathrm{inc}}|_{x=0}. \qquad (2.5)$$

Функция W_2^{tr}, как и функция W_1^{inc} являются решением параболических уравнений Леонтовича–Фока (1.13)–(1.15).

Для отраженного и преломленного полей достаточно найти компоненты W_b^{ref} и W_b^{tr}, зная компоненты падающего поля W_b^{inc}. Это превращает векторную задачу для SV-волн в скалярную.

Преломленное волновое поле W_2^{tr} в области $x > 0$, $z > 0$, является решением смешанной начально-краевой задачи

$$\left.\begin{array}{lll} L_2\, W_2^{\mathrm{tr}} = 0, & \sigma_2 > 0, & \nu_2 > 0, \\ W_2^{\mathrm{tr}} = 0, & \sigma_2 > 0, & \nu_2 = 0, \\ W_2^{\mathrm{tr}} = W_1^{\mathrm{inc}}, & \sigma_2 = 0, & \nu_2 > 0, \\ W_2^{\mathrm{tr}} \to 0, & \sigma_2 \to \infty, & \nu_2 \to \infty. \end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

Оператор L_2 определен формулами (1.13)–(1.15):

$$L_2 = i\frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu_2^2} + \varkappa \nu_2, \quad \varkappa = \begin{cases} 0 & \text{в среде } U_2 \\ -1 & \text{в среде } W_2 \\ 1 & \text{в среде } C_2. \end{cases}$$

Здесь коэффициент $\varkappa$ принимает три значения в соответствии с вариантами изменения поперечной скорости в среде. Так для сред U_2 коэффициент $\varkappa = 0$, в средах W_2 значение $\varkappa = -1$. Наконец, в средах C_2, соответствующих скоростям с отрицательным градиентом, этот коэффициент $\varkappa = 1$.

Отраженное поле W_1^{ref} в области Ω_1 является решением задачи:

$$\left.\begin{aligned} L_1\, W_1^{\text{ref}} &= 0, && \sigma_1 < 0, && \nu_1 > 0,\\ W_1^{\text{ref}} &= 0, && \sigma_1 < 0, && \nu_1 = 0,\\ W_1^{\text{ref}} &= W_1^{\text{inc}}, && \sigma_1 = 0, && \nu_1 > 0,\\ W_1^{\text{ref}} &\to 0, && \sigma_1 \to \infty, && \nu_1 \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где

$$L_1 = -i\frac{\partial}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2} + \varkappa\nu_1, \qquad \varkappa = \begin{cases} 0, & \text{в среде } U_1\\ -1, & \text{в среде } W_1\\ 1, & \text{в среде } C_1. \end{cases}$$

Решение этих задач найдем с помощью соответствующих функций Грина $G_j(\sigma_j, \nu_j; \sigma_j', \nu_j')$:

$$W_1^{\text{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = \int\limits_0^\infty (-i) W_1^{\text{inc}}(\sigma_1' = 0, \nu_1') G_1(-\sigma_1, \nu_1; \sigma_1' = 0, \nu_1')\, d\nu_1', \tag{2.8}$$

$$W_2^{\text{tr}}(\sigma_2, \nu_2) = \int\limits_0^\infty i W_1^{\text{inc}}(\sigma_2' = 0, \nu_2') G_2(\sigma_2, \nu_2; \sigma_2' = 0, \nu_2')\, d\nu_2'. \tag{2.9}$$

Функция Грина удовлетворяет уравнениям Леонтовича–Фока (1.13)–(1.15)

$$L_j G(\sigma_j, \nu_j; \sigma_j', \nu_j') = -\delta(\sigma_j - \sigma_j')\delta(\nu_j - \nu_j'), \quad j = 1, 2, \tag{2.10}$$

однородному условию Дирихле на границе $z = 0$ и убывает по закону (1.5).

Выпишем функции Грина для рассматриваемых вариантов (1.8) скоростей распространения в средах Ω_j, $j = 1, 2$.

В средах U_j с постоянной скоростью распространения функции Грина G_{U_j}, $j = 1, 2$, имеют следующий вид

$$G_{U_j}(\sigma_j, \nu_j; 0, \nu_j') = \frac{e^{i3\pi/4}}{2\sqrt{\pi\sigma_j}}\left[e^{\frac{i(\nu_j - \nu_j')^2}{4\sigma_j}} - e^{\frac{i(\nu_j + \nu_j')^2}{4\sigma_j}}\right]. \tag{2.11}$$

Для соответствующих функций Грина в средах W_j получаем выражение

$$G_{W_j}(\sigma_j,\nu_j;0,\nu_j') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i\sigma_j\zeta}\left[\frac{v(\zeta+\nu_{j>})}{v(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta+\nu_{j>})}{w_2(\zeta)}\right]\times$$

$$\times[w_2(\zeta+\nu_{j<})v(\zeta) - v(\zeta+\nu_{j<})w_2(\zeta)]d\zeta, \quad \nu_j \geqslant 0, \quad \nu_j' \geqslant 0. \quad (2.12)$$

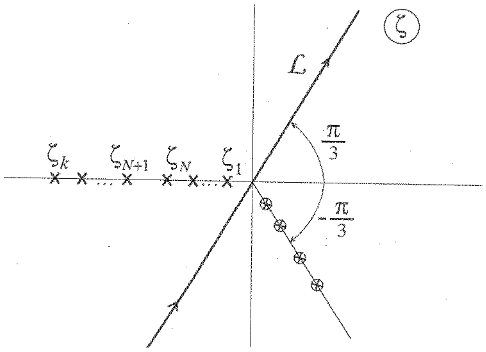

Рис. 1.

В формуле (2.12) контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

В случае, когда на границе полупространства скорость в среде имеет максимальное значение и когда величина ψ_{C_j} равна

$$\psi_{C_j}^3 = -\frac{b_j{}'_z(0)}{b_j(0)} > 0, \quad \nu_j > 0,$$

функции Грина, удовлетворяющие условию Дирихле, имеют следующие интегральные представления

$$G_{C_j}(\sigma_j,\nu_j;0,\nu_j') = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\infty e^{i(\pi-\delta)}}^{\infty e^{i\varepsilon}} e^{i\sigma_j\xi}\left[\frac{w_1(\xi-\nu_{j>})}{w_1(\xi)}\right]\times$$

$$\times[w_2(\xi-\nu_{j<})w_1(\xi) - w_1(\xi-\nu_{j<})w_2(\xi)]d\xi, \quad \nu_j \geqslant 0, \quad \nu_j' \geqslant 0. \ (2.13)$$

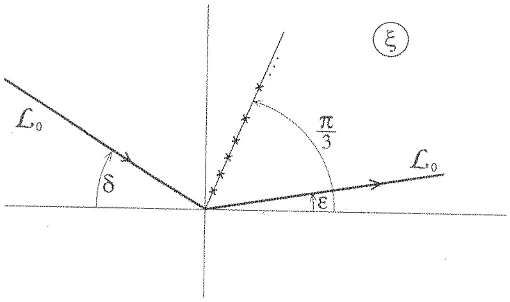

Рис. 2.

Контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}_0$ на рис. 2.

В области Ω_1 найдено волновое поле $w_1^{\rm inc} = e^{ik_1x}W_1^{\rm inc}$, набегающее на вертикальную границу раздела $x = 0$, $z \geqslant 0$. В зависимости от вариантов изменения скоростей (1.8), выражение для падающего на границу раздела поля имеет различный вид (1.17)–(1.18), (1.19)–(1.20), (1.21)–(1.22).

3. Частные случаи нахождения отраженного и преломленного полей

Перейдем к нахождению функций $W_1^{\rm ref}, W_2^{\rm tr}$, определенных формулами (2.8)–(2.9). Для этого используем найденные нами функции Грина (2.11)–(2.13) и решения $W_1^{\rm inc}$ для рассматриваемых случаев изменения скоростей (1.8). Всего можно рассмотреть девять вариантов.

Здесь будут рассмотрены четыре варианта: $W_1 \to U_2$, $C_1 \to C_2$, $W_1 \to W_2$ и $U_1 \to U_2$. Перейдем к решению этих задач.

3.1. Преобразование волны шепчущей галереи в однородную волну: $W_1 \to U_2$

Исследуем сначала задачу об отражении и преломлении волны шепчущей галереи, набегающей на границу раздела с однородной средой Ω_2. В среде Ω_1 скорость имеет минимум на границе полупространства $z = 0$.

Пусть на вертикальную границу, разделяющую область с положительным изменением градиента скорости и область с постоянной скоростью, набегает p-я волна шепчущей галереи SV поляризации:

$$w_{b,p}^{0,\rm inc}(x,z,k_1) = e^{ik_1x}W_{b,p}^{0,\rm inc} = e^{ik_1x}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\rm inc}e^{-i\sigma_1\zeta_p}v(-\zeta_p+\nu_1),$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, \quad \mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0} e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}.$$

Для преломленной волны формула (2.9) дает следующее выражение

$$W^{0,\rm tr}_{b,p}(\sigma_2,\nu_2) = \frac{e^{i\pi/4}\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}}{2\sqrt{\pi\sigma_2}} \int\limits_0^\infty v\bigg(-\zeta_p + \nu_2' \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}}\bigg) \times$$

$$\times \bigg[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}} - e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}} \bigg] d\nu_2', \quad \mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} = \frac{-\psi_1^2\, e^{ik_1x_0} e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}. \quad (3.1.1)$$

Обратимся к вычислению отраженного поля $w^{0,\rm ref}_{b,p}$. Оно отыскивается точно так же, как и преломленное поле. Падающее на вертикальную границу $x = 0$ поле шепчущей галереи $W^{\rm inc}_{W_1,p}$, номера p определено формулами (1.19)–(1.20). Тогда отраженное поле представляется в виде

$$w^{0,\rm ref}_{b,p} = e^{-ik_1x}\mathcal{R}_{22} W^{0,\rm ref}_{b,p}, \quad (3.1.2)$$

где

$$W^{0,\rm ref}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1) = \int\limits_0^\infty (-i)\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} v(-\zeta_p + \nu_1') G_{W_1}(-\sigma_1,\nu_1;\sigma_1' = 0,\nu_1') d\nu_1'. \quad (3.1.3)$$

Функция Грина в области Ω_1 выражается формулой (2.12), в которой контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

В формуле (3.1.3) поменяем порядок интегрирования и продеформируем контур $\mathcal{L}$ (см. рис. 1) в $\mathcal{L}_N$ так, что он будет охватывать отрицательную полуось $\operatorname{Re}\zeta < 0$, вместе с корнями функции Эйри номеров $n = 1, 2, \dots, N$, (см. рис. 3).

При таком преобразовании контура интегрирования $\mathcal{L}$ в контур $\mathcal{L}_N$, (см. рис. 3) из интеграла выделится конечная сумма собственных функций типа волн шепчущей галереи номеров $n = 1, 2, \dots, N$ так, что

$$W^{0,\rm ref}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1) = \sum_{n=1}^N W^{0,\rm ref}_{b,p,n}(\sigma_1,\nu_1) - \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\nu_1' \mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} v(-\zeta_p + \nu_1') \times$$

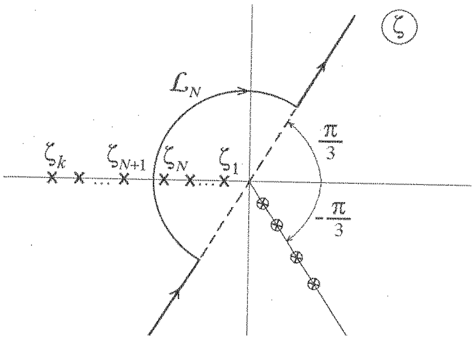

Рис. 3.

$$\times \int\limits_{L_N} e^{-i\sigma_1\zeta}\frac{v(\zeta+\nu_{1>})}{v(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{1<})w_2(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{1<})v(\zeta)]d\zeta. \quad (3.1.4)$$

Здесь

$$W^{0,\mathrm{ref}}_{b,p,n}(\sigma_1,\nu_1)=R_{pn}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}v(-\zeta_n+\nu_1)e^{i\sigma_1\zeta_n}.$$

Коэффициенты отражения R_{pn} имеют следующий вид

$$R_{pn} = \frac{-v'(-\zeta_n)w_2(-\zeta_n)}{[v'(-\zeta_n)]^2}\int\limits_0^\infty v(-\zeta_p+\nu_1')v(-\zeta_n+\nu_1')d\nu_1'=1. \quad (3.1.5)$$

Равенство (3.1.5) следует из условия ортогональности функций Эйри

$$\int\limits_0^\infty v(-\zeta_p+\nu_1')v(-\zeta_n+\nu_1')d\nu_1'=\begin{cases}0 & \text{для } p\neq n,\\ [v'(-\zeta_n)]^2 & \text{для } p=n,\end{cases}$$

причем вронскиан $W(v,w_2)$ равен

$$W(v,w_2)=v'(-\zeta_n)w_2(-\zeta_n)-w_2'(-\zeta_n)v(-\zeta_n)=v'(-\zeta_n)w_2(-\zeta_n)=-1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w^{0,\mathrm{ref}}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1)&=\mathcal{R}_{22}\,e^{-i\,k_1\,x}\,W^{0,\mathrm{inc}}_{b,p}(-\sigma_1,\nu_1)\\ &=\mathcal{R}_{22}e^{-ik_1x}\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}v(-\zeta_p+\nu_1)e^{i\sigma_1\zeta_p}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Мы ищем решение задачи (1.1)–(1.5) с условием (2.1) в виде (2.2):

$$\mathbf{u}_1 = e^{ik_1x}\mathbf{u}^{\rm inc} + e^{-ik_1x}\mathcal{R}\mathbf{u}^{\rm ref}, \quad x<0,$$

$$\mathbf{u}_2 = e^{ik_2x}\mathcal{T}\mathbf{u}^{\rm tr}, \quad x>0.$$

Вертикальная компонента w_{jb} вектора поперечных смещений $\mathbf{u}_j$ в областях Ω_j, $j=1,2$ является определяющей и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w^0_{1b} &= \sum_{p=1}(e^{ik_1x}\, W^{0,\rm inc}_{b,p} + e^{-ik_1x}\,\mathcal{R}_{22}\, W^{0,\rm ref}_{b,p}); \\ w^0_{2b} &= \sum_{p=1} e^{ik_2x}\,\mathcal{T}_{22}\, W^{0,\rm tr}_{b,p}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Вектора смещений отраженной $\mathbf{u}^{\rm ref}$ и преломленной $\mathbf{u}^{\rm tr}$ волн имеют тот же вид (1.16), что и падающее поле. Зная функции $W^{0,\rm ref}_{b,p}$ и $W^{0,\rm tr}_{b,p}$, вычислим $\frac{\partial W^{0,\rm ref}_{b,p}}{\partial z}$ и $\frac{\partial W^{0,\rm tr}_{b,p}}{\partial z}$. По формуле (1.16) получим все компоненты векторов смещений отраженной $\mathbf{u}^{\rm ref}$ и преломленной $\mathbf{u}^{\rm tr}$ волн.

Горизонтальные составляющие вектора поперечных смещений $\mathbf{u}_j$ $j=1,2$, равны

$$u_{1b,p} = e^{ik_1x}\, U^{\rm inc}_{b,p} + e^{-ik_1x}\mathcal{R}_{22}U^{\rm ref}_{b,p}; \quad u_{2b} = e^{ik_2x}\,\mathcal{T}_{22}\, U^{\rm tr}_{b,p}. \tag{3.1.8}$$

Коэффициенты матриц $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ определены формулами (2.3).

Функции $U^{\rm ref}_{b,p}$ и $U^{\rm tr}_{b,p}$ вычисляются по формуле (1.11) и запишутся в виде:

$$\begin{aligned} U^{\rm ref}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1) &= \frac{i\psi_1 2^{1/3}}{k_1^{1/3}}\frac{\partial W^{\rm inc}_{b,p}(-\sigma_1,\nu_1)}{\partial\nu_1} = \mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}e^{i\sigma_1\zeta_p}\frac{i\psi_1 2^{1/3}}{k_1^{1/3}}v'(-\zeta_p+\nu_1) \\ &= \frac{-i\psi_1^3 e^{ik_1x_0}e^{i(\sigma_1-\sigma_0)\zeta_p}}{\mu_1 k_1 v'(-\zeta_p)}v'(-\zeta_p+\nu_1), \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$U^{\rm tr}_{b,p}(\sigma_2,\nu_2) = \frac{i2^{1/3}}{k_2^{1/3}}\frac{\partial W^{\rm tr}_{b,p}(\sigma_2,\nu_2)}{\partial\nu_2} = \frac{-e^{i\pi/4}\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}}{2^{2/3}k_2^{1/3}2\sigma_2\sqrt{\pi\sigma_2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty v\Big(-\zeta_p+\nu_2'\alpha\Big)\Big[(\nu_2'-\nu_2)e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}}+(\nu_2'+\nu_2)e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\Big]d\nu_2', \tag{3.1.10}$$

где

$$\alpha = \alpha_{W_1 \to U_2} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}} = \frac{b_2^{2/3}(0)(b_1{}'_z(0))^{1/3}}{b_1(0)}.$$

Проведя интегрирование по частям, приведем составляющую $U_{b,p}^{\mathrm{tr}}$ (3.1.10) к виду:

$$U_{b,p}^{\mathrm{tr}} = \frac{e^{i\pi/4}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}}\alpha}{\sqrt{2\pi k_2 x}} \int\limits_0^\infty v'(-\zeta_p + \nu_2'\alpha)\left[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}} + e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\right] d\nu_2'. \quad (3.1.11)$$

На границе $z = 0$

$$U_{b,p}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, 0) = \frac{2e^{i\pi/4}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}}\alpha}{\sqrt{2\pi k_2 x}} \int\limits_0^\infty e^{\frac{i(\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\, v'(-\zeta_p + \alpha\nu_2') d\nu_2'. \quad (3.1.12)$$

Выпишем окончательный вид векторов $\mathbf{u}_j$ в задаче $W_1 \to U_2$.

$$\mathbf{u}_{1p}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1x}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}} e^{-i\sigma_1\zeta_p} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{i\psi_1 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} v'(\nu_1 - \zeta_p)\left(1 - 2e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right) \\ \left[v(\nu_1 - \zeta_p) - \frac{\psi_1 2^{4/3}}{k_1^{1/3}}\sqrt{1-\gamma_1^2}\, v'(\nu_1 - \zeta_p)\left(2 - e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right)\right] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}_{1p}^{\mathrm{ref}} = e^{-ik_1x}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}} e^{i\sigma_1\zeta_p} \times$$
$$\times \mathcal{R}_{22} \begin{pmatrix} \frac{i\psi_1 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} v'(\nu_1 - \zeta_p)\left(1 - 2e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right) \\ \left[v(\nu_1 - \zeta_p) - \frac{\psi_1 2^{4/3}}{k_1^{1/3}}\sqrt{1-\gamma_1^2}\, v'(\nu_1 - \zeta_p)\left(2 - e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right)\right] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}_{2p}^{\mathrm{ref}} = e^{ik_2x}\mathcal{T}_{22} \begin{pmatrix} U_{b,p}^{\mathrm{tr}}\left(1 - 2e^{-k_2 z\sqrt{1-\gamma_2^2}}\right) \\ \left[W_{b,p}^{\mathrm{tr}} + i\sqrt{1-\gamma_2^2}\, U_{b,p}^{\mathrm{tr}}\left(4 - 2\,e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_2^2}}\right)\right] \end{pmatrix}. \quad (3.1.13)$$

Входящие в формулы (3.1.13) коэффициенты диагональных матриц $\mathcal{R}_{22}$, $\mathcal{T}_{22}, j = 1, 2$ определены равенствами (2.3), а функции $W_{b,p}^{\mathrm{tr}}$ и $U_{b,p}^{\mathrm{tr}}$ получены в (3.1.1) и (3.1.11).

Очень важным показателем в сфере приложений служит значение вектора смещений падающего, отраженного и преломленного полей на самой границе полупространства $z = 0$. Приведем значение этих векторов при отражении и преломлении волны шепчущей галереи номера p от вертикальной границы раздела между средами Ω_1 и Ω_2 в случае $W_1 \to U_2$.

В среде Ω_1 по границе распространяются поверхностные волны шепчущей галереи номера p, падающие на границу раздела

$$\mathbf{u}_{1p}^{\mathrm{inc}}|_{z=0} = \frac{i\psi_1^3 e^{ik_1(x_0+x)} e^{-i(\sigma_0+\sigma_1)\zeta_p}}{\mu_1 k_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_1^2} \end{pmatrix}; \qquad (3.1.14)$$

и отраженные волны

$$\mathbf{u}_{1p}^{\mathrm{ref}}|_{z=0} = \frac{i\psi_1^3 e^{ik_1(x_0-x)} e^{-i(\sigma_0-\sigma_1)\zeta_p}}{\mu_1 k_1} \mathcal{R}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_1^2} \end{pmatrix}. \qquad (3.1.15)$$

В среде Ω_2 распространяются преломленные поверхностные волны

$$\mathbf{u}_{2p}^{\mathrm{tr}}|_{z=0} = -e^{ik_2 x} e^{ik_1 x_0} \frac{2e^{i\pi/4} \mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}} \alpha}{\sqrt{2\pi k_2 x}} \mathcal{T}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_2^2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{\frac{i(\nu_2')^2}{4\sigma_2}} v'(-\zeta_p + \alpha\nu_2') d\nu_2'. \qquad (3.1.16)$$

Здесь параметр α определен формулой

$$\alpha = \alpha_{W_1 \to U_2} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}} = \frac{b_2^{2/3}(b_1{}'_z(0))^{1/3}}{b_1(0)}.$$

3.2. Дифракция волны соскальзывания от линии раздела сред с отрицательным градиентным ростом скорости с глубиной: $C_1 \to C_2$

Пусть на вертикальную границу, разделяющую две области с отрицательным изменением градиента скорости, набегает волна соскальзывания SV-поляризации номера q. Вектор смещений $\mathbf{u}_q^{\mathrm{inc}}$ волны, набегающей на границу раздела $x = 0$ областей Ω_1 и Ω_2, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.5). Вертикальная компонента вектора поперечных смещений $w_b^0 \neq 0$ для значений $z > 0$ определена выражением

$$w_{b,q}^{0,\mathrm{inc}}(x,z,k_1) = \frac{\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3}} e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q} \frac{w_1(\xi_q - \nu_1)}{w_1'(\xi_q)}$$

$$= e^{ik_1 x} W_{b,q}^{0,\mathrm{inc}} = e^{ik_1 x} \mathcal{A}_{C_1,q}^{\mathrm{inc}} e^{i\sigma_1 \xi_q} w_1(\xi_q - \nu_1), \qquad (3.2.1)$$

причем $w_1(\xi_q) = 0$, а коэффициент $\mathcal{A}_{C_1,q}^{\mathrm{inc}}$ равен

$$\mathcal{A}_{C_1,q}^{\mathrm{inc}} = \frac{\psi_1^2\, e^{ik_1 x_0} e^{i\sigma_0 \xi_q}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3} w_1'(\xi_q)}, \quad \arg(\xi_q - \nu_1) = \pi/3. \qquad (3.2.2)$$

Заметим, что в главном приближении достаточно рассмотреть лишь первый корень функции $w_1(\xi_1)$.

Вертикальная компонента w_{jb} вектора поперечных смещений $\mathbf{u}_j$ в области Ω_j является определяющей и имеет следующий вид:

$$w_{1b,q}^0 = e^{ik_1 x}\, W_{b,q}^{\mathrm{inc}} + e^{-ik_1 x}\, \mathcal{R}_{22}\, W_{b,q}^{\mathrm{ref}}; \quad w_{2b,q}^0 = e^{ik_2 x}\, \mathcal{T}_{22}\, W_{b,q}^{\mathrm{tr}}. \quad (3.2.3)$$

Горизонтальные составляющие вектора поперечных смещений $\mathbf{u}_j$, $j = 1, 2$ равны

$$u_{1b,q} = e^{ik_1 x}\, U_{b,q}^{\mathrm{inc}} + e^{-ik_1 x} \mathcal{R}_{11} U_{b,q}^{\mathrm{ref}}; \quad u_{2b,q} = e^{ik_2 x}\, \mathcal{T}_{11}\, U_{b,q}^{\mathrm{tr}}. \quad (3.2.4)$$

Коэффициенты $\mathcal{T}_{11} = \mathcal{T}_{22}$ и $\mathcal{R}_{11} = \mathcal{R}_{22}$ определены формулами (2.3).

Составляющая $U_{b,q}^{\mathrm{inc}}$ равна следующему выражению

$$U_{b,q=1}^{\mathrm{inc}} = \frac{i\,\psi_1\, 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} e^{i\sigma_1 \xi_q} \frac{\partial W_{b,q}^{\mathrm{inc}}}{\partial \nu_1} = \frac{-i\psi_1^3\, e^{ik_1 x_0}}{\mu_1\, k_1} e^{i(\sigma_1 + \sigma_0)\xi_q} \frac{w_1'(\xi_q - \nu_1)}{w_1'(\xi_q)} =$$

$$= \frac{-i\,\psi_1\, 2^{1/3} \mathcal{A}_{C_1,q}^{\mathrm{inc}}}{k_1^{1/3}} e^{i\sigma_1 \xi_q} w_1'(\xi_q - \nu_1). \qquad (3.2.5)$$

На границе $z = 0$ функция $w_{b,q}^{1,\mathrm{inc}}$ равна

$$\frac{w_{b,q}^{1,\mathrm{inc}}}{k_1^{1/3}} = e^{ik_1 x} 4\, i \sqrt{1 - \gamma_1^2}\, U_{b,q}^{\mathrm{inc}}. \qquad (3.2.6)$$

Горизонтальная $u_{a,q}^{1,\mathrm{inc}}$ и вертикальная $w_{a,q}^{1,\mathrm{inc}}$ компоненты вектора продольных смещений $\mathbf{u}_{a,q}$ падающей SV-волны удовлетворяют соотношениям (1.11)–(1.12).

Следовательно, вектор падающей волны соскальзывания $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ равен

$$\mathbf{u}_{1q}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1 x} \begin{pmatrix} U_{b,q}^{\mathrm{inc}} \left(1 - 2e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right) \\ W_{b,q}^{\mathrm{inc}} + i\sqrt{1-\gamma_1^2} U_{b,q}^{\mathrm{inc}} \left(4 - 2e^{-k_1 z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right) \end{pmatrix}. \qquad (3.2.7)$$

Далее, действуя по схеме пункта 3.1, для функции $W^{\mathrm{tr}}_{b,q,p}$ получаем

$$W^{\mathrm{tr}}_{b,q,P}(\sigma_2,\nu_2) = \\ = \sum_{p=1}^{P} W^{\mathrm{tr}}_{b,q,p}(\sigma_2,\nu_2) - \frac{i}{4\pi}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} d\nu_2' \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{C_1,q} w(\xi_q - \frac{k_1^{2/3}(-\psi_1)}{k_2^{2/3}(-\psi_2)}\nu_2')\times$$

$$\times \int\limits_{L_0^1} e^{i\sigma_2\xi}\frac{w_1(\xi-\nu_{2>})}{w_1(\xi)}[w_2(\xi-\nu_{2<})w_1(\xi) - w_1(\xi-\nu_{2<})w_2(\xi)]d\xi. \quad (3.2.8)$$

Контур интегрирования продеформирован из контура $\mathcal{L}_0$ (см. рис. 2) в контур $\mathcal{L}_0^1$, охватывающий полуось $\arg\xi = \pi/3$, начиная со $P+1$-го корня производной функции Эйри w_1. Здесь

$$W^{\mathrm{tr}}_{b,q,p}(\sigma_2,\nu_2) = \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{C_1,q} T_{q,p} w_1(\xi_p - \nu_2)e^{i\sigma_2\xi_1}. \quad (3.2.9)$$

Коэффициент трансформации $T_{q,p}$ в случае $C_1 \to C_2$, когда в средах Ω_1 и Ω_2 скорость имеет максимум на границе полупространства, находится по формуле:

$$T_{q,p} = \frac{-1}{[w_1'(\xi_p)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q - \frac{k_1^{2/3}(-\psi_1)}{k_2^{2/3}(-\psi_2)}\nu_2')w_1(\xi_p-\nu_2')d\nu_2'.$$

Здесь $(-\psi_1) > 0$, $(-\psi_2) > 0$ и $\nu_2' > 0$. Перепишем коэффициенты $T_{q,p}$ в виде

$$T_{q,p} = \frac{-1}{[w_1'(\xi_p)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q - \alpha\nu_2')w_1(\xi_p-\nu_2')d\nu_2', \quad (3.2.10)$$

где коэффициент α равен

$$\alpha = \alpha_{C_1\to C_2} = \left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^{1/3}\frac{b_2}{b_1}\Big|_{z=0} > 0.$$

Для преломленного поля в ситуации $C_1 \to C_2$ функция $W^{\mathrm{tr}}_{b,q,p}(\sigma_2,\nu_2)$ определена соотношениями (3.2.9)–(3.2.10).

Поперечная горизонтальная компонента $U^{\rm tr}_{b,q,p}(\sigma_2,\nu_2)$ вектора смещений $\mathbf{u}_2$ найдена по формуле (1.12) и равна

$$U^{\rm tr}_{b,q,p}(\sigma_2,\nu_2) = \frac{i\,\psi_2\,2^{1/3}}{k_2^{1/3}}\frac{\partial W^{\rm tr}_{b,q,p}}{\partial\nu_2} = \frac{-i\,\psi_2\,2^{1/3}}{k_2^{1/3}}\mathcal{A}^{\rm inc}_{C_1,q}T_{q,p}w_1'(\xi_p-\nu_2)e^{i\sigma_2\xi_1}. \quad (3.2.11)$$

Функция $W^{\rm ref}_{b,q,p}(\sigma_1,\nu_1)$, аналогично пункту 3.1, определена выражением

$$W^{\rm ref}_{b,q,p}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{A}^{\rm inc}_{C_1,q}R_{q,p}w_1(\xi_q-\nu_1)e^{-i\sigma_1\xi_1} = W^{\rm inc}_{b,q,p=q}(-\sigma_1,\nu_1). \quad (3.2.12)$$

Формула (3.2.12) следует из равенства коэффициента $R_{q,p}$ транцформации следующему соотношению

$$R_{q,p} = \frac{-1}{[w_1'(-\xi_p)]^2}\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q-\nu_1')w_1(\xi_p-\nu_1')d\nu_1' = 1,$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q-\nu_1')w_1(\xi_p-\nu_1')d\nu_1' = \begin{cases} 0 & \text{для } q\neq p,\\ -[w_1'(\xi_q)]^2 & \text{для } q=p.\end{cases}$$

Следовательно,

$$w^{\rm ref}_{b,q}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{R}_{22}\,e^{-i\,k_1\,x}\,W^{\rm inc}_{b,q}(-\sigma_1,\nu_1). \quad (3.2.13)$$

Выпишем окончательный вид отраженного и преломленного векторов смещений $\mathbf{u}_j$ в задаче $W_1\to U_2$.

$$\mathbf{u}_1^{\rm ref} = e^{-ik_1x}\mathcal{R}_{22}\begin{pmatrix} U^{\rm ref}_{b,q}\left(1-2e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right)\\ \left[W^{\rm ref}_{b,q}+i\sqrt{1-\gamma_1^2}U^{\rm ref}_{b,q}\left(4-2e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_1^2}}\right)\right]\end{pmatrix}; \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{u}_2 = e^{ik_2x}\mathcal{T}_{22}\begin{pmatrix} U^{\rm tr}_{b,q,p}\left(1-2e^{-k_2z\sqrt{1-\gamma_2^2}}\right)\\ \left[W^{\rm tr}_{b,q,p}+i\sqrt{1-\gamma_2^2}U^{\rm tr}_{b,q,p}\left(4-2e^{-k_1z\sqrt{1-\gamma_2^2}}\right)\right]\end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Входящие в формулы (3.2.14)–(3.2.15) коэффициенты диагональных матриц $\mathcal{R}_{jj}$, $\mathcal{T}_{jj}$, $j=1,2$ определены равенствами (2.3), а функции $W^{\rm inc}_{b,q}$, $U^{\rm inc}_{b,q}$, $W^{\rm tr}_{b,q,p}$ и $U^{\rm tr}_{b,q,p}$ получены из соотношений (1.11)–(1.12), (3.2.1)–(3.2.2), (3.2.5) и (3.2.11).

Приведем выражения для векторов смещений на границе $z=0$.

В среде Ω_1 по границе распространяются волны соскальзывания номера q

$$\mathbf{u}^{\rm inc}_{1q}|_{z=0} = \frac{\psi_1^3 e^{ik_1(x_0+x)} e^{i(\sigma_0+\sigma_1)\xi_q}}{\mu_1 k_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_1^2} \end{pmatrix}; \qquad (3.2.16)$$

и

$$\mathbf{u}^{\rm ref}_{1q}|_{z=0} = \frac{\psi_1^3 e^{ik_1(x_0-x)} e^{i(\sigma_0-\sigma_1)\xi_q}}{\mu_1 k_1} \mathcal{R}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_1^2} \end{pmatrix}. \qquad (3.2.17)$$

В среде Ω_2 распространяются преломленные волны соскальзывания

$$\mathbf{u}^{\rm tr}_{1qp}|_{z=0} = e^{ik_2 x} e^{ik_1 x_0} \frac{i\psi_2 \psi_1^2 e^{i(\sigma_0+\sigma_2)\xi_q}\alpha}{\mu_1 k_1^{2/3} k_2^{1/3}} \mathcal{T}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_2^2} \end{pmatrix} T_{q,p}. \qquad (3.2.18)$$

Здесь коэффициент трансформации $T_{q,p}$ равен

$$T_{q,p} = \frac{1}{[w_1'(\xi_p)]^2} \int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q - \alpha\nu_2') w_1(\xi_p - \nu_2')\, d\nu_2',$$

а параметр α определен формулой

$$\alpha = \alpha_{C_1 \to C_2} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2} = \frac{b_2(0)}{b_1(0)} \left(\frac{{b_1}'_z(0)}{{b_2}'_z(0)} \right)^{1/3}.$$

Замечание. Коэффициент трансформации $T_{q,p}$

$$T_{q,p} = -\frac{1}{[w_1'(\xi_p)]^2} \int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q - \alpha\nu) w_1(\xi_p - \nu)\, d\nu$$

может быть преобразован в интеграл по вещественной оси. Для этого необходимо воспользоваться соотношением, связывающим функции Эйри w_1 и v и их корни

$$w_1(te^{i\pi/3}) = 2v(-t)e^{i\pi/6}, \quad \zeta_s = \xi_s e^{i\pi/3}.$$

Тогда получим

$$T_{q,p} = \frac{1}{[v(-\zeta_p)]^2} \int\limits_0^\infty v(\alpha\nu - \zeta_q) v(\nu - \zeta_p)\, d\nu. \qquad (3.2.19)$$

3.3. Переход волны шепчущей галереи в сумму волн шепчущей галереи: $W_1 \to W_2$

Найдем отраженные и преломленные от вертикальной границы раздела между средами Ω_1 и Ω_2 волны. Обе среды имеют минимум скорости на границе $z = 0$. Пусть падающее поле, распространяющееся от точечного источника в точке $-x_0, 0$, является волной шепчущей галереи номера p

$$w^{0,\mathrm{inc}}_{W_1,b,p}(x,z,k_1) = \frac{\psi_1^2\, e^{ik_1(x+x_0)}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3}} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p} \frac{v(-\zeta_p + \nu_1)}{v'(-\zeta_p)}$$

$$= e^{ik_1 x} W^{0,\mathrm{inc}}_{b,p}(\sigma_1, \nu_1) = e^{ik_1 x} \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p} e^{-i\sigma_1\zeta_p} v(-\zeta_p + \nu_1), \qquad (3.3.1)$$

причем $v(-\zeta_p) = 0$, а коэффициент $\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}$ равен

$$\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p} = \frac{\psi_1^2\, e^{ik_1 x_0} e^{-i\sigma_0\zeta_p}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}. \qquad (3.3.2)$$

По вертикальной компоненте падающего поля $W^{\mathrm{inc}}_{b,p}$ найдем горизонтальную компоненту падающего поля $U^{\mathrm{inc}}_{b,p}$, используя формулу (1.12). Для составляющей $U^{\mathrm{inc}}_{b,p}$ найдем, что

$$U^{\mathrm{inc}}_{b,p} = \frac{i\,\psi_1\, 2^{1/3}}{k_1^{1/3}} e^{-i\sigma_1\zeta_p} \frac{\partial W^{0,\mathrm{inc}}_{b,p}}{\partial \nu_1} = \frac{i\psi_1^3\, e^{ik_1 x_0}}{\mu_1\, k_1} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p} \frac{v_1'(-\zeta_p + \nu_1)}{v'(\zeta_p)} =$$

$$= \frac{i\,\psi_1\, 2^{1/3} \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}}{k_1^{1/3}} e^{-i\sigma_1\zeta_p} v'(-\zeta_p + \nu_1). \qquad (3.3.3)$$

Составляющая $w^{1,\mathrm{inc}}_{b,p}$ на границе $z = 0$ равна

$$\frac{w^{1,\mathrm{inc}}_{b,q=1}}{k_1^{1/3}} = e^{ik_1 x} 4\, i \sqrt{1 - \gamma_1^2}\, U^{\mathrm{inc}}_{b,q=1}. \qquad (3.3.4)$$

Падающее на вертикальную границу $x = 0$ поле шепчущей галереи $W^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}$, номера p определено формулами (1.19)–(1.20). Тогда отраженное поле представляется в виде

$$w^{0,\mathrm{ref}}_{b,p} = \mathcal{R}_{22} e^{-ik_1 x} W^{0,\mathrm{ref}}_{b,p}, \qquad (3.3.5)$$

где

$$W^{\mathrm{ref}}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1) = \int_0^\infty (-i)\,\mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{W_1,p}\, v(-\zeta_p+\nu_1')\, G_{W_1}(-\sigma_1,\nu_1;\sigma_1'=0,\nu_1')\,d\nu_1'. \qquad (3.3.6)$$

Функция Грина в области Ω_1 выражается формулой (2.12), в которой контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

Аналогичный интеграл был найден в пункте 3.1. Согласно формулам (3.1.2)–(3.1.6),

$$w^{0,\mathrm{ref}}_{b,p}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{R}_{22}\, e^{-i\,k_1\,x}\, W^{0,\mathrm{inc}}_{b,p}(-\sigma_1,\nu_1). \qquad (3.3.7)$$

Обратимся к вычислению преломленного поля

$$w^{0,\mathrm{tr}}_{b,p} = \mathcal{T}_{22}\, e^{ik_2\,x}\, W^{\mathrm{tr}}_{b,p}. \qquad (3.3.8)$$

. Аналогично пути, которым определено отраженное поле, найдем преломленное

$$W^{\mathrm{tr}}_{b,p}(\sigma_2,\nu_2) = \sum_{n=1}^{N} W^{\mathrm{tr}}_{b,p,n}(\sigma_2,\nu_2) + \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty W^{0,\mathrm{inc}}_{b,p}(\sigma_2'=0,\nu_2')d\nu_2' \int_{L_N} e^{i\sigma_2\zeta} \times$$

$$\times \frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2(\zeta) - w_2(\zeta+\nu_{2<})v(\zeta)]d\zeta. \qquad (3.3.9)$$

Здесь

$$W^{\mathrm{tr}}_{b,p,n}(\sigma_2,\nu_2) = T_{p,n} A^{\mathrm{inc}}_{W_1,p} v(-\zeta_n+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n)}. \qquad (3.3.10)$$

Коэффициенты трансформации $T_{p,n}$ в случае $W_1 \to W_2$, когда в среде Ω_1 и в среде Ω_2 скорость имеет минимум на границе полуплоскости, находятся по формуле:

$$T_{p,n} = \frac{-1}{[v'(-\zeta_n)]^2}\int_0^\infty v(-\zeta_p + \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2')v(-\zeta_n+\nu_2')d\nu_2'.$$

Здесь $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$.

Перепишем коэффициенты $T_{p,n}$ в виде

$$T_{p,n} = \frac{-1}{[v'(-\zeta_n)]^2} \int_0^\infty v(-\zeta_p + \alpha\nu_2')v(-\zeta_n + \nu_2')d\nu_2', \qquad (3.3.11)$$

где коэффициент α равен

$$\alpha = \alpha_{W_1 \to W_2} = \left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^{1/3} \frac{b_2}{b_1}\Big|_{z=0} > 0.$$

Величину вертикальной поперечной компоненты $w_{b,p}^{0,\mathrm{tr}}$ вектора смещений преломленного поля в ситуации, когда $W_1 \to W_2$, получим по формулам (3.3.10), (3.3.12)–(3.3.13).

Найдем горизонтальную поперечную составляющую вектора смещений преломленного поля

$$U_{b,p,n}^{\mathrm{tr}} = \frac{i\,\psi_2\,2^{1/3}}{k_2^{1/3}} e^{-i\sigma_2\zeta_n} \frac{\partial W_{b,p,n}^{\mathrm{tr}}}{\partial \nu_2} =$$

$$= \frac{i\,\psi_2\,2^{1/3} T_{p,n}}{k_2^{1/3}} e^{-i\sigma_2\zeta_n} v'(-\zeta_n + \nu_2)\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}}. \qquad (3.3.12)$$

Далее, как в пунктах 3.1–3.2, зная вертикальные поперечные компоненты падающего, отраженного и преломленного полей $W_{b,p}^{\mathrm{inc}}$, $W_{b,p}^{\mathrm{ref}}$ и $W_{b,p,n}^{\mathrm{tr}}$, найдем горизонтальные поперечные компоненты падающего, отраженного и преломленного полей $U_{b,p}^{\mathrm{inc}}$, $U_{b,p}^{\mathrm{ref}}$ и $U_{b,p,n}^{\mathrm{tr}}$. По формулам (1.11)–(1.12) найдем все составляющие искомых векторов отраженного и преломленного полей. Формулы для векторов смещений падающего, отраженного и преломленного полей совпадают с идентичными формулами пунктов 3.1–3.2.

Значение векторов смещений падающей и отраженной волн полностью совпадает с формулами (3.1.14)–(3.1.15).

В среде Ω_2 распространяются преломленные волны шепчущей галереи

$$\mathbf{u}_{2p}^{\mathrm{tr}}|_{z=0} = -e^{ik_2x} \frac{i2\psi_2 2^{1/3}\mathcal{A}_{W_1,p}^{\mathrm{inc}} e^{i\sigma_2(-\zeta_n)}\alpha}{k_2^{1/3} v'(-\zeta_n)} \mathcal{T}_{22} \times$$

$$\times \int_0^\infty v(-\zeta_n + \nu_2')\,v(-\zeta_p + \alpha\nu_2')d\nu_2' \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{1-\gamma_2^2} \end{pmatrix}. \qquad (3.3.13)$$

Здесь параметр α определен формулой

$$\alpha = \alpha_{W_1 \to W_2} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2} = \left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^{1/3} \frac{b_2}{b_1}\Big|_{z=0} > 0,$$

а амплитудный множитель $\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p}$ равен

$$\mathcal{A}^{\rm inc}_{W_1,p} = \frac{-\psi_1^2\, e^{i k_1 x_0} e^{-i\sigma_0 \zeta_p}}{\mu_1 2^{1/3} k_1^{2/3} v'(-\zeta_p)}.$$

3.4. Дифракция приповерхностной волны от линии раздела между средами с постоянными скоростями: $U_1 \to U_2$

Пусть на вертикальную границу, разделяющую две области с постоянными скоростями, из области Ω_1 набегает приповерхностная SV-волна. Вектор смещений $\mathbf{u}^{\rm inc} = (u, 0, w)$ волны, набегающей на границу раздела $x = 0$ областей Ω_1 и Ω_2, удовлетворяет задаче (1.1)–(1.5) и имеет следующий вид

$$w^{0,\rm inc}_{U_1,b}(x,z,k_1) = \frac{z\, e^{-i\,\pi/4} e^{i\,k_1\,(x+x_0)} e^{i\,k_1\,\frac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\mu_1\,(x+x_0)\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}} \left(1 + O(\sqrt{k_1^{-1}})\right)$$

$$= e^{i\,k_1\,x} W^{0,\rm inc}_{U_1,b}. \qquad (3.4.1)$$

В координатах σ_1 и ν_1 функция $W^{0,\rm inc}_{U_1,b}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом

$$W^{0,\rm inc}_{U_1,b}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{\nu_1\, e^{-i\,\pi/4} e^{i k_1 x_0} e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{2\mu_1\,(\sigma_1+\sigma_0)\sqrt{\pi(\sigma_1+\sigma_0)}\,2^{1/3}k_1^{2/3}} \left(1 + O\big(k_1^{-1/3}\big)\right) =$$

$$= \mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1} \frac{\nu_1 e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}, \quad \mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1} = \frac{e^{-i\,\pi/4} e^{i k_1 x_0}}{2^{4/3} k_1^{2/3}\,\mu_1\,\sqrt{\pi}}. \qquad (3.4.2)$$

Отметим, что имеет место предельная формула

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{e^{-i\,\pi/4} e^{i\,\frac{\nu^2}{4\,\sigma}}}{2\,\sqrt{\pi\,\sigma}} = \delta(\nu).$$

Для составляющей $U^{\rm inc}_{U_1,b}$ найдем, что

$$U^{\rm inc}_{U_1,b}=\frac{i\,2^{1/3}}{k_1^{1/3}}\frac{\partial W^{0,\rm inc}_{U_1,b}}{\partial\nu_1}=\frac{i\,2^{1/3}\mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1}}{k_1^{1/3}}\frac{e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}=$$

$$\frac{e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2k_1\,\mu_1\sqrt{\pi}}\frac{e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)^3}}. \tag{3.4.3}$$

Компоненту $W^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)$ найдем из формулы (2.9), в которой функция Грина определена выражением (2.11), а $W^{0,\rm inc}_{U_1,b}(\sigma_2'=0,\nu_2')$ есть приповерхностная волна (3.4.1)–(3.4.2):

$$W^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{e^{-i\pi/4}\mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1}}{2\sqrt{\pi\sigma_2}\sqrt{\sigma_0^3}}\int\limits_0^\infty\Big(\nu_2'\frac{k_1^{2/3}}{k_2^{2/3}}\Big)e^{i\,\frac{(\nu_2')^2k_1^{4/3}}{4\,\sigma_0k_2^{4/3}}}\times$$

$$\times\left[e^{\frac{i(\nu_2-\nu_2')^2}{4\sigma_2}}-e^{\frac{i(\nu_2+\nu_2')^2}{4\sigma_2}}\right]d\nu_2'. \tag{3.4.4}$$

Проводя громоздкие вычисления, получим функцию $W^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)$ в виде

$$W^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{k_2^{4/3}\nu_2\mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1}e^{i\,\frac{\nu_2^2}{4\,(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})}}}{k_1^{4/3}\sqrt{(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})^3}}. \tag{3.4.5}$$

Соответствующая горизонтальная компонента $U^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)$ может быть вычислена и равна

$$U^{\rm tr}_{U_1,b}(\sigma_2,\nu_2)=\frac{i2^{1/3}k_2^{4/3}\mathcal{A}^{\rm inc}_{U_1}e^{i\,\frac{\nu_2^2}{4\,(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})}}}{2k_1^{4/3}k_2^{1/3}\sqrt{(\sigma_2+\sigma_0\frac{k_2^{4/3}}{k_1^{4/3}})^3}}. \tag{3.4.6}$$

Аналогично вычисляются все компоненты векторов смещений отраженного и преломленного полей. Схема одна и та же. Если вычислены поперечные компоненты этих полей, то и все поле найдено.

Для функции $W^{\mathrm{ref}}_{U_1,b}(\sigma_1,\nu_1)$ получаем

$$W^{\mathrm{ref}}_{U_1,b}(\sigma_1,\nu_1) == \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}\frac{\nu_1 e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4(\sigma_0-\sigma_1)}}}{\sqrt{(\sigma_0-\sigma_1)^3}},\quad \mathcal{A}^{\mathrm{inc}}_{U_1}=\frac{e^{-i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2^{4/3}k_1^{2/3}\,\mu_1\sqrt{\pi}}. \quad (3.4.7)$$

Литература

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — Журн. эксперим. и теор. физики **16**, No. 7 (1946), 557–573.
2. R. N. Buchal, J. B. Keller, *Boundary layer problems in diffraction theory.* — Comm. Pure Appl. Math. **13**, No. 1 (1960), 85–114.
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Изд-во Ленингр. ун-та, Л. (1974), 124 с.
4. Л. М. Бреховских, *О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы.* — Акустический журнал АН СССР **12**, вып. 3 (1966), 374–376.
5. И. В. Мухина, Л. А. Молотков, *О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам.* — Изв. АН СССР. Физика Земли No. 4 (1967), 3–8.
6. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — Труды ордена Ленина Математического института им. В. А. Стеклова **CXV**. Математические вопросы теории дифракции и распространения волн. 1. Изд-во Наука, Ленинград (1971), 114–130.
7. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 86–102.

Kirpichnikova N. Ya. Diffraction of surface SV-waves on the line of elastic parameters discontinuity.

The set of diffraction problems on elastic surface waves of vertical polarization (SV-waves) from a line of elastic parameters jump is under consideration. The reflected and transmitted wave fields expressions are obtained by means of the parabolic equation method. The corresponding transformation coefficients are found for the reflection and transmission.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 мая 2007 г.