Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

Д. Гомес, С. А. Назаров, М.-Е. Перес

ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ

1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1. Собственные колебания тела с концентрированными массами. Пусть Ω и ω^j – ограниченные области в пространстве $\mathbb{R}^3$; здесь $j = 1, \dots, J$ и $J \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. Предположим для простоты, что поверхности $\partial\Omega$ и $\partial\omega^j$ гладкие (их можно считать липшицевыми; см. далее замечание 2.2) и что начало координат $\mathcal{O}$ содержится внутри областей $\omega^1, \dots, \omega^J$. Зафиксируем в теле Ω точки $P^1, \dots, P^J$, причем $P^j \neq P^k$ при $j \neq k$, и, обозначив h малый положительный параметр, введем множества

$$\omega_h^j = \{x : \xi^j := h^{-1}(x - P^j) \in \omega^j\}, \quad \Omega(h) = \Omega \setminus (\overline{\omega_h^1} \cup \dots \cup \overline{\omega_h^J}),$$
$$\Xi(h) = \Omega(h) \cup \omega_h^1 \cup \dots \cup \omega_h^J. \tag{1.1}$$

Будем считать, что $\Omega(h)$ и ω_h^j – однородные анизотропные упругие тела, имеющие различные упругие модули и плотности $\rho_0 > 0$ и $\rho_j > 0$.

Примем матричную запись определяющих соотношений трехмерной теории упругости (см., например, [1, 2]), т.е. зафиксируем декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ и введем столбцы смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$, а также деформаций и напряжений

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \varepsilon_{33}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{23}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{31}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{12}(u))^\top, \\
\sigma(u) &= (\sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sigma_{33}(u), \sqrt{2}\sigma_{23}(u), \sqrt{2}\sigma_{31}(u), \sqrt{2}\sigma_{12}(u))^\top.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке MEC MTM 2005-07720, SAB 2005-0175 и гранта РФФИ 06-01-257.

Здесь $\top$ – знак транспонирования, а $\varepsilon_{jk}(u)$ и $\sigma_{jk}(u)$ – декартовы компоненты тензоров деформаций и напряжений, порожденных полем смещений u. Подчеркнем, что множитель $\sqrt{2}$ помещен в формулы (1.2) для того, чтобы уравнять натуральные нормы двухвалентных тензоров и столбцов высотой 6.

Деформации определены равенствами

$$\varepsilon(u;x)=\mathcal{D}(\nabla_x)u(x), \quad \varepsilon_{jk}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

$$\mathcal{D}(\nabla_x)^\top=\begin{pmatrix}\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 2^{-1/2}\partial_2\\ 0 & \partial_2 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1\\ 0 & 0 & \partial_3 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla_x=\begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{pmatrix}.$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma(u;x)=A(x)\varepsilon(u;x),$$

в котором

$$A(x)=\begin{cases} A^0 & \text{при} \quad x\in\Omega(h),\\ A^j & \text{при} \quad x\in\omega_h^j, \quad j=1,\dots,J,\end{cases} \tag{1.4}$$

а числовые 6×6-матрицы A^0 и A^j положительно определены и симметричны.

Задача о собственных колебаниях составного тела $\Xi(h)$ содержит уравнения равновесия

$$D(-\nabla_x)^\top A(x)D(\nabla_x)u(x)=\Lambda\rho(x)u(x), \quad x\in\Xi(h), \tag{1.5}$$

краевые условия на свободной внешней поверхности

$$D(n(x))^\top A^0 D(\nabla_x)u(x)=0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{1.6}$$

и условия сопряжения на границах включений

$$u^0(x)=u^j(x), D(\nu^j(x))^\top\left(A^0D(\nabla_x)u^0(x)-A^jD(\nabla_x)u^j(x)\right)=0,$$

$$x\in\partial\omega_h^j, \quad j=1,\dots,J. \tag{1.7}$$

Здесь $n=(n_1,n_2,n_3)^\top$ и $\nu^j=(\nu_1^j,\nu_2^j,\nu_3^j)^\top$ – единичные векторы (столбцы) внешних нормалей к границам тел Ω и ω_h^j, u^0 и u^j –

сужение вектор-функции u на части $\Omega(h)$ и ω_h^j составного тела, Λ – спектральный параметр, а ρ – кусочно постоянная положительная функция,

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 & \text{при} \quad x \in \Omega(h), \\ \rho_j = \gamma \rho_j^0 & \text{при} \quad x \in \omega_h^j, \quad j = 1, \dots, J. \end{cases} \tag{1.8}$$

Масштабированием сведем характерный размер области Ω к единичному и тем самым сделаем параметр h безразмерным. Предположим, что упругие модули всех тел одного порядка, но плотности ρ_j включений могут быть много больше или меньше плотности ρ_0 массивного тела, т.е. $\rho_j = \gamma \rho_j^0$, величины $\rho_1^0, \dots, \rho_J^0$ сравнимы с плотностью ρ_0 тела $\Omega(h)$, а $\gamma > 0$ – большой или малый безразмерный физический параметр, который связан с геометрическим параметром h формулой

$$\gamma = h^{-2-m}, \tag{1.9}$$

и, значит, $\rho_j^0 = h^{2+m} \rho_j$. Как будет установлено далее, показатель m в формуле (1.9) существенно влияет на асимптотическую структуру спектра задачи (1.5)–(1.7). Верхнюю границу $h_0 > 0$ изменения параметра h зафиксируем так, чтобы при $h \in (0, h_0]$ замыкания включений $\overline{\omega_h^j} = \omega_h^j \cup \partial \omega_h^j$ принадлежали области Ω.

2. Частоты собственных колебаний. Поскольку задача (1.5)–(1.7) является эллиптической и формально самосопряженной, ее собственные числа оказываются вещественными и неотрицательными. Они образуют бесконечно большую последовательность

$$0 = \Lambda_1 = \dots = \Lambda_6 \\ < \Lambda_7(h) \leq \Lambda_8(h) \leq \dots \leq \Lambda_n(h) \leq \dots \to +\infty, \tag{1.10}$$

в которой указаны с учетом кратностей. Собственные векторы, отвечающие нулевому собственному числу, составляют шестимерный линеал жестких смещений

$$\mathcal{R} = \{ r : r(x) = d(x) b, \quad b \in \mathbb{R}^6 \}, \tag{1.11}$$

где $d(x)$ – линейная матрица-функция размером 3×6, похожая на матрицу $D(x)^\top$ из формулы (1.3):

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2} x_3 & 2^{-1/2} x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2} x_3 & 0 & 2^{-1/2} x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2} x_2 & -2^{-1/2} x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Столбец b из определения (1.11) и матрицу (1.12) представим следующим образом: $b^\top = \left(b'^\top, b''^\top\right)$ и $d(x) = (d'(x), d''(x))$; здесь $b' = (b_1, b_2, b_3)^\top$, $b'' = (b_1, b_2, b_3)^\top$ и $d'(x) = \mathbb{I}_3$ – единичная матрица размером 3×3. Жесткие смещения $d'(x)b' = b'$ и $d''(x)b''$ называются поступательными и вращательными соответственно.

При формальном переходе к $h = 0$ включения ω_h^j исчезают и, на первый взгляд, задаче (1.5)–(1.7) естественно поставить в соответствие предельную спектральную задачу для однородного тела Ω

$$D(-\nabla_x)^\top A^0 D(\nabla_x) v(x) = \lambda \rho_0 v(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.13}$$

$$D(n(x))^\top A^0 D(\nabla_x) v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.14}$$

собственные числа которой формируют аналогичную (1.10) последовательность

$$0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_6 < \lambda_7 \leq \lambda_8 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \to +\infty. \tag{1.15}$$

Однако предельный переход $\Lambda_n(h) \to \lambda_n$ оказывается справедливым лишь при отрицательном показателе m в формуле (1.9), т.е. при “легких” или “не очень тяжелых” включениях, – настоящая статья в основном посвящена разбору ситуации $m \geq 0$: масса каждого отдельного включения больше или такая же по порядку, как масса тела $\Omega(h)$. При этом далее придется различать случаи “тяжелых” и “очень тяжелых” включений, но эти категории зависят от взаимного расположения точек $P^1, \dots, P^J$ (см. далее ограничения (3.7) и (3.18)).

В работе [3] было показано, что при $m = J = 1$ аналогичная (1.5)–(1.6) спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа порождает совершенно другую предельную задачу. В рассматриваемом случае набор ($J \geq 1$) таких предельных задач получается посредством замены спектрального параметра

$$\Lambda(h) \mapsto M(h) = h^{-m}\Lambda(h) \mapsto \mu, \tag{1.16}$$

растяжения координат $x \mapsto \xi^j$ (см. соотношение (1.1)) и формального перехода к $h = 0$:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \mu^j \rho_j^0 w^j(\xi), \quad \xi \in \omega^j, \tag{1.17}$$

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) w^{j0}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Theta^j := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega^j}, \tag{1.18}$$

$$w^{j\,0}(\xi) = w^j(\xi),\ D(\nu^j(\xi))^\top(A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}(\xi) - A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi)) = 0, \quad \xi \in \partial\omega^j. \qquad (1.19)$$

Здесь через $w^{j\,0}$ обозначено сужение вектор-функции w^j на множество Θ^j, т.е. на внешность включения $\overline{\omega^j}$ единичного размера. Нетрудно убедиться в том, что задача (1.17)–(1.19) "хорошо поставлена" в классе вектор-функций, затухающих на бесконечности со скоростью $O(|\xi|^{-1})$ (см. далее теорему 2.1 и предложение 2.1), и ей отвечает последовательность собственных чисел

$$0 < \mu_1^j \le \mu_2^j \le \mu_n^j \le \cdots \to +\infty. \qquad (1.20)$$

Как обычно, собственные числа указаны при учете их кратностей. Последовательности (1.20) при $j = 1, \ldots, J$ объединим в единую последовательность

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \mu_n \le \cdots \to +\infty. \qquad (1.21)$$

Если заменить условия Неймана (1.6) (в напряжениях) условиями Дирихле (в смещениях)

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \qquad (1.22)$$

то, как можно проверить (см. [4] и обзор [5]), нормированное собственное число $h^{-m}\Lambda_n(h)$ задачи (1.5), (1.22), (1.7) стремится при $h \to +0$ к члену μ_n последовательности (1.21). Как ни странно, при очень тяжелых включениях (ср. с материалом §§3–5) этот результат неверен при постановке на $\partial\Omega$ условий Неймана. Именно, в статьях [6] и [7] обнаружено для скалярной задачи Неймана, что в случае $J = 1$ (одно тяжелое включение) предельная задача перестает быть дифференциальной и приобретает интегральное слагаемое, а в случае $J > 1$ соответствующие интегральные операторы обеспечивают взаимодействие включений (имеет место "дальнодействие") и предельная последовательность (1.21) не распадается на вычисляемые независимо подпоследовательности (1.20), $j = 1, \ldots, J$.

Основная цель настоящей статьи – вывод связанных предельных спектральных задач (результирующей задачи) для сформулированной задачи теории упругости. Из-за того что линеал $\mathcal{R}$ жестких смещений, удовлетворяющих соотношениям (1.5)–(1.7) при $\Lambda = 0$, имеет размерность шесть и содержит линейные вектор-функции (для скалярной задачи Неймана он одномерен и состоит из постоянных) структура возникающих результирующих задач значительно богаче и определяется не только показателем m в формуле (1.9), но и взаимным расположением точек $P^1, \ldots, P^J$.

3. Задачи о концентрации масс для задач математической физики. В случае оператора Лапласа для спектральной задачи Дирихле с изолированной концентрированной массой получено большое количество разнообразных результатов, соотносящихся с различными размерностями пространства и значениями показателя m, – сошлемся на статьи [3, 8–14], книги [15, 16] и обзор [5] по поводу различных методов и подходов, а также более широкого списка литературы. Важное и общее наблюдение состоит в том, что, во-первых, собственные числа приобретают порядки h^m при $m > 0$ и $h^0 = 1$ при $m \leq 0$ и, во-вторых, в случае $m > 0$ возникает два типа колебаний, а именно, *локализованные* около концентрированной массы, ассоциированные с *низкочастотной* ($\Lambda_n(h) = O(h^{m-2})$) полосой спектра и *глобальные*, ассоциированные со *среднечастотной* ($\Lambda_n(h) = O(1)$) полосой спектра. При этом имеется два интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ изменяемости параметра m и критическое значение $m = 0$, предопределяющие асимптотическое поведение собственных чисел в низкочастотном диапазоне. Локальные и глобальные колебания приобретают правильное толкование при исследовании собственных функций (см. [3, 10, 11, 15]).

Случай нескольких концентрированных масс при $m > 0$ для той же скалярной задачи Дирихле можно найти в [5]. Другие дифференциальные уравнения и системы рассматривались в [17] (бигармонический оператор), [4] (система уравнений теории упругости), [18] (система уравнений для пластины Рейсснера–Миндлина). В [19] изучена задача о большом количестве концентрированных масс распределенных по внутренней поверхности в Ω, а в [20] – задача о пространственном распределении концентрированных масс в Ω. Во всех этих публикациях на $\partial\Omega$ назначены условия Дирихле. В обзоре [5] указаны ссылки на большое число работ, посвященных случаю выхода концентрированных масс на участок Σ границы области Ω, но на остальной части $\partial\Omega \setminus \Sigma$ по-прежнему предполагаются условия Дирихле. Единственное исключение – работа [21], где на $\partial\Omega \setminus \Sigma$ поставлены условия Неймана, однако массы считаются “легкими” ($m < 0$) и поэтому какие-либо отличия от условий Дирихле не возникают.

В противоположность задаче Дирихле, спектральной задаче для оператора Лапласа с краевыми условиями Неймана посвящено немного публикаций. Упомянем статьи [6, 7] и заметку [22] (результаты приведены без доказательств), которые посвящены асимптотическому поведению собственных чисел в низкочастотном диапазоне. Результаты, дополняющие цитированные публикации, получены в работе [23], а именно, асимптотики собственных чисел в низко- и сренечастотных диапазонах сопровождены асимптотическими формулами для соответствующих собственных функций. Как обычно, исчерпывающая информация может быть получена в одномерной ситуации (обыкновенное дифференциальное уравнение; см. [24]), однако доказательство базируется на явных формулах и не подразумевает обобщение на многомерные задачи. Подчеркнем, что только в [7] и [23] рассматривался случай $J > 1$, характеризующийся "дальнодействием" включений.

Для скалярной задачи Неймана собственные числа в низкочастотном диапазоне имеют тот же порядок, что для задачи Дирихле. Вместе с тем появляются и существенные различия. Во-первых, теперь приходится различать три интервала $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ изменяемости показателя m, а также два критических значения $m = 0$ и $m = 1$, и, во-вторых, не происходит локализации собственных функций (см. [6, 7, 22, 23]).

4. Геометрические условия. В отличие от скалярных уравнений для системы уравнений теории упругости придется различать три случая взаимного расположения точек $P^1, \dots, P^J$:

(i) $J = 1$, *т.е. имеется лишь одно включение*;

(ii) $J \geq 2$, *но точки* $P^1, \dots P^J$ *лежат на одной прямой*;

(iii) $J \geq 3$ *и среди точек* $P^1, \dots P^J$ *найдутся три, являющиеся вершинами невырожденного треугольника.*

В ситуации (i) совместим начало координат $\mathcal{O}$ с точкой P^1, а в ситуации (ii) зафиксируем декартову систему x так, чтобы точки $P^1, \dots, P^J$ попали на ось аппликат. В ситуации (iii) положение системы координат безразлично. Требование (iii) называем "условием треугольника".

Обозначим $d^1(x)$, $d^2(x)$ и $d^3(x)$ строки матрицы (1.12). Следующее утверждение проверяется прямыми вычислениями.

Лемма 1.1. *Линейная оболочка* $\mathfrak{D}$ *строк* $d^p(P^j)$, *где* $j = 1, \dots, J$ *и* $p = 1, 2, 3$, *совпадает с евклидовым пространством* $(\mathbb{R}^6)^\top$ *строк длиной шесть тогда и только тогда, когда выполнено требование* (iii). *Если соблюдены условия* (ii) *или* (i), *но не* (iii), *то* $\mathfrak{D} = (\mathbb{R}^5)^\top \times \{0\}$ *или* $\mathfrak{D} = (\mathbb{R}^3)^\top \times \{0\}^3$ *соответственно.*

В очередном утверждении $Q^{j\prime\prime}$ – симметрические положительно определенные матрицы размером 3×3, а $Q^{j\prime}$ и Q_4^j – такие столбцы высотой три и (положительные) числа, что 4×4-матрицы

$$Q^j = \begin{pmatrix} Q^{j\prime\prime} & Q^{j\prime} \\ (Q^{j\prime})^\top & Q_4^j \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

остаются положительно определенными.

Лемма 1.2. (1) *Если соблюдено требование* (iii), *то симметрическая* 6×6-*матрица*

$$M = \sum_{j=1}^{J} d(P^j)^\top Q^{j\prime\prime} d(P^j) \tag{1.24}$$

положительно определена.

(2) *Если соблюдено требование* (ii), *то симметрическая* 6×6-*матрица* M, *заданная формулами*

$$M = \sum_{j=1}^{J} \widehat{d}(P^j)^\top Q^j \widehat{d}(P^j), \quad \widehat{d}(P^j) = \begin{pmatrix} d(P^j) \\ \mathbf{e}^6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}^6 = (0, \dots, 0, 1) \in (\mathbb{R}^6)^\top, \tag{1.25}$$

является положительно определенной.

Доказательство. Поскольку каждое из слагаемых в правой части (1.24) – неотрицательная симметрическая матрица, равенство $b^\top M b = 0$ при некотором столбце $b \in \mathbb{R}^6$ влечет за собой соотношения $d(P^j)b = 0$ для всех индексов $j = 1, \dots, J$, а значит, $b = 0$ согласно заключению леммы 1.1 о линейной оболочке $\mathfrak{D}$.

В ситуации (ii) точки $P^1, \dots, P^J$ лежат на оси аппликат, т.е. последние столбцы матриц $d(P^j)$ нулевые. Линейная оболочка строк матриц $\widehat{d}(P^j)$ заполняет все пространство $(\mathbb{R}^6)^\top$ (лемма 1.1). Следовательно, второе утверждение проверяется точно так же, как и первое. □

5. Структура статьи и сводка результатов. Следующий параграф содержит необходимые сведения о разрешимости предельных задач, статических и спектральных, а также в нем доказана теорема 2.2 о собственных числах и векторах результирующей задачи в наиболее общей постановке. Формальный вывод таких задач в различных ситуациях представлен в §§3–5.

Основное внимание в статье уделено конструированию асимптотических анзацев для собственных вектор-функций задачи (1.5)–(1.7) о колебаниях составного упругого тела $\Xi(h)$, так как анзацы для собственных чисел просты: либо возмущается собственное число λ_n спектральной задачи Неймана (1.13), (1.14) для однородного тела (последовательность (1.15)), либо возмущаются умноженные на h^m элементы последовательности (1.21) собственных чисел более сложной результирующей задачи, как раз и служащей основным предметом исследования. Соответственно имеем

$$\Lambda_n(\lambda) = \lambda_n + \widetilde{\Lambda}_n(h) \tag{1.26}$$

или

$$\Lambda_n(\lambda) = h^m \mu_n + \widetilde{\Lambda}_n(h). \tag{1.27}$$

Построение асимптотических формул для собственных вектор-функций – более трудное занятие, поскольку их разложения многомасштабные и содержат так называемые асимптотические конгломераты, соединяющие в себе разнородные члены, имеющие множителями степени малого параметра h с разными показателями: члены регулярного типа и типа пограничного слоя, а также отщепленные жесткие смещения. Появление последних как раз и вызвано постановкой условий Неймана (1.6) в напряжениях. Дело в том, что влияние на тело $\Omega(h)$ колебаний малых тяжелых включений можно моделировать сосредоточенными воздействиями в точках $P^1, \ldots, P^J$ – силами и моментами. Если внешняя поверхность $\partial\Omega$ жестко защемлена, т.е. назначены условия Дирихле (1.22) в смещениях, любая комбинация сосредоточенных сил и моментов компенсируется внешними нагрузками (реакция опор и т.п.). Если же поверхность свободна от напряжений, то такая компенсация может произойти либо за счет инерционных сил, либо за счет ответного воздействия тела $\Omega(h)$ на включения ω_h^j. При определенных физических параметрах (очень тяжелые включения или малые частоты колебаний) воздействия на включения или инерционные силы порождены жесткими смещениями массивного тела $\Omega(h)$, которые не вызывают его деформирования и превалируют над другими формами колебаний. Отметим, что условие треугольника уравнивает амплитуды двух типов жестких смещений – поступательного и вращательного, так как согласно лемме 1.1 существует набор сосредоточенных сил в точках $P^1, \dots, P^J$ с произвольными заданными наперед главными вектором и моментом. При нарушении условия (iii) в упомянутый набор необходимо включить сосредоточенные моменты – три в случае (i) и один в случае (ii).

По построению адекватного главного асимптотического конгломерата нетрудно получить полные асимптотические разложения собственных чисел и вектор-функций задачи (1.5)–(1.7): конгломерат тиражируется и его копии умножаются на степени h^{α_k} малого параметра с возрастающими показателями. Строение бесконечно большой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ может оказаться замысловатым по трем причинам. Во-первых, из-за того, что показатель m в формуле (1.9) – нецелое число; в связи с этим следует подчеркнуть, что в прикладных дисциплинах h – малый, но *фиксированный* геометрический параметр и сравнение его с относительными плотностями ρ_j/ρ_0 – чисто математический трюк: более правильно сравнивать плотности, массы и моменты инерции тел $\Omega(h)$, $\omega_h^1, \dots \omega_h^J$, причем "критическими" тогда становятся показатели $m = 0, 1, 3$ (см. §5). Вторая причина кроется в необходимости правильной нормировки составляющих асимптотического анзаца; так, при $m = 0$ (целом показателе!) возникают ряды по степеням параметра $h^{1/2}$ (см. п. 1 §5 и ср. с [25]). Наконец, пограничные слои характеризуются степенной скоростью затухания и поэтому при построении полных асимптотических разложений приходится применять процедуру перераспределения невязок [26] (см. [27], а также [7, 28] по поводу спектральных задач). В §6 изложены соответствующие итерационные процессы для наиболее показательного случая $m = 1$, означающего, что массы тела и включения сравнимы по порядку и не требующего каких-либо геометрических ограничений.

Поскольку результирующие задачи существенно зависят от показателя m и взаимного расположения включений, их список весьма длинен. Для облегчения чтения статьи приведем таблицу, в которую поместим одно из условий (i)–(iii) (если упоминания условия нет, то результат верен при любом наборе точек $\{P^1, \dots P^J\}$), анзац для собственного числа, ограничение на m, а также предельные или результирующие задачи с указанием на характер взаимодействия спектральных задач для составных упругих пространств $\omega^j \cup \Theta^j$, $j = 1, \dots, J$.

1^0. *формула* (1.26), $m < 0$, *задача* (1.13), (1.14);

2^0. *формулы* (1.26) *и* (1.27), $m = 0$, *не связанные задачи* (1.13), (1.14) *и* (1.17)–(1.19);

3^0. *формула* (1.27), $m \in (0,1)$, *не связанные задачи* (1.17)–(1.19);

4^0. *формула* (1.27), $m = 1$, *задачи* (3.12), (1.18), (1.19) *связаны матрицей* (5.5);

5^0. *ситуация* (iii), *формула* (1.27), $m > 1$, *задачи* (3.12), (1.18), (1.19) *связаны матрицей* (3.10);

6^0. *ситуация* (ii), *формула* (1.27):

$m \in (1,3)$; *связанные задачи* (4.15), (1.18), (1.19);

$m = 3$; *задачи* (3.30), (1.18), (1.19) *связаны матрицей* (5.9);

$m > 3$; *задачи* (3.30), (1.18), (1.19) *связаны матрицей* (3.29);

7^0. *ситуация* (i), *формула* (1.27):

$m \in (1,3)$; *одиночная задача* (4.9), (1.18), (1.19);

$m = 3$; *одиночная задача* (5.7), (1.18), (1.19) *с матрицей* (5.6);

$m > 3$; *одиночная задача* (3.20), (1.18), (1.19) *с матрицей* (3.16).

2. О разрешимости предельных задач

1. Система уравнений для составного упругого пространства. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений (1.18) и

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = F^j(\xi), \quad \xi \in \omega^j, \tag{2.1}$$

с условиями сопряжения (1.19). Обозначим $L^0(\nabla_\xi)$, $L^j(\nabla_\xi)$ и $N^{j0}(\xi, \nabla_\xi)$, $N^j(\xi, \nabla_\xi)$ матричные операторы, фигурирующие в левых частях соотношений (2.1), (1.18) и (1.19) соответственно, а

$\Phi(\xi)$ – фундаментальную матрицу оператора $L^0(\nabla_\xi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Известно, что $\Phi(t\xi) = t^{-1}\Phi(\xi)$ при любом $t > 0$.

Предложение 2.1. *Пусть $F^j \in L_2(\omega^j)^3$ и $w^j \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)^3$ – решение задачи (2.1), (1.18), (1.19), затухающее на бесконечности. Тогда это решение допускает представление*

$$w^{j\,0}(\xi) = \left(b^{j\top} d(-\nabla_\xi)^\top \Phi(\xi)\right)^\top + \left(c^{j\top} D(-\nabla_\xi)\Phi(\xi)\right)^\top + \widetilde{w}^{j\,0}(\xi), \quad (2.2)$$

где d и D – матрицы из формул (1.12) и (1.3), b^j и c^j – столбцы в $\mathbb{R}^6$, причем

$$b^j = \int\limits_{\omega^j} d(\xi)^\top F^j(\xi)\, d\xi, \quad (2.3)$$

а остаток $\widetilde{w}^{j\,0}$ удовлетворяет оценкам

$$|\nabla^k_\xi \widetilde{w}^{j\,0}(\xi)| \le c_k |\xi|^{-3-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{U}^j}, \quad (2.4)$$

в которых $\nabla^k_\xi w$ – совокупность производных вектор-функции w порядка k и $\mathcal{U}^j$ – окрестность множества $\overline{\omega^j}$.

Доказательство. Поскольку система (1.18) эллиптическая и однородная, решение $w^{j\,0}$ бесконечно дифференцируемо на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{U}^j}$ и согласно общим результатам [29, 30] (см. также [31, §6.4], [32, §6] и пояснения в замечании 2.1) для него верны соотношения (2.2) и (2.4).

Проверим равенство (2.3) при помощи метода [33]. С этой целью воспользуемся формулами Грина на множествах ω^j и $\mathbb{B}_R \setminus \omega^j$, где $\mathbb{B}_R = \{\xi : |\xi| < R\}$ – шар с большим радиусом $R > 0$. Имеем

$$\int\limits_{\omega^j} d(\xi)^\top F^j(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\omega^j} d(\xi)^\top L^j(\nabla_\xi) w^j(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_{\partial\omega^j} d(\xi)^\top N^j(\xi, \nabla_\xi) w^j(\xi)\, ds_\xi = -\int\limits_{\partial\omega^j} d(\xi)^\top N^{j\,0}(\xi, \nabla_\xi) w^{j\,0}(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= -\int\limits_{\partial\mathbb{B}_R} d(\xi)^\top D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) W^j(\xi)\, ds_\xi + O(R^{-1}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{B}_R} d(\xi)^\top L^0(\nabla_\xi) W^j(\xi)\, d\xi + O(R^{-1}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{B}_R} d(\xi)^\top (d(-\nabla_\xi) b^j + D(-\nabla_\xi)^\top c^j)\delta(\xi)\, d\xi + O(R^{-1}) =$$

$$= d(\nabla_\xi)^\top d(\xi)\Big|_{\xi=0} b^j + O(R^{-1}) = b^j + O(R^{-1}). \qquad (2.5)$$

Здесь $W^j(\xi)$ – сумма выделенных в разложении (2.2) асимптотических членов, $|\xi|^{-1}\xi$ – единичный вектор внешней нормали к сфере $\partial\mathbb{B}_R$. Кроме того, последние интегралы понимаются в смысле теории распределений, а при их вычислении применены равенство $L^0(\nabla_\xi)\Phi(\xi) = \mathbb{I}_3\delta(\xi)$, где δ – функция Дирака, и вытекающие непосредственно из определений матриц d и D соотношения

$$d(\nabla_\xi)^\top d(\xi)\Big|_{\xi=0} = \mathbb{I}_6, \quad d(\nabla_\xi)^\top D(\xi)^\top\Big|_{\xi=0} = \mathbb{O}_6,$$

$$D(\nabla_\xi)\, d(\xi) = \mathbb{O}_6, \quad D(\nabla_\xi) D(\xi)^\top = \mathbb{I}_6,$$

в которых $\mathbb{O}_6$ и $\mathbb{I}_6$ – нулевая и единичная матрицы размером 6×6.

Предельный переход $R \to +\infty$ в соотношении (2.5) устанавливает равенство (2.3). □

Замечание 2.1. Столбцы матриц $d(\xi)$ и $D(\xi)^\top$ образуют базис в двенадцатимерном пространстве линейных векторных полей в $\mathbb{R}^3$. Поэтому асимптотические члены, отделенные в разложении (2.2), представляют собой линейную комбинацию столбцов фундаментальной матрицы $\Phi(\xi)$ и их производных первого порядка. □

2. Стационарная задача теории упругости для ограниченного тела.. Очередное утверждение известно (см., например, [34, 35]). Отметим, что в силу формул (1.3) и (1.5) столбцы (1.2) деформаций и напряжений вырождаются только на жестких смещениях.

Предложение 2.2. *Пусть $f \in L_2(\Omega)^3$ и $g \in L_2(\partial\Omega)^3$. Задача*

$$L^0(\nabla_x)v(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad N^0(x, \nabla_x)v(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

где N^0 – оператор краевых условий Неймана (1.6), имеет обобщенное решение $v \in H^1(\Omega)^3$ в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega d(x)^\top f(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} d(x)^\top g(x)\, ds_x = 0 \in \mathbb{R}^6. \qquad (2.7)$$

Решение v определено с точностью до слагаемого из линеала (1.11), *но будучи подчинено условию ортогональности*

$$\int_\Omega d(x)^\top v(x)\,dx = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{2.8}$$

становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\|v; H^1(\Omega)\| \le c(\|f; L_2(\Omega)\| + \|g; L_2(\partial\Omega)\|).$$

Замечание 2.2. Поскольку граница $\partial\Omega$ гладкая, при $f{\in}H^{l-1}(\Omega)^3$, $g \in H^{l-1/2}(\partial\Omega)^3$ (пространство Соболева–Слободецкого) и $l \in \mathbb{N}$ указанное в предложении 2.2 решение v эллиптической краевой задачи (2.6) принадлежит пространству Соболева $H^{l+1}(\Omega)^3$ и для него выполнена оценка

$$\|v; H^{l+1}(\Omega)\| \le c_l(\|f; H^{l-1}(\partial\Omega)\| + \|g; H^{l-1/2}(\partial\Omega)\|).$$

При гладких вектор-функциях f и g решение становится бесконечно дифференцируемым на множестве $\overline{\Omega}$. Это обстоятельство учитывается при дальнейших построениях (см. §6), однако нужна лишь локальная (в окрестностях точек $P^1, \dots, P^J$) гладкость, которая имеется даже при липшицевой поверхности $\partial\Omega$. Аналогично для решений w^j задачи (2.1), (1.18), (1.19) требуется бесконечная дифференцируемость только вне окрестности $\mathcal{U}^j$ множества $\overline{\omega^j}$ – она обеспечена однородностью эллиптической системы (1.18) дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Следовательно, переход к липшицевым поверхностям $\partial\omega^1, \dots, \partial\omega^J$ также не вызывает осложнений. $\square$

Выкладки (2.5) также доставляют несколько используемых далее формул.

Следствие 2.1. *При любом $j = 1, \dots, J$ справедливы равенства*

$$\begin{gathered}
\int_{\partial\Omega} d(x)^\top N^0(x, \nabla_x)\Phi(x - P^j)\,ds_x = -d(P^j)^\top, \\
\int_{\partial\Omega} d(x)^\top N^0(x, \nabla_x)\left(D(-\nabla_x)\Phi(x - P^j)\right)^\top ds_x = \mathbb{O}_6, \\
\int_{\partial\Omega} d(x)^\top N^0(x, \nabla_x) d''(-\nabla_x)^\top \Phi(x - P^j) ds_x = -\begin{pmatrix} \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

3. Спектральное уравнение в составном упругом пространстве. Известно (см., например, [36]) следующее весовое неравенство Корна

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} (|\nabla_\xi w(\xi)|^2 + |\xi|^{-2}|w(\xi)|^2)d\xi \le C \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(\nabla_\xi) w(\xi)|^2 d\xi,$$
$$w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^3; \quad (2.10)$$

здесь $D(\nabla_x)$ – матрица дифференциальных операторов из (1.3), а C – абсолютная постоянная. Таким образом, пополнение линеала $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ гладких вектор-функций с компактными носителями по норме

$$|||w|||_j := \sqrt{2}\, E^j(w;\mathbb{R}^3)^{1/2} \quad (2.11)$$

совпадает с пространством Кондратьева $\mathfrak{W}^j = V_0^1(\mathbb{R}^3)^3$ (см. [29]), состоящим из вектор-функций $w \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)^3$, для которых конечен интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} (|\nabla_\xi w(\xi)|^2 + |\xi|^{-2}|w(\xi)|^2)d\xi.$$

В формуле (2.11) и далее используем следующие обозначения для энергетических функционалов:

$$\begin{aligned} E^j(w;\mathbb{R}^3) &= \frac{1}{2}(A^0 Dw, Dw)_{\mathbb{R}^3\setminus\omega^j} + \frac{1}{2}(A^j Dw, Dw)_{\omega^j}, \\ E_h(u;\Omega) &= \frac{1}{2}(A^0 Du, Du)_{\Omega(h)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}(A^j Du, Du)_{\omega_h^j}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Кроме того, $(\,,)_\Upsilon$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Upsilon)$, скалярном или векторном, а $\|\cdot; L_2(\Upsilon)\|$ – соответствующая норма. Квадратичные функционалы (2.12) порождают квадратичные формы; например,

$$E^j(w,\eta;\mathbb{R}^3) = \frac{1}{4}\left(E^j(w+\eta;\mathbb{R}^3) - E^j(w-\eta;\mathbb{R}^3)\right).$$

Под решением спектральной задачи (1.17)–(1.19) понимаем пару $\{\mu^j, w^j\}$ – комплексное число $\mu^j \in \mathbb{C}$ и нетривиальную вектор-функцию $w^j \in \mathfrak{W}^j$, удовлетворяющие при любой пробной "функции" $\eta \in \mathfrak{W}^j$ интегральному тождеству

$$2E^j(w^j,\eta;\mathbb{R}^3) = \mu^j \rho_j^0 (w^j,\eta)_{\omega^j}. \quad (2.13)$$

Пусть $\langle\,,\rangle_j$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathfrak{W}^j$, порожденное нормой (2.12). Введем новый спектральный параметр

$$\beta^j = (\mu^j)^{-1} \tag{2.14}$$

и при учете теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве преобразуем тождество (2.13) в абстрактное уравнение

$$\mathfrak{B}^j w^j = \beta^j w^j \in \mathfrak{W}^j, \tag{2.15}$$

где $\mathfrak{B}^j$ – линейный непрерывный положительный и симметрический оператор в $\mathfrak{W}^j$, заданный формулой

$$\langle \mathfrak{B}^j w^j, \eta\rangle_j = \rho_j^0 (w^j, \eta)_{\omega^j}, \quad \eta \in \mathfrak{W}^j. \tag{2.16}$$

По понятным причинам вложение $L_2(\omega^j)^3 \subset \mathfrak{W}^j$ компактно, т.е. это свойство присуще и оператору $\mathfrak{B}^j$, а значит, согласно общим результатам функционального анализа (см., например, [37]) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Задача* (1.17)–(1.19) *и уравнение* (2.15) *имеют последовательности* (1.20) *и*

$$\beta_1^j \ge \beta_2^j \ge \cdots \ge \beta_n^j \ge \cdots \to +0 \tag{2.17}$$

собственных чисел. Эти числа указаны в списках (1.20) *и* (2.17) *при учете их кратностей и связаны соотношением* (2.14). *Соответствующие собственные вектор-функции* $w^{j\,1}, w^{j\,2}, \ldots, w^{j\,n}, \ldots$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки* $\rho_0^j (w^{j\,n}, w^{j\,l})_{\omega^j} = \delta_{n,l}$, *где* $n, l \in \mathbb{N}$ *и* $\delta_{n,l}$ *– символ Кронекера.*

4. Результирующая спектральная задача общего вида. Как уже упоминалось в п. 2 §1, отдельные задачи в составных упругих пространствах $\Theta^j \cup \omega^j$ могут быть объединены интегральными операторами в единую (результирующую) спектральную задачу. Опишем ее структуру.

Пусть $\psi_{(1)}^j, \ldots, \psi_{(I)}^j$ – линейно независимые вектор-функции в подпространстве $\mathcal{R}$ жестких смещений (см. определение (1.11); при этом $I \le 6$) и $\Pi^j = (\Pi_1^j, \ldots, \Pi_I^j)^\top$,

$$\Pi_p^j w = (w, \psi_{(p)}^j)_{\omega^j}. \tag{2.18}$$

Положим

$$w_\perp^j(\xi) = w^j(\xi) - \sum_{p,q=1}^{I} \psi^j_{(p)}(\xi)(\Psi^{-1}_{(j)})_{pq}\Pi^j_q w^j,$$

где $(\Psi^{-1}_{(j)})_{pq}$ – элементы матрицы $\Psi^{-1}_{(j)}$, обратной для матрицы Грама

$$\Psi_{(j)} = \left(\int\limits_{\omega^j} \psi^j_{(q)}(\xi)^\top \psi^j_{(p)}(\xi)\, d\xi \right)^{I}_{p,q=1},$$

симметрической и положительно определенной ввиду линейной независимости вектор-функций $\psi^j_{(1)}, \dots, \psi^j_{(I)}$. Следующие равенства очевидны:

$$\begin{gathered} \Pi^j w^j_\perp = 0 \in \mathbb{R}^I, \quad D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = D(\nabla_\xi) w^j_\perp, \\ (w^j, \eta^j)_{\omega^j} = (w^j_\perp, \eta^j_\perp)_{\omega^j} + (\Psi^{-1}_{(j)}\Pi^j w^j, \Pi^j\eta^j)_{\mathbb{R}}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Здесь и далее $(\,,)_{\mathbb{R}}$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^I$; как и всюду в статье размерность пространства не указывается в обозначениях скалярных произведений и норм.

Пусть $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}^{kq}_{jp})^{J,I}_{j,k=1,p,q=1}$ – симметрическая положительно определенная матрица размером $JI \times JI$, т.е.

$$\mathfrak{T}^{kq}_{jp} = \mathfrak{T}^{jp}_{kq}, \qquad \sum_{j,k=1}^{J} \sum_{p,q=1}^{I} \mathfrak{T}^{kq}_{jp}\, \xi_{jp}\, \xi_{kq} \geq c \sum_{j=1}^{J} \sum_{p=1}^{I} |\xi_{jp}|^2 \tag{2.20}$$

при любой матрице $\xi = (\xi_{jp})^{J,I}_{j=1,p=1} \in \mathbb{R}^{J\times I}$, причем c – положительная постоянная. В пространстве

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^1 \times \dots \times \mathfrak{W}^J \ni \mathfrak{w} := (w^1, \dots, w^J)^\top \tag{2.21}$$

введем оператор $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}^1, \dots \mathfrak{P}^J)^\top$,

$$\mathfrak{P}^j \mathfrak{w} = \rho^j_0 \left(w^j - \sum_{k=1}^{J} \sum_{p,q=1}^{I} \Psi^j_p \mathfrak{T}^{kq}_{jp} \Pi^k_q w^k \right), \tag{2.22}$$

и совокупность $(j = 1, \dots, J)$ задач, состоящих из систем (1.18) и систем интегро-дифференциальных уравнений

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \mu \left(\mathfrak{P}^j \mathfrak{w}\right)(\xi), \quad \xi \in \omega^j, \tag{2.23}$$

которые связаны условиями сопряжения (1.19). Далее такую задачу кратко обозначаем $(\star)$.

Теорема 2.2. *Спектр задачи* ($\star$) *состоит из вещественных собственных чисел. Если* $JI \times JI$-*матрица*

$$\operatorname{diag}\left(\rho_1^0 \Psi_{(1)}^{-1}, \dots, \rho_J^0 \Psi_{(J)}^{-1}\right) - \mathfrak{T} \tag{2.24}$$

неотрицательна (ср. формулу (2.20)*), то названные собственные числа* $\mu_1, \mu_2, \dots$ *образуют последовательность* (1.21)*, а соответствующие собственные векторы* $\mathfrak{w}^n = \left(w^{1n}, \dots, w^{Jn}\right)^\top$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$\sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \left((w^{jn}, w^{jl})_{\omega^j} - \sum_{k=1}^{J} \sum_{p,q=1}^{I} \Pi_p^j w^{jn} \mathfrak{T}_{jp}^{kq} \Pi_q^k w^{kl} \right) = \delta_{n,l}, \qquad n, l \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Интегральное тождество, обслуживающее задачу ($\star$), выводится следующим образом (см., например, [34]): системы (1.23) и (1.18) умножаются скалярно на вектор-функции $\eta^j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ и для результата применяется формула Грина при учете условий сопряжения (1.19) и соотношений (2.18)–(2.19). В итоге приходим к равенству

$$2 \sum_{j=1}^{J} E^j(w^j, \eta^j; \mathbb{R}^3) = \mu \mathfrak{q}(\mathfrak{w}, \mathfrak{y}), \tag{2.26}$$

где $\mathfrak{w} = (w^1, \dots, w^J)^\top, \mathfrak{y} = (\eta^1, \dots, \eta^J)^\top$ и $\mathfrak{q}(\mathfrak{w}^n, \mathfrak{w}^l)$ – левая часть соотношения (2.25). Согласно неравенству Корна (2.10), определению (2.12) и предположению о положительной определенности числовых матриц в формуле (1.4) выражение слева в (2.26) представляет собой скалярное произведение $\langle\, , \rangle_{\mathfrak{W}}$ в гильбертовом пространстве (2.21), а значит, по замыканию пробную "функцию" $\mathfrak{y}$ в тождестве (2.26) можно считать элементом пространства $\mathfrak{W}$. Кроме того, по теореме Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве аналогичное (2.16) равенство

$$\langle \mathfrak{Q} \mathfrak{w}, \mathfrak{y} \rangle_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{q}(\mathfrak{w}, \mathfrak{y}), \quad \mathfrak{y} \in \mathfrak{W},$$

определяет линейный, непрерывный, симметрический и компактный оператор $\mathfrak{Q}$ в пространстве $\mathfrak{W}$. Поскольку тождество (2.26) эквивалентно абстрактному уравнению

$$\mathfrak{Q} \mathfrak{w} = \mu^{-1} \mathfrak{w} \in \mathfrak{W},$$

первая часть утверждения подтверждена общими результатами о спектре операторов с перечисленными свойствами (см., например, [37]). Осталось убедиться в том, что условие неотрицательности, наложенное на матрицу (2.24), обеспечивает положительность собственных чисел – попутно устанавливается возможность произвести нормировку (2.25) собственных векторов.

Пусть μ и $\mathfrak{w} \neq 0$ – собственные число и вектор задачи ($\star$). При учете формул (2.19) и (2.22) получаем

$$\begin{gathered}0 < \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle_{\mathfrak{W}} = \mu \mathsf{q}(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}) = \\ = \mu \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \left(\| w_\perp^j ; L_2(\omega^j) \|^2 + \left(\Psi_{(j)}^{-1} \Pi^j w^j, \Pi^j w^j \right)_{\mathbb{R}} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{J} \left(\mathfrak{T}_j^k \Pi^k w^k, \Pi^j w^j \right)_{\mathbb{R}} \right) ;\end{gathered} \tag{2.27}$$

здесь $\mathfrak{T}_j^k = \left(\mathfrak{T}_{jp}^{kq} \right)_{p,q=1}^{I}$ – $I \times I$-блок матрицы $\mathfrak{T}$. Ввиду сделанного предположения о матрице (2.24) множитель S при μ в правой части (2.27) неотрицателен, а значит, достаточно проверить, что он не может обратиться в нуль. Пусть $S = 0$; тогда $w_\perp^j = 0$ в силу предположения о матрице (2.24), т.е. сужение полей w^j на включения ω^j суть жесткие смещения и $D(\nu^j)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j = 0$ на поверхностях $\partial\omega^j$. Таким образом, в силу условий сопряжения (1.21) и формулы Грина имеем

$$0 = \int\limits_{\partial\omega^j} w^{j\,0}(\xi)^\top D(\nu^j(\xi))^\top A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}(\xi)\, ds_\xi = -2E^j(w^{j\,0}; \mathbb{R}^3 \setminus \omega^j).$$

Следовательно, $w^{j\,0} \in \mathcal{R}$ и вектор-функция $w^{j\,0}$ нулевая по причине ее затухания на бесконечности. Наконец, поле w^j удовлетворяет однородным условиям Дирихле и Неймана на границе $\partial\omega^j$ и является решением эллиптической системы дифференциальных уравнений в области ω^j, т.е. $w^j = 0$ и нужное противоречие получено. $\square$

Проверка сформулированного в теореме 2.2 условия для конкретных матриц $\mathfrak{T}$, возникающих в следующих трех параграфах, проводится при помощи простой леммы – далее к этому вопросу не возвращаемся.

Лемма 2.1. *Пусть $T^1, \dots, T^J$ – числовые матрицы размером $n \times q$ и $T = (T^1, \dots, T^J)$ – $n \times Jq$-матрица. Если $TT^\top$ – неособенная $n \times n$-матрица (линейная оболочка строк матриц T^j заполняет евклидово пространство $(\mathbb{R}^n)^\top$), то матрица*

$$\mathbb{I}_{qJ} - \mathbf{T} := \mathbb{I}_{qJ} - T^\top (TT^\top)^{-1} T \tag{2.28}$$

размером $qJ \times qJ$ является неотрицательной.

Доказательство. Сама матрица $\mathbf{T}$ симметрическая и неотрицательная. Пусть β – ее собственное число и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{qJ} \setminus \{0\}$ – собственный столбец. Умножим равенство $\mathbf{T}\mathbf{b} = \beta\mathbf{b}$ слева на T и согласно определению $\mathbf{T}$ получим, что $T\mathbf{b} = \beta T\mathbf{b}$. Следовательно, $\beta = 1$ (в случае $T\mathbf{b} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$) или $\beta = 0$ (так как из равенства $T\mathbf{b} = 0$ вытекает, что $\mathbf{T}\mathbf{b} = 0$). Утверждения о матрице (2.28) стало очевидным. □

3. Асимптотические анзацы и результирующие задачи в случае очень тяжелых включений

1. Условие треугольника.. Если выполнено требование (iii) из п. 4 §1, то при любой вектор-функции $f \in L_2(\Omega)^3$ можно подобрать столбцы $b^{1\prime}, \dots, b^{J\prime} \in \mathbb{R}^3$ так, чтобы задача (2.6) с правыми частями f и

$$g^1(x) = -\sum_{j=1}^{J} N^0(x, \nabla_x)\Phi(x - P^j) b^{j\prime} \tag{3.1}$$

имела решение, указанное в предложении 2.2. Этот факт, вытекающий из леммы 1.1 и первой формулы (2.9), предопределяет следующий асимптотический анзац для собственного вектора u задачи (1.5)–(1.7):

$$u(x) \sim d(x)b^0 + hv^1(x) + \sum_{j=1}^{J} w^j \left(h^{-1}(x - P^j)\right). \tag{3.2}$$

Здесь d – матрица (1.12), $b^0 \in \mathbb{R}^6$, т.е. первое слагаемое справа – жесткое смещение, а $w^1, \dots, w^J$ – исчезающие на бесконечности вектор-функции, которые вместе со столбцом b^0 подлежат дальнейшему определению. Кроме того, v^1 – поле в области Ω, обеспечение ограниченности которого (и ему подобных) является одним из центральных моментов асимптотической процедуры.

Подставим анзац (3.2) в систему уравнений (1.5) и условия сопряжения (1.7). После замены (1.16) спектрального параметра соберем главные асимптотические члены и получим систему дифференциальных уравнений (1.18) в $\Theta^j = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega^j}$, условия сопряжения (1.19) на $\partial\omega^j$, а также следующую систему уравнений на включении ω^j единичного размера:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \mu\rho_j^0 (w^j(\xi) + d(P^j)b^0), \quad \xi \in \omega^j. \qquad (3.3)$$

Пусть w^j – затухающее при $|\xi| \to \infty$ решение задачи (3.3), (1.18), (1.19) для какого-либо значения спектрального параметра μ. Тогда согласно предложению 2.1 справедливо укороченное разложение (2.2)

$$w^{j\,0}(\xi) = \Phi(\xi) b^{j\prime} + O(|\xi|^{-2}), \qquad (3.4)$$

в котором в силу формул (2.2), (2.3) и (3.3) столбец $b^{j\prime} \in \mathbb{R}^3$ имеет вид

$$b^{j\prime} = \mu\rho_j^0 \left(\int\limits_\omega w^j(\xi)\, d\xi + \mathrm{mes}_3(\omega^j) d(P^j) b^0 \right). \qquad (3.5)$$

Поскольку фундаментальная матрица Φ положительно однородна степени -1, вне окрестности точки P^j выполнено представление

$$w^{j\,0}(h^{-1}(x - P^j)) = h\Phi(x - P^j) b^{j\prime} + O(h^2). \qquad (3.6)$$

Отделенное в правой части (3.6) слагаемое оставляет в краевых условиях невязку $hg^1(x)$, которая определена равенством (3.1) и которую нужно компенсировать при помощи составляющей v^1 регулярного типа. Вспомнив, что $L^0(\nabla_x)\Phi(x - P^j) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \{P^j\}$, видим, что в случае

$$m > 1 \qquad (3.7)$$

невязки, порожденные в системе (1.5) на теле $\Omega(h)$ слагаемым

$$\Lambda\rho_0 \left(d(x) b^0 + w^{j\,0}(h^{-1}(x - P^j)) \right) \sim$$
$$\sim h^m \mu\rho_0 \left(d(x) b^0 + h\Phi(x - P^j) b^{j\prime} \right) \qquad (3.8)$$

не нужно учитывать в дифференциальных уравнениях на области Ω для вектор-функции v^1. Итак, v^1 – решение задачи (2.6) с правыми частями (3.1) и $f^1 = 0$. При $\mu \neq 0$ благодаря формулам (2.9) и (3.5) условия разрешимости (2.7) указанной задачи можно записать в виде системы алгебраических уравнений

$$\mathcal{M} b^0 = \mathcal{F} \in \mathbb{R}^6, \tag{3.9}$$

в которой $\mathcal{M}$ – симметрическая 6×6-матрица,

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \mathrm{mes}_3(\omega^j) d(P^j)^\top d(P^j), \tag{3.10}$$

$$\mathcal{F} = -\sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \, d(P^j)^\top \int\limits_{\omega^j} w^j(\xi) \, d\xi. \tag{3.11}$$

Следующее утверждение – частный случай леммы 1.2 (1), где $Q^{j\prime\prime} = \mathbb{I}_3 \mathrm{mes}_3(\omega^j)$.

Лемма 3.1. *При условии* (iii) *из п.* 4§1 *матрица* (3.10) *положительно определена.*

Система (3.9) дает столбец $b^0 \in \mathbb{R}^6$. В результате дифференциальные уравнения (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} &D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \\ &\quad = \mu \rho_j^0 \left(w^j(\xi) - d(P^j) \mathcal{M}^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho_k^0 \, d(P^k)^\top \int\limits_{\omega^k} w^k(\eta) \, d\eta \right), \\ &\qquad \xi \in \omega^j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Интегральное слагаемое, присутствующее в последней формуле, собирает все задачи (3.12), (1.18), (1.19) в единую результирующую спектральную задачу.

2. Единственное включение. В случае (i) из п. 4 §1 асимптотический анзац выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x) \sim{}& h^{-1} d''(x) b^{0\prime\prime} + b^{0\prime} + d''(x) b^{0\prime\prime}_{(1)} + \\ &+ h v^1(x) + h^2 v^2(x) + w^1(h^{-1}x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Теперь на первом шаге асимптотической процедуры определяем столбец $b^0 \in \mathbb{R}^6$ и вектор-функцию w^1, исчезающую при $|\xi| \to \infty$.

При этом вращательное жесткое смещение $d''(x)b^{0''}_{(1)}$ написано в формуле (3.13) для полноты картины, а единственная забота о полях v^1 и v^2 в области Ω – добиться их ограниченности. Напоминаем, что $b^{0\prime} = (b^0_1, b^0_2, b^0_3)^\top$ и $b^{0\prime\prime} = (b^0_4, b^0_5, b^0_6)^\top$ – две половинки столбца $b^0 = (b^0_1, \dots, b^0_6)^\top$.

Из-за первого слагаемого $h^{-1}d''(x)b^{0''} = d''(\xi)b^{0''}$ в правой части (3.13) (точка P^1 совмещена с началом координат $\mathcal{O}$; см. п. 4 §1) система дифференциальных уравнений (3.3) на включении ω^j трансформируется в такую:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^1 D(\nabla_\xi) w^1(\xi) = \mu\rho^0_1 \left(w^1(\xi) + d(\xi)b^0\right), \quad \xi \in \omega^1. \qquad (3.14)$$

Ее затухающее решение допускает представление (2.2), в котором столбец b^1 благодаря формуле (2.3) принимает вид

$$b^1 = \mu\rho^0_1 \left(\int\limits_{\omega^1} d(\xi)^\top w^1(\xi)\, d\xi + \mathbf{d}(\omega^1) b^0 \right), \qquad (3.15)$$

где $\mathbf{d}(\omega)$ – симметрическая и положительно определенная матрица Грама размером 6×6,

$$\mathbf{d}(\omega) = \int\limits_{\omega} d(\xi)^\top\, d(\xi)\, d\xi. \qquad (3.16)$$

Возвращаясь к медленным переменным x, находим, что

$$w^1(h^{-1}x) = h\Phi(x)b^{1\prime} + h^2 \left(b^{1\prime\prime\top}\, d''(-\nabla_x)^\top \Phi(x)\right)^\top +$$
$$+ h^2 \left(c^{1\top} D(-\nabla_x)^\top \Phi(x)\right)^\top + O(h^3).$$

Следовательно, правые части краевых условий Неймана на границе $\partial\Omega$ для составляющих v^1 и v^2 регулярного типа заданы формулами

$$\begin{aligned} g^1(x) &= -N^0(x, \nabla_x)\Phi(x) b^{1\prime}, \\ g^2(x) &= -N^0(x, \nabla_x) \left(\left(b^{1\prime\prime\top}\, d''(-\nabla_x)\Phi(x)\right)^\top + \right. \\ &\quad \left. + \left(c^{1\top} D(-\nabla_x)^\top \Phi(x)\right)^\top \right) + \dots, \end{aligned} \qquad (3.17)$$

где многоточие заменяет слагаемые, которые могут возникнуть при учете младших членов пограничного слоя. В случае

$$m > 3 \qquad (3.18)$$

выражение

$$\Lambda\rho_0\left(h^{-1}\,d''(x)b^{0\prime\prime}+\right.$$
$$\left.+b^{0\prime}+d''(x)b^{1\prime\prime}+w^1(h^{-1}x)\right)\sim\mu\rho_0 h^{m-1}\,d''(x)b^{0\prime\prime}\quad(3.19)$$

не привносит невязок в уравнение на области Ω для младших асимптотических членов v^1 и v^2. Применим следствие 2.1 для анализа условий разрешимости получившихся задач (2.6) с правыми частями $f^1=0$, $f^2=0$ и (3.17). Главный момент нагрузки g^1 обращается в нуль автоматически, а ее главный вектор аннулируется тогда и только тогда, когда выполнено равенство $b^{1\prime}=0\in\mathbb{R}^3$ (ср. с первой формулой (2.9)). Обращение в нуль главного момента нагрузки g^2 требует, чтобы $b^{1\prime\prime}=0\in\mathbb{R}^3$ (ср. вторую и третью формулы (2.9)), а заботиться об уничтожении ее главного вектора сейчас не нужно – это можно сделать на следующем шаге асимптотической процедуры путем подбора столбца $b^{0\prime\prime}_{(1)}$ (многоточие в соотношении (3.17)). В итоге весь столбец $b^1\in\mathbb{R}^6$ должен быть нулевым, а значит, в силу равенства (3.15) система (3.14) принимает вид

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^1 D(\nabla_\xi)w^1(\xi)=$$
$$=\mu\rho_1^0\left(w^1(\xi)-d(\xi)\mathbf{d}(\omega^1)^{-1}\int\limits_{\omega^1}d(\eta)^\top w^1(\eta)d\eta\right),\quad \xi\in\omega^1.\quad(3.20)$$

Задача (3.20), (1.18), (1.19) вполне аналогична результирующей спектральной задаче, полученной в [6] для скалярного дифференциального уравнения.

3. Несколько включений на одной прямой. Пусть $J\geq 2$ и точки $P^1,\dots,P^J$ лежат на оси аппликат (ср. условие (ii) из п. 4 §1). Асимптотический анзац

$$u(x)\sim h^{-1}\,d_6(x)b_6^0+d^\bullet(x)b^{0\bullet}+d_6(x)b^0_{(1)6}+hv^1(x)+$$
$$+h^2v^2(x)+\sum_{j=1}^J w^j(h^{-1}(x-P^j))\quad(3.21)$$

весьма похож на анзац (3.13), но в нем введены новые обозначения: $d^\bullet(x)$ – 3×5-матрица, полученная вычеркиванием из матрицы (1.12) последнего столбца $d_6(x)$, и $b^{0\bullet}=(b_1^0,\dots,b_5^0)^\top$. Таким образом, система (2.14) принимает вид

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \\ = \mu\rho_j^0 \left(w^j(\xi) + d(P^j)b^0 + d_6(\xi)b_6^0\right), \quad \xi \in \omega^j. \quad (3.22)$$

Исчезающее на бесконечности решение задачи (3.22), (1.18), (1.19) допускает представление (2.2), в котором

$$b^{j\#} := (b_1^j, b_2^j, b_3^j, b_6^j)^\top = \quad (3.23)$$

$$= \mu\rho_j^0 \left(\int\limits_{\omega^j} d^\#(\xi)^\top w^j(\xi) d\xi + \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 \mathrm{mes}_3(\omega^j) \\ \varphi(\omega^j)^\top \end{pmatrix} d(P^j) b^0 + \begin{pmatrix} \varphi(\omega^j) \\ \theta_3(\omega^j) \end{pmatrix} b_6^0 \right).$$

При этом

$$\varphi(\omega^j) = \int\limits_{\omega^j} d_6(\xi)\, d\xi,$$
$$\theta_3(\omega^j) = \int\limits_{\omega^j} d_6(\xi)^\top d_6(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int\limits_{\omega^j} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\, d\xi, \quad (3.24)$$

а матрица (1.23) с ингредиентами $Q^{j\prime\prime} = \mathbb{I}_3 \mathrm{mes}_3(\omega^j)$, $Q^{j\prime} = \varphi(\omega^j)$ и $Q_4^j = \theta_3(\omega^j)$ является матрицей Грама, построенной при помощи скалярного произведения в $L_2(\omega^j)^4$ по (линейно независимым) столбам d_1, d_2, d_3, d_6 матрицы-функции (1.12). Эти столбцы составляют матрицу $d^\#(\xi)$, фигурирующую в интеграле из формулы (3.23), имеющую размеры 3×4 и получающуюся вычеркиванием из матрицы $d(\xi)$ четвертого и пятого столбцов.

Замечание 3.1. Если начало декартовой системы координат ξ^j совмещено с центром тяжести тела ω^j, а оси направлены вдоль главных осей тензора моментов инерции, то матрица Грама (3.16) становится диагональной:

$$\mathbf{d}(\omega^j) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{mes}_3(\omega^j), \mathrm{mes}_3(\omega^j), \mathrm{mes}_3(\omega^j), \theta_1(\omega), \theta_2(\omega), \theta_3(\omega)\right);$$

здесь $\mathrm{mes}_3(\omega^j)$ – объем тела ω^j, а $\theta_p(\omega)$ – его момент инерции вращения вокруг оси ξ_p^j. В этом же случае интеграл $\varphi(\omega^j)$ из формулы (2.24) аннулируется, а матрица $\mathbf{d}^\#(\omega^j)$, полученная вычеркиванием из матрицы $\mathbf{d}(\omega^j)$ четвертых и пятых строк и столбцов, совпадает с упомянутой выше матрицей $N^{j\prime\prime}$. □

Как и в предыдущем разделе, при условии (3.18) вектор-функции v^1 и v^2 должны быть решениями задач (2.6) с правыми частями $f^1 = 0$ и $f^2 = 0$ (выражение (3.19) оказывается бесконечно малой более высокого порядка) и

$$g^1(x) = -N^0(x, \nabla_x) \sum_{j=1}^{J} \Phi(x - P^j) b^{j\prime},$$

$$g^2(x) = -N^0(x, \nabla_x) \sum_{j=1}^{J} \big((b^{j\prime\prime\top} d''(-\nabla_x) \Phi(x - P^j))^\top + \tag{3.25}$$

$$+ (c^{j\top} D(-\nabla_x)^\top \Phi(x - P^j))^\top \big) + \dots$$

(ср. с соотношениями (3.17)). Предложение 2.2 и первая из формул в следствии 2.1, примененные к задаче (2.6) для члена v^1 анзаца (3.21), дают условие ее разрешимости

$$\sum_{j=1}^{J} d(P^j)^\top b^{j\prime} = 0. \tag{3.26}$$

Из шести условий разрешимости аналогичной задачи для v^2 отберем равенство

$$b_6^1 + \dots + b_6^J = 0, \tag{3.27}$$

означающее, что обращается в нуль третья компонента главного момента нагрузки g^2. Ее главный вектор и две других компоненты главного момента можно компенсировать за счет выбора в анзаце (3.21) столбца $b_{(1)}^{0\bullet} \in \mathbb{R}^5$, порождающего жесткое смещение $d^\bullet(x) b_{(1)}^{0\bullet}$, с точностью до которого и определяется решение v^1.

Используя 4×6-матрицу $\widehat{d}(P^j)$, введенную в формуле (1.25) (см. лемму 1.2 (2)), переписываем соотношения (3.26) и (3.27) в виде системы шести алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{J} \widehat{d}(P^j)^\top b^{j\#} = 0. \tag{3.28}$$

Подчеркнем, что последний элемент столбца и левой части (3.26) равен нулю, так как $P_1^j = P_2^j = 0$ при $j = 1, \dots, J$ (см. п. 4 §1), и в формуле (3.28) он заменен суммой из левой части (3.27).

Подставим выражения (3.23) в соотношение (3.28) и перепишем его в форме алгебраической системы (3.9), в которой

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \, \widehat{d}(P^j)^\top \mathbf{d}^\#(\omega^j) \widehat{d}(P^j), \tag{3.29}$$

$$\mathcal{F} = -\sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \widehat{d}(P^j)^\top \int\limits_{\omega^j} d^\#(\xi)^\top w^j(\xi)\, d\xi.$$

По лемме 1.2 (2) матрица $\mathcal{M}$ размером 6×6 является положительно определенной, симметрической и, значит, неособенной. Найдем столбец b^0 из системы (3.9) и подставим его в дифференциальные уравнения (3.22). При учете легко проверяемой формулы

$$d^\#(\xi)\widehat{d}(P^j)b^0 = d(P^j)b^0 + d_6(\xi)b_6^0$$

получаем такую систему дифференциальных уравнений:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) =$$
$$= \mu\rho_j^0 \left(w^j(\xi) - d^\#(\xi)\widehat{d}(P^j)\mathcal{M}^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho_k^0 \int\limits_{\omega^k} (d^\#(\eta)\widehat{d}(P^k))^\top w^k(\eta)\, d\eta \right), \quad \xi \in \omega^j. \tag{3.30}$$

Соотношения (3.30), (1.18), (1.19) при $j = 1, \ldots, J$, связанные перекрестными интегральными членами, образуют искомую результирующую спектральную задачу.

4. Недостаточно тяжелые включения

1. Случай $m \in (0,1)$**.** Вне зависимости от расположения точек $P^1, \ldots, P^J$ возьмем следующий асимптотический анзац:

$$u(x) \sim h^{1-m} d(x) b^0 + h v^1(x) + \sum_{j=1}^{J} w^j \left(h^{-1}(x - P^j)\right). \tag{4.1}$$

Поскольку показатели степени параметра h при слагаемых регулярного типа положительны, вектор-функции w^j должны удовлетворять спектральным задачам (1.17)–(1.19), последовательности (1.20) собственных чисел которых вычисляются порознь и лишь затем объединяются в общую последовательность (1.21). Если элемент μ_n последовательности (1.21) является собственным числом задачи (1.18)–(1.19) при $j = j_1, \dots, j_\varkappa$ и не является при $j = j_{\varkappa+1}, \dots, j_J$, то в качестве $w^{j_1}, \dots, w^{j_\varkappa}$ берем соответствующие собственные вектор-функции, фиксируемые произвольно, а при $j = j_{\varkappa+1}, \dots, j_J$ имеем $w^j(\xi) = 0$ и $b^j = c^j = 0$ (столбцы коэффициентов в разложениях (2.2)).

Покажем, как определяется в анзаце (4.1) столбец $b^0 \in \mathbb{R}^6$ и поле v^1, по-прежнему ограниченное на множестве $\overline{\Omega}$. Главный член невязки членов пограничного слоя имеет вид (3.1). При учете замены (1.16) спектрального параметра находим, что

$$\Lambda\rho_0 \left(h^{1-m}\, d(x)b^0 + hv^1(x) + \sum_{j=1}^{J} w^j \left(h^{-1}(x - P^j) \right) \right) \sim \tag{4.2}$$

$$\sim h^m \mu\rho_0 \left(h^{1-m}\, d(x)b^0 + hv^1(x) + h\sum_{j=1}^{J} \Phi(x - P^j) b^{j\prime} \right) \sim h\mu\rho_0\, d(x)b^0.$$

Этот главный член невязки в системе уравнений (1.5), суженных на тело $\Omega(h)$ (см. определения (1.1)), должен быть уничтожен при решении задачи для v^1, т.е.

$$f^1(x) = \mu\rho_0\, d(x)b^0. \tag{4.3}$$

Согласно предложению 2.2 и следствию 2.1 ограниченное решение v^1 задачи (2.6) с правыми частями (4.3) и (3.1) существует в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$\mathbb{R}^6 \ni 0 = \int_{\Omega} d(x)^\top f^1(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} d(x)^\top g^1(x)\, ds_x =$$

$$= \mu\rho_0 \mathbf{d}(\Omega) b^0 + \sum_{j=1}^{J} d(P^j)^\top b^{j\prime}.$$

Здесь $\mathbf{d}(\Omega)$ – матрица Грама (3.16), симметрическая и положительно определенная. Таким образом, ограниченное поле смещений v^1 удается построить при условии, что столбец b^0, порождающий жесткое смещение $d(x)b^0$ – главный член регулярного типа в асимптотическом анзаце (4.1), задан формулой

$$b^0 = -\mu^{-1}\rho_0^{-1}\mathbf{d}(\Omega)^{-1}\sum_{j=1}^{J} d(P^j)^\top b^{j\prime}.$$

На этом построение основного асимптотического конгломерата заканчивается.

2. Случай $m \in (1,3)$ в геометрической ситуации (i). Пусть $J = 1$. Анзац (3.13), использованный при $m > 3$, превращаем в такой:

$$\begin{aligned} u(x) \sim h^{2-m} d''(x) b^{0\prime\prime} + b^{0\prime} + d''(x) b^{0\prime\prime}_{(1)} + \\ + h v^1(x) + h^2 v^2(x) + w^1(h^{-1}x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку показатель степени параметра h в первом слагаемом из правой части (4.4) строго больше -1, величина $h^{2-m}d''(x)b^{0\prime\prime}$ есть бесконечно малая $O(h^{2-m}h) = o(1)$ на включении ω_h^1, а значит, предельная система (3.14) упрощается:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^1 D(\nabla_\xi) w^1(\xi) = \mu\rho_1^0 (w^1(\xi) + b^{0\prime}), \quad \xi \in \omega^1. \tag{4.5}$$

Исчезающее на бесконечности решение задачи (4.5), (1.18), (1.19) допускает представление (2.2), в котором

$$b^1 = \mu\rho_1^0 \left(\int\limits_{\omega^1} d(\xi)^\top w^1(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\omega^1} d(\xi)^\top\, d\xi b^{0\prime} \right). \tag{4.6}$$

Таким образом, главные члены невязок в краевых условиях (1.6) сохраняют вид (3.17), и аналогично выкладкам (4.2) получаем, что

$$\begin{aligned} \Lambda(h)\rho_0 \Big(h^{2-m}\, d''(x) b^{0\prime\prime} + b^{0\prime} + d''(x) b^{0\prime\prime}_{(1)} + \\ + h v^1(x) + h^2 v^2(x) + h w^1(h^{-1}x) \Big) \sim \\ \sim \mu\rho_0 \Big(h^2\, d''(x) b^{0\prime\prime} + h^m (b^{0\prime} + d''(x) b^{0\prime\prime}_{(1)}) \Big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$f^1(x) = 0, \quad f^2(x) = \mu\rho_0\, d''(x) b^{0\prime\prime} + \ldots. \tag{4.8}$$

В силу предложения 2.2 и формул (2.9) условия разрешимости задачи (2.6) с правыми частями g^1 и f^1 эквивалентны равенству $b^{1\prime} = 0$. Итак, при учете соотношений (4.6) и (1.12) находим

$$b^{0\prime} = -(\mathrm{mes}_3\omega^1)^{-1} \int\limits_{\omega^1} w^1(\xi)\, d\xi,$$

а значит, система дифференциальных уравнений (4.5) принимает вид

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^1 D(\nabla_\xi) w^1(\xi) = \\ = \mu\rho_1^0 \left(w^1(\xi) - (\mathrm{mes}_3\omega^1)^{-1} \int\limits_{\omega^1} w^1(\eta)\, d\eta \right), \quad \xi \in \omega^j. \quad (4.9)$$

Обращение в нуль главного момента указанных в формулах (3.17) и (4.8) нагрузок f^2 и g^2 (три условия разрешимости задачи для v^2) позволяют найти столбец $b^{0\prime\prime}$ в первом члене анзаца (4.4):

$$\mu\rho_0 \mathbf{d}''(\Omega) b^{0\prime\prime} + b^{1\prime\prime} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^{0\prime\prime} = -\mu^{-1}\rho_0^{-1}\mathbf{d}''(\Omega)^{-1} b^{1\prime\prime} =$$

$$= -\rho_1^0\rho_0^{-1}\mathbf{d}''(\Omega)^{-1} \int\limits_{\omega^1} d''(\xi)^\top \left(w^1(\xi) - (\mathrm{mes}_3\omega^1)^{-1} \int\limits_{\omega^1} w^1(\eta)\, d\eta \right) d\xi.$$

Здесь $\mathbf{d}''(\Omega)$ – нижний правый 3×3-блок матрицы (3.16).

Как и в предыдущем параграфе, на первом шаге асимптотической процедуры не нужно заботиться об уничтожении главного вектора нагрузок f^2 и g^2 – это делается на следующем шаге посредством выбора поступательного жесткого смещения $b^{0\prime}_{(1)}$, входящего в качестве слагаемого в поле v^1. То же касается и члена $f^m(x) := \mu\rho_0 \left(b^{0\prime} + d''(x) b^{0\prime\prime}_{(1)} \right)$ из соотношения (4.7): оно компенсируется при помощи асимптотического конгломерата

$$h^1 d''(x) b^{0\prime\prime}_{(m)} + h^{m-1} b^{0\prime}_{(m)} + h^m v^m(x) + h^{m+1} v^{m+1}(x) + h^m w_{(m)}(h^{-1}x),$$

который в силу предположения $m > 1$ имеет меньший порядок, чем конгломерат, указанный в анзаце (4.4). Отметим, что при $m = 2$ обсуждаемое слагаемое присоединяется к вектор-функции f^2, т.е. в формуле (4.8) этот несущественный член обозначен многоточием.

3. Случай $m \in (1,3)$ в геометрической ситуации (ii). Если $J > 2$ и точки $P^1, \ldots, P^J$ лежат на оси аппликат, то в целом асимптотическая процедура остается такой же, как в предшествующем разделе, и только изменяется вид вращения $d_6(x)b_6^0$, которое приходится отщеплять от жесткого смещения $d(x)b^0$. В согласии с прежними формулами (3.21) и (3.13), (4.4) положим

$$u(x) \sim h^{2-m} d_6(x)b_6^0 + d^\bullet(x)b^{0\bullet} + d_6 b_{(1)6}^0 + hv^1(x) + \\ + h^2 v^2(x) + \sum_{j=1}^{J} w^j(h^{-1}(x - P^j)). \tag{4.10}$$

Опишем конспективно, как определяются члены асимптотического анзаца (4.10).

Предельные системы (3.22) упрощаются следующим образом:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \\ = \mu\rho_j^0 (w^j(\xi) + d^\bullet(P^j)b^{0\bullet}), \quad \xi \in \omega^j. \tag{4.11}$$

Столбец b^j в разложении (2.2) затухающих на бесконечности решений w^j задачи (4.11), (1.18), (1.19) вычисляется по формуле

$$b^j = \mu\rho_j^0 \left(\int_{\omega^j} d(\xi)^\top w^j(\xi)\, d\xi + \int_{\omega^j} d(\xi)^\top d\xi\, d^\bullet(P^j) b^{0\bullet} \right). \tag{4.12}$$

Правые части краевых условий в задачах (2.6) для вектор-функций v^1 и v^2 приобретают вид (3.25), а правые части уравнений равновесия – вид

$$f^1(x) = 0, \quad f^2(x) = \mu\rho_0\, d_6(x) b_6^0. \tag{4.13}$$

Таким образом, условие существование ограниченного поля v^1 доставляет равенство

$$0 = \sum_{j=1}^{J} b^{j\prime} = \mu \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \left(\int_{\omega^j} w^j(\xi)\, d\xi + \mathrm{mes}_3(\omega^j) d^\bullet(P^j) b^{0\bullet} \right) \tag{4.14}$$

и тем самым переделывает систему уравнений (4.11) в такую:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \\ = \mu\rho_j^0 \left(w^j(\xi) - \upsilon^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho_k^0 \int_{\omega^k} w^k(\eta)\, d\eta \right), \quad \xi \in \omega^j. \tag{4.15}$$

При этом υ – приведенный (ср. формулы (1.8) и (1.9)) суммарный вес включений:

$$\upsilon = \rho_1^0 \mathrm{mes}_3(\omega^1) + \dots + \rho_J^0 \mathrm{mes}_3(\omega^J).$$

Разумеется, задачи (4.15), (1.18), (1.19) при $j = 1, \dots, J$ связаны интегральными операторами в правых частях систем на включениях ω^j.

Наконец, обращение в нуль проекции на ось аппликат момента нагрузок f^2 и g^2 позволяет найти компоненту b_6^0 столбца b^0. Именно, упомянутая проекция равна $\mu\rho_0\theta_3(\Omega)b_6^0 + b_6^1 + \dots + b_6^J$, т.е. в силу соотношений (4.12) и (4.14) имеем

$$b_6^0 = -\rho_0^{-1}\theta_3(\Omega)^{-1} \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \int\limits_{\omega^j} d_6(\xi)^\top \Big(w^j(\xi) - \upsilon^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho_k^0 \int\limits_{\omega^k} w^k(\eta)\, d\eta \Big) d\xi.$$

Здесь $\theta_3(\Omega)$ – момент инерции вращения тела Ω вокруг оси аппликат (см. определение (3.24)).

5. Критические показатели

1. Случай $m = 0$. Как уже пояснялось в п. 2 §1 и п. 1 §4, при $m < 0$ (при $m \in (0,1)$) предельной спектральной задачей для (1.5)–(1.7) служит задача (1.13), (1.14) для однородного тела Ω (совокупность независимых задач (1.17)–(1.19) в составных упругих пространствах $\Theta^j \cup \omega^j$; $j = 1, \dots, J$). На первый взгляд кажется, что в случае $m = 0$ упомянутые задачи объединяются и в соответствии с анзацем

$$u(x) \sim v(x) + w^1(h^{-1}(x - P^1)) + \dots + w^J(h^{-1}(x - P^J)) \qquad (5.1)$$

система (1.17) преобразуется к виду

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j(\xi) = \mu\rho_j^0 \left(w^j(\xi) + v(P^j) \right), \quad \xi \in \omega^j \qquad (5.2)$$

(ср. с формулами (3.3), (3.4) и т.п.). Иными словами, происходит взаимодействие тела $\Omega(h)$ с включениями ω_h^j на первом шаге алгорифма. Такая точка зрения приемлема, однако чревата ненужными усложнениями асимптотической процедуры: совокупность задач (1.13), (1.14) и (5.2), (1.18), (1.19), $j = 1, \dots, J$, теряет формальную самосопряженность и может приобрести нетривиальные жордановы цепочки длиной два, т.е. собственные и присоединенные векторы (см., например, [38, 25]).

Как показано в [25], адекватное упрощение асимптотической процедуры происходит при замене анзаца (5.1) таким:

$$u(x) \sim v(x)+h^{-1/2}w^1(h^{-1}(x-P^1))+\cdots+h^{-1/2}w^J(h^{-1}(x-P^J)). \quad (5.3)$$

Из-за разных множителей при членах регулярного типа и типа пограничного слоя, правая часть (5.2) лишается слагаемого $v(P^j)$ и системы дифференциальных уравнений на включениях сохраняют прежний вид (1.17).

Асимптотический анзац (5.3) имеет физическую подоплеку: упругая и кинематическая энергии $E_h(h^{-1/2}w^j;\omega_h^j)$ и $\mu\rho_j\|h^{-1/2}w^j;L_2(\omega_h^j)\|^2$ колебаний малых включений ω_h^j с массой $O(h)$ приобретают такой же порядок $1=h^0$, как и аналогичные энергии $E_h(v;\Omega(h)$ и $\mu\rho_0\|v;L_2(\Omega(h))\|^2$ колебаний массивного тела.

2. Случай $m=1$. Сначала рассмотрим ситуацию (ii), выделенную в п. 4 §1. Асимптотический анзац (3.2) и предельные системы дифференциальных уравнений (3.3) остаются без изменений, однако в силу соотношения (3.8) при $m=1$ краевая задача (2.6) для поля v^1 приобретает помимо поверхностной нагрузки (3.1) неоднородность

$$f^1(x)=\mu\rho_0 d(x)b^0 \quad (5.4)$$

в уравнениях равновесия. В итоге условия разрешимости (2.7) этой задачи

$$\mathbb{R}^6 \ni 0=\int_\Omega d(x)^\top f^1(x)\,dx+\int_{\partial\Omega} d(x)^\top g^1(x)\,ds_x =$$
$$=\mu\rho_0\mathbf{d}(\Omega)b^0+\sum_{j=1}^J d(P^j)^\top b^{j\prime},$$

где $\mathbf{d}(\Omega)$ – матрица (3.16) и b^j – столбцы (3.5), принимают вид алгебраической системы (3.9) с новой 6×6-матрицей

$$\mathcal{M}=\rho_0\mathbf{d}(\Omega)+\sum_{j=1}^J \rho_j^0 \mathrm{mes}_3(\omega^j)d(P^j)^\top d(P^j), \quad (5.5)$$

по-прежнему симметрической и положительно определенной. Таким образом, задачи (3.12), (1.18), (1.19), где $j=1,\dots,J$ и $\mathcal{M}$ – матрица (5.5), связаны интегральным операторами в единую результирующую краевую задачу.

Свойства симметрии и знакоопределенности матрицы (5.5), а значит, и ее невырожденность безразличны к расположению точек $P^1, \dots, P^J$: каждая из матриц в сумме по j симметрична и неотрицательна, но матрица Грама $\mathbf{d}(\Omega)$ определена положительно. Следовательно, все вышеизложенное в равной мере относится к геометрическим ситуациям (i) и (ii) из п. 4 §1.

3. Случай $m = 3$ **при нарушении условия треугольника.** Пусть сначала $J = 1$, т.е. имеет место ситуация (i) из п. 4 §4. Тогда анзац (4.4) не отличается от анзаца (3.13) и предельная система на включении ω^1 сохраняет вид (3.14). Правые части краевых условий в задачах (2.6) для полей v^1 и v^2 определены формулами (3.17), а правые части уравнений равновесия – формулами (4.8). Следовательно, для существования ограниченных решений упомянутых задач требуется, чтобы

$$b^{1\prime} = 0, \quad \mu\rho_0 \mathbf{d}''(\Omega) b^{0\prime\prime} + b^{1\prime\prime} = 0.$$

Эти равенства вместе с интегральным представлением (3.15) столбца b^1 коэффициентов в асимптотике (2.2) вектор-функции w^1 показывают, что

$$b^0 = -\mathfrak{d}(\omega^1, \Omega)^{-1} \int\limits_{\omega^1} d(\xi)^\top w^1(\xi)\, d\xi,$$

где $\mathfrak{d}(\omega^1, \Omega)$ – симметрическая положительно определенная матрица размером 6×6,

$$\mathfrak{d}(\omega^1, \Omega) = \mathbf{d}(\omega^1) + \frac{\rho_0}{\rho_1^0} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \mathbf{d}''(\Omega) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Итак, система (3.14) превращается в соотношение

$$\begin{aligned} &D(-\nabla_\xi)^\top A^1 D(\nabla_\xi) w^1(\xi) = \\ &\quad = \mu\rho_1^0 \left(w^1(\xi) - d(\xi)\mathfrak{d}(\omega^1, \Omega)^{-1} \int\limits_{\omega^1} d(\eta)^\top w^1(\eta)\, d\eta \right), \\ &\qquad\qquad \xi \in \omega^j \end{aligned} \tag{5.7}$$

(ср. с системой (3.20)), которое вместе с соотношениями (1.18), (1.19) формирует результирующую спектральную задачу.

Пусть теперь $J \geq 2$, но точки $P^1, \dots, P^J$ лежат на одной прямой (см. условие (ii) в п. 4 §1). При $m = 3$ совпадают асимптотические анзацы (3.21) и (4.10), т. е. сохраняются предельные системы (3.22) дифференциальных уравнений на включениях ω^j. Ограниченные решения v^1 и v^2 задач (2.6) с правыми частями (3.25) и (4.13) существуют лишь при выполнении равенств (3.26) и

$$\mu\rho_0\theta_3(\Omega)b_6^0 + b_6^1 + \dots + b_6^J = 0. \tag{5.8}$$

Из формул (3.26) и (5.8) выводим, что столбец b^0 является решением алгебраической системы (3.9) с правой частью $\mathcal{F}$, указанной формулой (3.29), а симметрическая положительно определенная 6×6-матрица $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\mathcal{M} = \operatorname{diag}\{0, \dots, 0, \rho_0\theta_3(\Omega)\} + \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 \widehat{d}(P^j)^\top \mathbf{d}^\#(\omega^j)\widehat{d}(P^j) \tag{5.9}$$

(ср. с первой формулой (3.29)); здесь использованы обозначения из п. 3 §1 и п. 3 §3. В результате системы (3.22) превращаются в системы (3.30) с матрицей (5.9). Присутствующие в них интегральные операторы связывают соотношения (3.30), (1.18), (3.20) при $j = 1, \dots, J$ в единую результирующую спектральную задачу.

6. Полные асимптотические разложения в случае $m = 1$

1. Структура асимптотического ряда.. Пусть, как и в п. 2 §5, $m = 1$, т.е. массы тела $\Omega(h)$ и включений $\omega_h^1, \dots, \omega_h^J$ имеют одинаковый порядок $1 = h^0$. Выберем *простое* собственное число $\mu^{(0)} = \mu_n$ результирующей задачи (3.12), (1.18), (3.20), в которой системы уравнений (3.12) при $j = 1, \dots, J$ связаны интегральными операторами с матрицей (5.5). Соответствующий собственный вектор $\mathfrak{w}^n = (w^{1n}, \dots, w^{Jn})^\top$ подчиним условию нормировки

$$\mathbf{q}(\mathfrak{w}^n, \mathfrak{w}^n) = 1, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{q}(\mathfrak{w}, \mathfrak{w})$ – симметрическая квадратичная форма,

$$\mathbf{q}(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}) = \sum_{j=1}^{J} \rho_j^0 (w^j, w^j)_{\omega^j} - \tag{6.2}$$

$$-\Big\langle \mathcal{M}^{-1}\sum_{j=1}^{J}\rho_j^0\, d(P^j)^\top\int\limits_{\omega^j} w^j(\xi)\,d\xi,\ \sum_{k=1}^{J}\rho_k^0\, d(P^k)^\top\int\limits_{\omega^k} w^k(\xi)\,d\xi\Big\rangle_6.$$

Полные ряды для собственного числа $\Lambda_{(n)}$ и собственной вектор-функции $u_{(n)}$ задачи (1.5)–(1.7) ищем в виде

$$\Lambda_{(n)}\sim h^m\mu^{(0)}+\sum_{q=1}^{\infty}h^{m+q}\mu^{(q)}, \tag{6.3}$$

$$u_{(n)}(x)\sim\sum_{q=0}^{\infty}h^q\Big\{d(x)b^0_{(q)}+hv_{(q)}(x)+\sum_{j=1}^{J}w^j_{(q)}\left(h^{-1}(x-P^j)\right)\Big\}. \tag{6.4}$$

В фигурных скобках расположены асимптотические конгломераты, первый ($q=0$) из которых был построен в п. 2 §5 (см. также п. 1 §3). Слагаемые $v_{(q)}$ регулярного типа подчиним условию ортогональности (2.8), причем $v_{(0)}$ – решение задачи Неймана (2.6) с правыми частями (3.1) и (5.4), где $b^{j\prime}\in\mathbb{R}^3$ – столбцы коэффициентов в разложениях (2.2) компонент $w^j_{(0)}=w^{jn}$ собственного вектора $\mathfrak{w}^n$, а $b^0=b^0_{(0)}\in\mathbb{R}^6$ – решение алгебраической системы (3.9) с матрицей (5.5) и правой частью (3.11).

Члены $v_{(q)}(x)$ формального асимптотического ряда (6.3) являются ограниченными на множестве $\overline{\Omega}$, а члены $w^j_{(q)}(\xi)$ – затухающими при $|\xi|\to\infty$ со скоростью $O(|\xi|^{-1})$. Более того, при любом натуральном $N\in\mathbb{N}$ выполнены соотношения

$$v_{(q)}(x)=\sum_{p=0}^{N-1}X^{jp}_{(q)}(x-P^j)+\widetilde{v}^{jN}_{(q)}(x),\quad x\in\mathcal{U}^j, \tag{6.5}$$

$$w^{j0}_{(q)}(\xi)=\sum_{p=0}^{N-1}Y^{jp}_{(q)}(\xi)+\widetilde{w}^{jN}_{(q)}(\xi),\quad \xi\in\Theta^j, \tag{6.6}$$

где $\mathcal{U}^j$ – окрестности точки P^j, замыкание которой не содержит точек P^k при $k\neq j$, $X^{jp}_{(q)}$ и $Y^{ip}_{(q)}$ – положительно однородные вектор-функции степеней p и $-1-p$ соответственно, т.е. при $t>0$ справедливы равенства

$$X^{jp}_{(q)}(t(x-P^j))=t^pX^{jp}_{(q)}(x-P^j),\quad Y^{jp}_{(q)}(t\xi)=t^{-1-p}Y^{jp}_{(q)}(\xi),$$

а остатки $\widetilde{v}^{jN}_{(q)}$ и $\widetilde{w}^{jN}_{(q)}$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} &|\nabla^k_x \widetilde{v}^{jN}_{(q)}(x)| \le c_k |x - P^j|^{N-k},\ x \in \mathcal{U}^j, \\ &|\nabla^k_\xi \widetilde{w}^{jN}_{(q)}(\xi)| \le c_k |\xi|^{-1-N-k},\ \xi \in \Theta^j. \end{aligned} \tag{6.7}$$

2. Процедура перераспределения невязок. В силу соотношений (1.8), (1.16) и (6.3), (6.4) при $m = 1$ система дифференциальных уравнений (1.6) на множестве $\Omega(h)$ переводится растяжением координат $x \mapsto \xi^j = h^{-1}(x - P^j)$ в такую:

$$h^{-2} D(-\nabla_\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi)(w^{j\,0}_{(0)} + h w^{j\,0}_{(1)} + \ldots) =$$

$$= h^1 \rho_0 (\mu^{(0)} + h\mu^{(1)} + \ldots)(w^{j\,0}_{(0)} + h w^{j\,0}_{(1)} + \ldots).$$

На первый взгляд кажется, что члены пограничного слоя должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}_{(q)}(\xi) = \rho_0 \sum_{p=0}^{q-3} \mu^{(p)} w^{j\,0}_{(q-3-p)}(\xi), \quad \xi \in \Theta^j. \tag{6.8}$$

Однако в этом случае окажется нарушенным предположение (6.6) для вектор-функций $w^{j\,0}_{(3)}$, $w^{j\,0}_{(4)}, \ldots$ В самом деле, согласно разложению (6.6) при $q = 0$ правая часть $\rho_0 \mu^{(0)} w^j_{(0)}(\xi)$ системы (6.8), где $q = 3$, есть $O(|\xi|^{-1})$, а значит, решение $w^j_{(3)}(\xi)$ растет на бесконечности по крайней мере как $O(|\xi|)$; в случае $q > 3$ скорость роста при $|\xi| \to \infty$ может разве лишь увеличиться.

Для устранения возникшего противоречия воспользуемся *процедурой перераспределения невязок*, разработанной в [26] (см. также [27]). Именно, удалим из правой части (6.8) нежелательные слагаемые

$$\rho_0 \mu^{(p)} Y^{ji}_{(q-3-p)}(\xi^j) = h^{1+i} \rho_0 \mu^{(p)} Y^{ji}_{(q-3-p)}(x - P^j), \quad i = 0, 1,$$

и переправим их в правые части задачи (2.6) для члена v_{q-2+i} регулярного типа. В результате система (6.8) принимает вид

$$\begin{aligned} D(-\nabla_\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}_{(q)}(\xi) &= \\ = F^{j\,0}_{(q)}(\xi) := \rho_0 \sum_{p=0}^{q-3} \mu^{(p)} \widetilde{w}^{j\,2}_{(q-3-p)}(\xi), &\quad \xi \in \Theta^j, \end{aligned} \tag{6.9}$$

а система уравнений в области Ω для $v_{(q)}$ – вид

$$D(-\nabla_x)^\top A^0 D(\nabla_x) v_q(x) = f_{(q)}(x) :=$$

$$:= \rho_0 \mu^{(0)}\, d(x) b^0_{(q)} + \rho_0 \mu^{(q)}\, d(x) b^0_{(0)} + f^{\#}_{(q)}(x) :=$$

$$:= \rho_0 \sum_{p=0}^{q} \mu^{(p)}\, d(x) b^{(0)}_{(q-p)} + \rho_0 \sum_{p=0}^{q-1} \mu^{(p)} v_{(q-1-p)}(x) + \tag{6.10}$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} \sum_{p=0}^{q-1-i} \sum_{j=1}^{J} \mu^{(p)} Y^{ji}_{(q-1-i-p)}(x - P^j), \quad x \in \Omega.$$

Краевые условия на поверхности $\partial\Omega$ выглядят так:

$$N^0(x, \nabla_x) v_{(q)}(x) = g_{(q)}(x) :=$$

$$:= -\sum_{j=1}^{J} N^0(x, \nabla_x) Y^{j0}_{(q)}(x - P^j) + g^{\#}_{(q)}(x) := \tag{6.11}$$

$$:= -\sum_{j=1}^{J} \sum_{p=0}^{q} N^0(x, \nabla_x) Y^{jp}_{(q-p)}(x - P^j), \quad x \in \partial\Omega.$$

Осталось дополнить систему уравнений (6.9) на множестве $\Theta^j = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega^j}$ системой уравнений на включении ω^j и условиями сопряжения на его поверхности $\partial\omega^j$. В этих соотношениях помимо невязок, порожденных членами $v_{(p)}$ регулярного типа и членами $w^j_{(q)}$ "своего" пограничного слоя, возникают невязки, порожденные членами $w^k_{(l)}$ "чужих" $(k \neq j)$ пограничных слоев. При этом составляющие $x \mapsto Y^{kp}_{(l)}(x - P^k)$ следует разложить в ряды Тейлора в точке P^j, около которой они – гладкие вектор-функции. Так, условия сопряжения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} w^{j0}_{(q)}(\xi) &= w^j_{(q)}(\xi), \\ D(\nu^j(\xi))^\top \Big(A^0 D(\nabla_\xi) w^{j0}_{(q)}(\xi) &- A^j D(\nabla_\xi) w^j_{(q)}(\xi) \Big) = \\ = H^j(\xi) &:= -D(\nu^j(\xi))^\top (A^0 - A^j) D(\nabla_\xi) Z^j_{(q)}(\xi), \\ &\xi \in \partial\omega^j; \end{aligned} \tag{6.12}$$

здесь

$$Z^j_{(q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{q-1} X^{jp}_{(q-p-1)}(\xi) +$$

$$+ \sum_{k\neq j} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1-p} \sum_{|\alpha|=q-1-p-l} \xi^\alpha \nabla^\alpha_x Y^{kp}_{(l)}(P^j - P^k),$$

а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi^{\alpha_3}$, $\nabla^\alpha_x = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}$. Подчеркнем, что жесткие смещения $d(x)b^0_{(q)}$ не оставляют невязок в условиях сопряжения, но проявляются в системе дифференциальных уравнений

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j_{(q)}(\xi) - \mu^{(0)}\rho^0_j \left(w^j_{(q)}(\xi) + d(P^j)b^0_{(q)} \right) -$$

$$-\mu^{(q)}\rho^0_j \left(w^j_{(0)}(\xi) + d(P^j) b^0_{(0)} \right) = \tag{6.13}$$

$$= F^{j\#}_{(q)}(\xi) := D(\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) Z^j_{(q)}(\xi) + \rho^0_j \sum_{l=0}^{q-1} \mu^{(l)} Z^j_{(q-l)}(\xi) +$$

$$+\rho^0_j \sum_{l=1}^{q-1} \mu^{(l)} \left(w^j_{(q-l)}(\xi) + d(P^j) b^0_{(q-l)} \right) + \rho^0_j \sum_{l=0}^{q-1} \mu^{(l)}\, d''(\xi) b^{0\prime\prime}_{(q-l)}, \quad \xi \in \omega^j.$$

3. Определение членов асимптотических анзацев. В силу предложения 2.2 задача (6.10), (6.11) имеет ограниченное решение $v_{(q)}$ в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$\rho_0 \mu^{(0)} \mathbf{d}(\Omega) b^0_{(q)} + \rho_0 \mu^{(q)} \mathbf{d}(\Omega) b^0_{(0)} -$$

$$-\sum_{j=1}^{J} \int_{\partial\Omega} d(x)^\top N^0(x, \nabla_x) Y^{j0}_{(q)}(x - P^j)\, ds_x = \tag{6.14}$$

$$= \mathcal{F}^1_{(q)} := -\int_\Omega d(x)^\top f^\#_{(q)}(x)\, dx - \int_\Omega d(x)^\top g^\#_{(q)}(x)\, ds_x \in \mathbb{R}^6.$$

Подчеркнем, что согласно формулам (6.10) и (6.11) правая часть равенства (6.14) зависит от составляющих $\mu^{(p)}$ и $b^0_{(p)}$, $v_{(p)}$, $w^i_{(p)}$

только с индексами $p < q$, т.е. вполне определена на шаге алгорифма с номером q. То же самое можно сказать и о выражении

$$\rho_0 \sum_{p=0}^{q-3} \mu^{(p)} Y^{j\,2}_{(q-3-p)}(\xi) =: |\xi|^{-3} \mathcal{Y}^j_{(q)}(|\xi|^{-1}\xi),$$

служащим главным членом разложения при $|\xi| \to \infty$ правой части (6.9). Слагаемое $Y^{j\,0}_{(q)}(\xi)$ в представлении (6.6) вектор-функции $w^j_{(q)}$ есть ничто иное, как решение эллиптической системы дифференциальных уравнений в проколотом пространстве

$$L^0(\nabla_\xi) Y^{j\,0}_{(q)}(\xi) = |\xi|^{-3} \mathcal{Y}^j_{(q)}(|\xi|^{-1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

(см. [29] и [31, §3], а также далее п. 4 §6) и определено с точностью до линейной комбинации столбцов фундаментальной матрицы $\Phi(\xi)$. Иными словами,

$$Y^{j\,0}_{(q)}(\xi) = \Phi(x) b^{j\prime}_{(q)} + Y^{j\,\#}_{(q)}(\xi);$$

здесь $b^{j\prime}_{(q)} \in \mathbb{R}^3$ – неизвестный столбец, а частное решение $Y^{j\,\#}_{(q)}$ зафиксировано следующим образом:

$$\int\limits_{\partial \mathbb{B}_1} D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) Y^{j\,\#}_{(q)}(\xi)\, ds_\xi = 0 \in \mathbb{R}^3.$$

Столбец $b^{j\prime}_{(q)}$ вычислим при помощи формулы Грина. Именно, аналогично выкладке (1.35) находим, что

$$b^{j\prime}_{(q)} = \int\limits_{\mathbb{B}_R} L^0(\nabla_\xi)\Phi(\xi) b^{j\prime}_{(q)}\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_{\partial \mathbb{B}_R} D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi)\Phi(\xi) b^{j\prime}_{(q)}\, ds_\xi =$$

$$= -\int\limits_{\partial \mathbb{B}_R} D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) Y^{j\,0}_{(q)}(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= -\int\limits_{\partial \mathbb{B}_R} D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) Y^{j\,0}_{(q)}(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= -\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial\mathbb{B}_R} D(|\xi|^{-1}\xi)^\top A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}_{(q)}(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}_R\setminus\omega^j} L^0(\nabla_\xi) w^{j\,0}_{(q)}(\xi)\, d\xi + + \int\limits_{\omega^j} L^j(\nabla_\xi) w^{j}_{(q)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial\omega^j} D(\nu^j(\xi))^\top \left(A^j D(\nabla_\xi) w^j_{(q)}(\xi) - A^0 D(\nabla_\xi) w^{j\,0}_{(q)}(\xi) \right) ds_\xi \Bigg) =$$

$$= \mathcal{F}^{j\,2}_{(q)} + \rho^0_j \Bigg(\mu^{(0)} \Big(\int\limits_{\omega^j} w^j_{(q)}(\xi)\, d\xi + d(P^j) b^0_{(q)} \text{мес}_3 \omega^j \Big) +$$

$$+ \mu^{(q)} \Big(\int\limits_{\omega^j} w^j_{(0)}(\xi)\, d\xi + d(P^j) b^0_{(0)} \text{мес}_3 \omega^j \Big) \Bigg),$$

где $\mathcal{F}^{j\,2}_{(q)}$ – полностью определенный столбец на шаге алгорифма с номером q,

$$\mathcal{F}^{j\,2}_{(q)} = \int\limits_{\Theta^j} F^{j\,0}_{(q)}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\omega^j} F^{j\,\#}_{(q)}(\xi)\, d\xi - \int\limits_{\partial\omega^j} H^j_{(q)}(\xi)\, ds_\xi \in \mathbb{R}^3.$$

Итак, при учете первой формулы (2.9) алгебраическая система (6.14) принимает вид

$$\mathcal{M} \left(\mu^{(0)} b^0_{(q)} + \mu^{(q)} b^0_{(0)} \right) =$$

$$= \mathcal{F}_{(q)} - \sum_{k=1}^{J} \rho^0_k d(P^k)^\top \left(\mu^{(0)} \int\limits_{\omega^k} w^k_{(q)}(\eta)\, d\eta + \mu^{(q)} \int\limits_{\omega^k} w^k_{(0)}(\eta)\, d\eta \right), \quad (6.15)$$

где $\mathcal{M}$ – матрица (5.5), а $\mathcal{F}_{(q)} \in \mathbb{R}^6$ – известный столбец,

$$\mathcal{F}_{(q)} = \mathcal{F}^1_{(q)} + \sum_{j=1}^{J} \left(-d(P^j) \mathcal{F}^{j\,2}_{(q)} + \mathcal{F}^{j3}_{(q)} \right),$$

$$\mathcal{F}^{j3}_{(q)} = \int\limits_{\partial\Omega} d(x)^\top N^0(x, \nabla_x) Y^{j\,\#}_{(q)}(x - P^j)\, ds_x.$$

Теперь, используя равенство (6.15) переделываем систему дифференциальных уравнений (6.13) в такую:

$$D(-\nabla_\xi)^\top A^j D(\nabla_\xi) w^j_{(q)}(\xi) -$$

$$-\rho^0_j \Big(\mu^{(0)} \Big(w^j_{(q)}(\xi) - d(P^j)^\top \mathcal{M}^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho^0_k d(P^k)^\top \int\limits_{\omega^k} w^k_{(q)}(\eta)\, d\eta \Big) +$$

$$+\mu^{(q)} \Big(w^j_{(0)}(\xi) - d(P^j)^\top \mathcal{M}^{-1} \sum_{k=1}^{J} \rho^0_k d(P^k)^\top \int\limits_{\omega^k} w^k_{(0)}(\eta)\, d\eta \Big) \Big) =$$

$$= F^j_{(q)}(\xi) := F^{j\#}_{(q)}(\xi) + \rho^0_j d(P^j) \mathcal{M}^{-1} \mathcal{F}_{(q)}, \quad \xi \in \omega_j. \tag{6.16}$$

Поскольку $\mu^{(0)}$ – простое собственное число результирующей спектральной задачи (3.12), (1.18), (1.19), перевязанной матрицей $\mathcal{M}$ из формулы (5.5), полученная результирующая задача (6.16), (6.9), (6.12) для вектора $\mathfrak{w}_{(q)} = (w^1_{(q)}, \ldots, w^J_{(q)})^\top$ имеет решение в том и только в том случае, если ее правые части ортогональны собственному вектору $\mathfrak{w}^n = \mathfrak{w}_{(0)} = (w^1_{(0)}, \ldots, w^J_{(0)})^\top$. Решение $\mathfrak{w}_{(q)}$ определено с точностью до слагаемого $c\mathfrak{w}_{(0)}$ и поэтому логично подчинить его условию ортогональности

$$\mathbf{q}(\mathfrak{w}_{(q)}, \mathfrak{w}_{(0)}) = 0, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{6.17}$$

В силу соотношений (6.17) и (6.1), а также определения (6.2) симметричной квадратичной формы $\mathbf{q}$ названное условие разрешимости результирующей задачи (6.16), (6.9), (6.12) для вектора $\mathfrak{w}_{(q)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{J} \Big((F^{j0}_{(q)}, w^{j0}_{(0)})_{\Theta^j} + (F^j_{(q)}, w^j_{(0)})_{\omega^j} - (H^j_{(q)}, w^j_{(0)})_{\partial\omega^j} \Big) = \\ &\qquad = \mu^{(0)} \mathbf{q}(\mathfrak{w}_{(q)}, \mathfrak{w}_{(0)}) + \mu^{(q)} \mathbf{q}(\mathfrak{w}_{(0)}, \mathfrak{w}_{(0)}) = \mu^{(q)}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Формула (6.18) для числа $\mu^{(q)}$ заканчивает построение членов анзацев (6.3) и (6.4), снабженных индексом q.

4. Еще раз о разложениях вектор-функций около точек $P^1, \ldots, P^J$ и на бесконечности. Основной асимптотический конгломерат анзаца (6.4) был определен в п. 2 §5 (см. также п. 1 §3), а остальные конгломераты – в предыдущих разделах данного параграфа, причем по сути была повторена с незначительными изменениями схема построения из п. 2 §5 и попутно найдены члены формального асимптотического ряда (6.3) для собственного числа. Такие же обобщения асимптотических конструкций из §§2–5 доступны при других значениях параметра m в различных геометрических ситуациях. Переход к рассмотрению кратных собственных чисел μ_n результирующих задач также вполне стандартен (см., например, [27, гл. 9 и 10]).

В дополнительном обсуждении нуждаются предположения (6.5)–(6.7) о представлениях вектор-функций $v_{(q)}$ и $w^j_{(q)}$ соответственно в окрестностях точек P^k и на бесконечности. Их можно проверить по индукции при помощи общих результатов теории эллиптических краевых задач в областях с коническими и угловыми точками (см. [29], а также, например, монографию [31, гл. 3]), так как точки $P^1, \dots, P^J$ и бесконечно удаленную точку правомочно интерпретировать как вершины "полного" конуса $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Общая теории допускает появление у членов разложений (6.5) и (6.6) зависимостей от $\log|x - P^j|$ и $\log|\xi|$ соответственно. В рассматриваемом трехмерном (нечетномерном) случае логарифмы отсутствуют – этот факт для системы уравнений теории упругости при постоянном тензоре Гука A^0 проверяется в точности так же, как в работе [39] для уравнения Пуассона.

Литература

1. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела.* Наука, М. (1977).
2. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Научная книга, Новосибирск (2001).
3. E. Sanchez-Palencia, *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses.* — Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Lect. Notes Physics **195**, Springer-Verlag, Berlin (1984), 346–368.
4. E. Sanchez-Palencia, H. Tchatat, *Vibration de systèmes élastiques avec des masses concentrées.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **42**, No. 3 (1984), 43–63.
5. M. Lobo, E. Pérez, *Local problems or vibrating systems with concentrated masses: a review.* — C. R. Mecanique **331** (2003), 303–317.
6. С. А. Назаров, *Об одной задаче Санчес–Паленсия с краевыми условиями Неймана.* — Известия ВУЗ'ов. Матем. No. 11 (1989), 60–66.

7. S. A. Nazarov, *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions.* — RAIRO Model. Math. Anal. Numer **27**, No. 6 (1993), 777–799.
8. O. A. Oleinik, *Homogenization problems in elasticity. Spectra of singularly perturbed operators.* — In: Non-Classical Continuum Mechanics. Ads. R. J. Knops and A. A. Lacey. New York: Cambridge University Press (1987), p. 81–95.
9. Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник, Т. С. Соболева, *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой.* — Сиб. матем. ж. **29**, No. 5 (1988), 71–91.
10. C. Leal, J. Sanchez-Hubert, *Perturbation of the eigenvalues of a membrane with a concentrated mass.* — Quart. Appl. Math. **XLVII**, No. 1 (1989), 93–103.
11. J. Sanchez-Hubert, *Perturbation des valeurs propres pour des systèmes avec masse concentrée.* — C. R. Acad. Sci. Paris Série II **309** (1989), 507–510.
12. O. A. Oleinik, J. Sanchez-Hubert, G. A. Yosifian, *On vibrations of a membrane with concentrated masses.* — Bull. Sci. Math. 2 série **115** (1991), 1–27.
13. D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez, *On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass.* — J. Math. Pures Appl. **78**, No. 8 (1999), 841–865.
14. E. Pérez, *On the whispering gallery modes on the interfaces of membranes composed of two materials with very different densities.* — Math. Models Methods Appl. Sci. **13**, No. 1 (2003), 75–98.
15. J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods.* Heidelberg: Springer Verlag (1989).
16. О. А. Олейник, Г. А. Иосифиан, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных сред.* Изд-во МГУ. М. (1990).
17. Ю. Д. Головатый, *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальных колебаний.* — Тр. Моск. матем. о-ва. **54** (1992), 29–72.
18. D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez, *On the vibrations of a plate with a concentrated mass and very small thickness.* — Math. Meth. Appl. Sci. **26** (2003), 27–65.
19. E. Pérez. *Remarks on vibrating systems with many concentrated masses and vibrating systems with parts of negligible mass.* — in: Proceedigns of Midnight Sun Narvik Conference: Multi Scale Problems and Asymptotic Analysis. Gakkuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 24 Gakkottosho, Tokyo (2006), pp. 311–323.
20. V. Rybalko, *Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions.* — Asymptotic Analysis **32** (2002), 27–62.
21. G. A. Chechkin, E. Pérez, E. I. Yablokova, *Nonperiodic boundary homogenization problems and "light" concentrated masses.* — Indiana Univ. Math. J. **54**, No. 2 (2005), 321–348.
22. Ю. Д. Головатый, *Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущенной плотностью.* — Успехи матем. наук **45**, No. 4 (1990), 147–148.
23. J. Caínzos, E. E. Pérez, M. Vilasánchez, *Asymptotics for the eigenelements of the Neumann spectral problem with concentrated masses.* — Indiana Univ. Math. J. (2007) (to appear).

24. J. Caínzos, E. Pérez, M. Vilasánchez, *Asymptotic behavior of the solutions of a spectral Neumann problem* $(1-D)$ *with a concentrated mass.* — Proceedigns of the XIX CEDYA (2006), to appear.
25. D. Gomez, M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, *Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems.* — J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 303–317.
26. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 8, изд-во ЛГУ, Л. (1981), 72–153.
27. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области.* Изд-во ТГУ, Тбилиси (1981).
28. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов.* — Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва **6** (1998), 151–212.
29. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
30. A. Pazy, *Asymptotic expansions of ordinary differential equations in Hilbert space.* — Arch. Rational Mech. Anal. **24** (1967), 193–218.
31. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М. (1991).
32. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
33. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
34. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М. (1973).
35. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости.* Мир, М. (1974).
36. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна.* — Успехи матем. наук **43**, No. 5 (1988), 55–98.
37. М. Ш. Бирман, Б. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — Из-во Ленингр. ун–та, Л. (1980)ю
38. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающейся тонкой области. 1* — Алгебра и анализ **2** No. 2 (1990), 85–111.
39. Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник, *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями.* — Труды МИАН СССР **192** (1990), 49–60.

Gomez D., Nazarov S. A., Perez M.-E. The formal asymptotics of

eigenmodes for oscillating elastic spatial body with concentrated masses.

Limiting spectral problems are derived for the problem about eigen-oscillations of a solid with small heavy (or light) inclusions. The asymptotic ansätze for eigenvalues and eigenvectors as well as the limiting problems are crucially dependent on relation between the geometrical and physical parameters and also the disposition of inclusions. It is established that for heavy inclusions the limiting problems are linked together into the resultant spectral problem which describes "far-action" in the family of the inclusions.

Поступило 15 марта 2007 г.

Departamento de Matemáticas,
Estadística y Computación

E-mail: gomezdel@unican.es

ИПМаш РАН

E-mail: serna@snark.ipme.ru,
srgnazarov@yahoo.co.uk

Departamento de Matemática Aplicada
Ciencias de la Computación

E-mail: meperez@unican.es