Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

В. М. Бабич, Д. Б. Дементьев, Б. А. Самокиш

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

1. Введение

Функции Лежандра играют существенную роль в ряде дифракционных задач. Именно в связи с такого рода приложениями авторы разработали методику расчёта значений функций $P_\nu(x)$, присоединенных функций $P_\nu^m(x)$ и их производных $\frac{dP_\nu(x)}{dx}$ и $\frac{dP_\nu^m(x)}{dx}$ $(\nu \in \mathbb{C}C,\ m \in \mathbb{Z}Z,\ -1 < x \leq 1,\ |\nu|$ и $|\mu|$ могут быть большими).

Сделаем сразу же два общих замечания, относящихся ко всем способам вычисления:

1. Вторая производная функции Лежандра может быть найдена из дифференциального уравнения Лежандра

$$\big((1-x^2)P'_\nu(x)\big)' + \nu(\nu+1)P_\nu(x) = 0, \tag{1}$$

если для этого x известны $P_\nu(x)$ и $P'_\nu(x)$.

2. При большой $\operatorname{Re}\nu$ возможна редукция с уменьшением $\operatorname{Re}\nu$, по рекуррентному соотношению.

Это рекуррентное соотношение удобно писать для пары $P_\nu(x)$, $P'_\nu(x)$, во-первых, потому, что, как правило, нужна эта пара значений, во-вторых, соотношение получается двучленным. Запишем формулы для производной [1] 6.733:

$$(1-x^2)\frac{dP_\nu(x)}{dx} = (\nu+1)xP_\nu(x) - (\nu+1)P_{\nu+1}(x),$$
$$(1-x^2)\frac{dP_\nu(x)}{dx} = -\nu x P_\nu(x) + \nu P_{\nu-1}(x). \tag{2}$$

Заменим во втором равенстве ν на $\nu+1$ и решим полученную систему относительно $P_\nu(x)$ и $P'_\nu(x)$:

$$P_\nu(x) = xP_{\nu+1}(x) + \frac{1-x^2}{\nu+1}P'_{\nu+1}(x),$$
$$P'_\nu(x) = -(\nu+1)P_{\nu+1}(x) + xP'_{\nu+1}(x). \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ гранты 07-01-00548, 05-01-00936, НШ-8336.2006.

2. Расчёт функций $P_\nu(x)$ $(-1 < x \le 1,\ \nu \in \mathbb{C})$.

1. Степенной ряд.

Известно представление функций Лежандра гипергеометрическим рядом [2] 15.22.:

$$P_\nu(x) = {}_2F_1(\nu+1, -\nu; 1; \frac{1-x}{2})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)\dots(\nu+n)(-\nu)\dots(-\nu+n-1)}{(n!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n \qquad (4)$$

Выражения для производных легко получить, дифференцируя ряд (4). Вычисление $P_\nu(x)$ и $P'_\nu(x)$ на основе ряда (4) несложно, но метод недостаточно универсален: как ряд (4), так и ряд, полученный его дифференцированием, сходятся медленно при больших $|\nu|$ и при x, близких к -1.

2. Интегральное представление Мелера–Дирихле.

Это представление имеет вид [2] 15.231:

$$P_\nu(cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} d\varphi. \qquad (5)$$

Пользуясь четностью, распространим интеграл на симметричный промежуток:

$$P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} d\varphi. \qquad (5)$$

Подынтегральная функция имеет особенности степени $-\frac{1}{2}$ на концах отрезка, естественно поэтому применить квадратурную формулу Гаусса–Кристоффеля с соответствующим весом - формулу Эрмита–Мелера:

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \qquad (6)$$

Чтобы привести интеграл (5) к нужному отрезку $[-1,\ 1]$, сделаем замену:

$$\cos\varphi - \cos\theta = (1-\cos\theta)(1-t^2), \qquad (7)$$

т.е. $\sin\frac{\varphi}{2} = t\sin\frac{\theta}{2}$, тогда получаем:

$$P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{8}$$

и к этому интегралу применяем формулу (6).

3. Оценим точность этого способа и требуемое количество узлов. Сделаем в интеграле (6) замену $t = \cos u$ и распространим интеграл и сумму на весь период 2π, тогда квадратурная формула (6) перейдет в формулу средних прямоугольников:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos u)du \approx \frac{2\pi}{2N}\sum_{k=1}^{2N} f\left(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right). \tag{9}$$

Остаток этой формулы оценивается величиной

$$M_f \frac{e^{-\frac{2\pi\sigma}{h}}}{1-e^{-\frac{2\pi\sigma}{h}}}, \tag{10}$$

где h – шаг интегрирования, если подынтегральная функция аналитична по u в полосе $|\operatorname{Im} u| < \sigma$ и, скажем, непрерывна на границе её; M_f – интеграл от модуля по границе полосы в пределах периода. См., напр. [3], где, впрочем, доказана эта оценка для непериодической функции и бесконечного отрезка, но нетрудно так же доказать её и для периодической функции.

Обратимся теперь к интегралу (8), где положим $t = \cos u$.

Особые точки подынтегральной функции это нули знаменателя и особенности отображения $u \to \varphi$. Они совпадают:

$$\frac{d\varphi}{du} = -\sin u\frac{d\varphi}{dt} = -\sin u\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}. \tag{11}$$

Найдем их:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{1-t^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0,$$

$$u = \arccos\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-1}\right) = \pm i\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{4}, \tag{12}$$

и значит $\sigma = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}$. При этом $\varphi = \pi$, так что $M_f \sim e^{\pi|\nu|}$ и, если требуется точность порядка ε, то (шаг $h = \frac{2\pi}{2N}$)

$$e^{\pi|\nu| - 2N\sigma} \sim \varepsilon, \tag{13}$$

$$N \sim \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon} + \pi|\nu|}{2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}}. \tag{14}$$

Например, при $\varepsilon = 10^{-8}$

$$N \sim \frac{18 + \pi|\nu|}{2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}}. \tag{15}$$

Заметим, что больших $\operatorname{Re} \nu$ можно избежать, как уже сказано, применением формулы приведения (3), а при больших $\operatorname{Im} \nu$ фактическое число узлов можно значительно уменьшить, если, представив интеграл (8) так:

$$P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{e^{i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \tag{16}$$

где подынтегральная функция быстро убывает (возрастает), включать в квадратурную сумму только те слагаемые, которые не слишком малы.

4. Вычисление производной $P'_\nu(x)$.

Получим удобное представление производной, аналогичное (8). Для этого выпишем соотношения (2):

$$(1 - x^2) P'_\nu(x) = (\nu + 1) x P_\nu(x) - (\nu + 1) P_{\nu+1}(x),$$
$$(1 - x^2) P'_\nu(x) = -\nu x P_\nu(x) + \nu P_{\nu-1}(x).$$

Разделим первое равенство на $\nu+1$, второе на ν, вычтем, затем подставим выражение функций Лежандра по формуле (8), где $\cos\theta = x$, затем под интегралом используем теорему сложения:

$$\cos\left(\nu + \frac{3}{2}\right)\varphi + \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\varphi = 2\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\varphi \cdot \cos\varphi,$$

тогда получим:

$$-\frac{1 - x^2}{\nu(\nu + 1)} P'_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} (x - \cos\varphi) \frac{dt}{1 - t^2}.$$

В силу (7)

$$x-\cos\varphi=\cos\theta-\cos\varphi=(x-1)\left(1-t^2\right)$$

и окончательно

$$P'_\nu(\cos\theta)=\frac{\nu(\nu+1)}{\pi(1+\cos\theta)}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-t^2}dt, \qquad (17)$$

причём, как и выше, $\sin\frac{\varphi}{2}=t\sin\frac{\theta}{2}$.

К интегралу (17) применяем формулу Гаусса–Кристоффеля с весом $\sqrt{1-t^2}$:

$$\int\limits_{-1}^{+1}f(t)\sqrt{1-t^2}dt\approx\frac{\pi}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\sin^2\frac{k\pi}{N+1}f\left(\cos\frac{k\pi}{N+1}\right). \qquad (18)$$

5. Дифференциальное уравнение Лежандра.

В ситуации, когда нужно вычислить набор значений $P_\nu(x)$ для ряда значений x на отрезке $[-1,\ 1]$, естественно использовать дифференциальное уравнение (1). Прежде всего необходимо отсортировать значения x по возрастанию, предусмотрев, чтобы достаточно близкие x рассматривались как равные. (В некоторых случаях это значительно сокращает вычисления.) Для интегрирования делаем замену $x=\cos\theta$, приводим уравнение к системе двух уравнений первого порядка.

При больших $\operatorname{Im}\nu$ функции Лежандра быстро меняются, согласно асимптотической формуле

$$P_\nu(\cos\theta)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}}\cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right). \qquad (19)$$

В этой ситуации целесообразно выделить экспоненциальный множитель

$$P_\nu(\cos\theta)=e^{\tau\theta}W(\theta),$$

$\tau=\sqrt{\nu(\nu+1)}$. Мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}+(2\tau+\operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{d\theta}+\tau\operatorname{ctg}\theta W=0, \qquad (20)$$

имеющему, как и уравнение Лежандра, особые точки $\theta=0,\ \theta=\pi$.

Для численного интегрирования применяется метод Рунге–Кутта четвертого порядка. Приходим к системе двух уравнений первого порядка. Назначается генеральный шаг $h = h_{\max}$, который служит верхней границей локального шага. Точки θ_i упорядочены по возрастанию. Отрезок $[\theta_i,\ \theta_{i+1}]$ делим на равные части длиной меньше h. Таким образом все θ_i входят в число счетных узлов и значения в них получаются непосредственно. Начальное значение вычисляется с помощью формулы Мелера–Дирихле (5).

Метод численного интегрирования, основанный на эрмитовом интерполировании решения по значениям функции и первой производной в начале и конце шага интегрирования, не дал лучших результатов.

6. Вычисление $P_\nu(x)$ в окрестности $x = -1$.

Вычисление функции $P_\nu(x)$ при больших $|\nu|$ вблизи точки $x = -1$ сталкивается с трудностями. Это естественно: точка $x = -1$ – особая точка уравнения (1), содержащего, к тому же, большой параметр (ν, $|\nu| \gg 1$) при младшем члене уравнения. Для расчётов $P_\nu(x)$ и $\frac{d}{dx}P_\nu(x)$ оказалось удобным использовать асимптотику этих функций, справедливую при больших $|\nu|$ и при x, меняющемся в окрестности $x = -1$.

Целесообразно вычислять не $P_\nu(x)$ вблизи $x = -1$, а функцию $P_\nu(-\cos\theta)$ вблизи $\theta = 0$, выраженную линейно через $\mathfrak{Q}_\nu(\cos\theta \pm i0)$. Определением $\mathfrak{Q}_\nu$ служит интеграл ([1] 6.711)

$$\mathfrak{Q}_p(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\phi}{\left(z + \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,\phi\right)^{p+1}},\ \ z > 1,\ \ \sqrt{z^2-1} > 0,\ \ \mathrm{Re}\,p > -1. \tag{21}$$

$\mathfrak{Q}_p(z)$ аналитически продолжима на всю плоскость комплексной переменной z с разрезом $(-\infty, +1)$. Под функциями $\mathfrak{Q}_p(z + i0)$ и $\mathfrak{Q}_p(z - i0)$ понимаются значения функции $\mathfrak{Q}_p(z)$ на верхней и нижней границах разреза соответственно. Исходными формулами будут служить формулы [1] 6.732.5, 6.737.2:

$$\begin{gathered}\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x \pm i0) = Q_{\nu-\frac{1}{2}}(x) \mp i\frac{\pi}{2}P_{\nu-\frac{1}{2}}(x),\\ P_{\nu-\frac{1}{2}}(-x) = \sin\nu\pi P_{\nu-\frac{1}{2}}(x) + \frac{2}{\pi}\cos\nu\pi Q_{\nu-\frac{1}{2}}(x).\end{gathered} \tag{22}$$

Здесь $Q_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ решение уравнения (1), линейно независимое с $P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ ([1] 6.705). Из (22) следуют формулы, напоминающие формулы Эйлера для $\cos x$ и $\sin x$:

$$Q_{\nu-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x-i0) + \mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x+i0)\right), \tag{23}$$

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-i}{\pi}\left(\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x-i0) - \mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x+i0)\right), \tag{24}$$

Подставляя формулы (23) и (24) в (22), мы получаем формулу, которая будет основной для дальнейшей работы:

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(-x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x+i0)e^{i\nu\pi} + \frac{1}{\pi}\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(x-i0)e^{-i\nu\pi}. \tag{25}$$

Для функции $\mathfrak{Q}$ существует интегральное представление ([1] 6.715):

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\theta) = \int\limits_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\theta)}}dt, \ \ \theta > 0, \ \ \operatorname{Re}\nu > -1. \tag{26}$$

Формула (26) дает возможность аналитически продолжить функцию $\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\theta)$ с полуоси $\theta > 0$ в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Пусть $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Увеличивая аргумент θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, мы переведем $\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\theta)$ в $\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta + i0)$:

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta + i0) = \int\limits_{i\theta}^{i\theta+\infty} \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} t - \cos\theta)}}dt. \tag{27}$$

Аналогично, уменьшая аргумент θ от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta - i0) = \int\limits_{-i\theta}^{-i\theta+\infty} \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} t - \cos\theta)}}dt. \tag{28}$$

Делая в формулах (27), (28) замену переменных $\xi = it$ и вводя функцию

$$\Psi(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{\theta^2-\xi^2}{2(\cos\xi - \cos\theta)}}, \ \ \alpha = \xi^2, \ \ \beta = \theta^2,$$

мы получаем формулы, удобные для дальнейшей работы:

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta - i0) = -i\int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}}\Psi(\alpha,\beta)d\xi, \tag{29}$$

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta + i0) = -i \int\limits_{-\theta}^{-\theta+i\infty} \frac{e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}} \Psi(\alpha,\beta) d\xi. \qquad (30)$$

Здесь удобно воспользоваться приемом, восходящим к работе [4] В. А. Фока (см. также [5]) и разложить функцию Ψ в ряд Тейлора по переменной α в точке $\alpha = \beta = \theta^2$:

$$\Psi(\alpha,\beta) = \Psi(\beta,\beta) + \left.\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta} (\alpha-\beta) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=\beta} (\alpha-\beta)^2 + \ldots$$

Подставляя это разложение в интеграл (29) и интегрируя почленно, мы получаем асимптотическое разложение для функции $\mathfrak{Q}$:

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta \mp i0) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial\alpha^n}\right|_{\alpha=\beta} \int\limits_{\pm\theta}^{\pm\theta+i\infty} \left(\xi^2-\theta^2\right)^n \frac{e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}} d\xi. \qquad (31)$$

Формулы (см. [1] 6.437)

$$H_p^{(1)}(x) = -\frac{2i\left(\frac{x}{2}\right)^p e^{-ip\pi}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int\limits_{1}^{1+i\infty} e^{ixt}(t^2-1)^{p-\frac{1}{2}} dt, \qquad (32)$$

$$H_p^{(2)}(x) = \frac{2i\left(\frac{x}{2}\right)^p e^{-ip\pi}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int\limits_{-1}^{-1+i\infty} e^{ixt}(t^2-1)^{p-\frac{1}{2}} dt, \qquad (33)$$

дают возможность выразить интеграл в формуле (31) через функции Ханкеля.

Здесь предполагается, что ветвь функции $\left(t^2-1\right)^{p-\frac{1}{2}}$ фиксирована разрезами $[-1,-1-i\infty)$ и $[1,1-i\infty)$ и требованием $\left(t^2-1\right)^{p-\frac{1}{2}} > 0$ при $t > 1$. Интегральные представления (32), (33) функции Ханкеля дают возможность выразить интегралы в правой части равенства (32) через $H_p^{(1)}$ и $H_p^{(2)}$.

Считая, что разрезы проведены вдоль полупрямых $[\pm\theta, \pm\theta - i\infty)$, $arg(\sqrt{\theta^2-\xi^2} = 0$ при $-\theta < \xi < \theta$ и $p = n \geq 0-$ целое, получим

$$\int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{\left(\xi^2-\theta^2\right)^n e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}} d\xi = \theta^{2n} e^{\frac{i\pi}{2}} \int\limits_{1}^{1+i\infty} \left(t^2-1\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{i\nu\theta t} dt$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2)^n h_n^{(1)}(\nu,\theta), \tag{34}$$

где

$$h_n^{(1)}(\nu,\theta) = \frac{\theta^n}{\nu^n} H_n^{(1)}(\nu\theta).$$

Аналогично:

$$\int\limits_{-\theta}^{-\theta+i\infty} \frac{\left(\xi^2-\theta^2\right)^n e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2)^n h_n^{(2)}(\nu,\theta), \tag{35}$$

где

$$h_n^{(2)}(\nu,\theta) = \frac{\theta^n}{\nu^n} H_n^{(2)}(\nu\theta).$$

Теперь мы можем выписать асимптотику функций $\mathfrak{Q}(x \pm i0)$:

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta - i0) \cong i\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) h_n^{(1)}(\nu,\theta), \tag{36}$$

$$\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta + i0) \cong -i\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) h_n^{(2)}(\nu,\theta), \tag{37}$$

где

$$A_n(\theta) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\left.\frac{\partial^n \Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^n}\right|_{\alpha=\beta=\theta^2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right). \tag{38}$$

Подставляя асимптотики (36) и (37) в выражение (25), мы получаем асимптотику функции Лежандра в окрестности точки $\theta = 0$:

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) \cong \frac{i}{2}\left(e^{-i\nu\pi}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) h_n^{(1)}(\nu,\theta) \right.$$
$$\left. - e^{i\nu\pi}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) h_n^{(2)}(\nu,\theta)\right). \tag{39}$$

Итак, асимптотическая формула, применимая для расчета $P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ при x близком к -1 имеет вид:

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(x) \sim \frac{i}{2}\left(e^{-i\nu\pi}\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\theta) H_k^{(1)}(\theta\nu)\left(\frac{\theta}{\nu}\right)^k \right.$$
$$\left. - e^{i\nu\pi}\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\theta) H_k^{(2)}(\theta\nu)\left(\frac{\theta}{\nu}\right)^k\right), \tag{40}$$

где $\theta = \arccos(-x)$. Дифференцируя формулу (40), получаем выражение для вычисления производной функции Лежандра в окрестности точки $x = -1$. Для вычислений был использован ряд (40) до четвертого члена включительно:

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(x) \approx \frac{i}{2}\left(e^{-i\nu\pi}\sum_{k=0}^{3} A_k(\theta)H_k^{(1)}(\theta\nu)\left(\frac{\theta}{\nu}\right)^k - e^{i\nu\pi}\sum_{k=0}^{3} A_k(\theta)H_k^{(2)}(\theta\nu)\left(\frac{\theta}{\nu}\right)^k\right), \tag{41}$$

откуда:

$$P'_{\nu-\frac{1}{2}}(x) \approx \frac{i}{\pi\sin\theta}\Big\{e^{-i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi}\Big(H_0^{(1)}\cdot(A_0'(\theta)+A_1(\theta)\theta) +H_1^{(1)}\cdot\left(A_1'(\theta)\frac{\theta}{\nu}+A_2(\theta)\frac{\theta^2}{\nu}-A_0(\theta)\nu\right)H_2^{(1)}\cdot(A_2'(\theta)+A_3(\theta))\frac{\theta^2}{\nu^2}+H_3^{(1)} \cdot A_3'(\theta)\frac{\theta^3}{\nu^3}\Big)-e^{i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi}\Big(H_0^{(2)} \cdot(A_0'(\theta)+A_1(\theta)\theta)+H_1^{(2)} \cdot\left(A_1'(\theta)\frac{\theta}{\nu}+A_2(\theta)\frac{\theta^2}{\nu}-A_0(\theta)\nu\right)+ H_2^{(2)}\cdot(A_2'(\theta)+A_3(\theta))\frac{\theta^2}{\nu^2}+H_3^{(2)}\cdot A_3'(\theta)\frac{\theta^3}{\nu^3}\Big)\Big\}. \tag{42}$$

Функции $A_i(\theta)$ могут быть подсчитаны по формуле (38). Заметим, что при x, близком к -1, значение $\theta = \arccos(-x)$ близко к нулю. Функции $A_i(\theta)$ регулярны в окрестности $\theta = 0$, поэтому при расчетах достаточно, вместо точного (достаточно сложного) значения этих функций, использовать лишь главные члены разложения их по степеням θ. С ростом индекса достаточно брать все меньше слагаемых этих разложений. Ниже приведены значения $A_i(\theta)$, используемые при вычислениях:

$$\begin{aligned} A_0(\theta) &= 1 + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{1}{160}\theta^4 + \frac{61}{120960}\theta^6, \\ A_1(\theta) &= -\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\theta^2 - \frac{61}{80640}\theta^4, \\ A_2(\theta) &= \frac{7}{1920} + \frac{17}{17920}\theta^2, \\ A_3(\theta) &= -\frac{31}{64512}. \end{aligned} \tag{43}$$

Замечание. Вычисления показывают, что коэффициенты A_n убывают с ростом номера достаточно быстро, так что для достаточно точного вычисления ($\approx 10^{-5} - 10^{-6}$) значения функции Лежандра в окрестности особой точки $x \approx -1$ достаточно брать всего 3–4 слагаемых из приведенных рядов. Чтобы проверить этот метод, значения P_ν вычислялись как по асимптотическим формулам, так и с помощью формулы Мелера-Дирихле (с очень большим числом узлов - порядка 10000). Вычисления проводились в одинаковых точках. Результаты вычислений сравнивались.

7. Вычисление присоединенных функций.

Присоединенные функции $P_\nu^{-m}(x)$ и их первые производные $\frac{d}{d\theta}P_\nu^{-m}(\cos\theta)$ приходится вычислять для значений индекса $m = 0, 1, \ldots, M,\ \ x \in [-1, 1]$, где M может быть велико. Естественно для этого воспользоваться рекуррентной формулой по верхнему индексу:

$$P_\nu^{-m+1}(x) - 2m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_\nu^{-m}(x) + (\nu+m+1)(\nu-m)P_\nu^{-m-1}(x) = 0 \tag{44}$$

(см. формулу [1] 6.733.3, где q заменено на $-m-1$).

Далее, используя представление $P_\nu^{-m}(x)$ через гипергеометрическую функцию (см. [1] 6.704), получим

$$P_\nu^{-m}(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{m!} F(-\nu, \nu+1, m+1; \frac{1-x}{2}).$$

Освободимся от быстро меняющихся множителей, введя функции

$$f_m(x) = F(-\nu, \nu+1, m+1; \frac{1-x}{2}),$$

так что

$$P_\nu^{-m}(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} f_m(x), \tag{45}$$

а для функций $f_m(x)$ из (44) получаем рекуррентное соотношение:

$$a(m)f_{m-1}(x) + b(m)f_m(x) + c(m)f_{m+1}(x) = 0, \tag{46}$$

$$a(m) = -m(m+1)(1+x),\ \ b(m) = 2m(m+1)x,$$

$$c(m) = (m+\nu+1)(m-\nu)(1-x).$$

Для расчета производных от $P_\nu^{-m}(x)$ удобно выделить тот же быстро меняющийся множитель, что мы выделяли для расчета $P_\nu^{-m}(x)$. Введем $\cos\theta$ вместо независимой переменной $x:\ x = \cos\theta$ и определим функцию $g_m(x) = g_m(\cos\theta)$ формулой:

$$\frac{d}{dt}P_\nu^{-m}(\cos\theta) = \frac{1}{m!}\operatorname{tg}^m\left(\frac{\theta}{2}\right) g_m(x) \tag{47}$$

Пользуемся формулами дифференцирования присоединенных функций [1] 6.733.1,

$$\left(1-x^2\right)\frac{dP_\nu^\mu}{dx} = -\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu+1}(x) - \mu x P_\nu^\mu(x)$$
$$= (\nu-\mu+1)(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu-1}(x) + \mu x P_\nu^\mu(x) \tag{48}$$

Положим $\mu = -m$, подставим выражения (45) и (47), тогда из первой формулы получим:

$$g_m(x) = m\left(-\operatorname{ctg}\theta f_m(x) + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}f_{m-1}(x)\right);\ x = \cos\theta. \tag{49}$$

Эта формула годится для $m \geq 1$, а для $m = 0$ из второй формулы найдем

$$g_0(x) = -\nu(\nu+1)f_1(x). \tag{50}$$

Итак, производные находятся через $f_m(x)$ по формулам (49) и (50), а сами $f_m(x)$ вычисляются по рекуррентной формуле (46). Для начала счета – если его вести по возрастанию m – надо найти $f_0(x)$ и $f_1(x)$, и тем самым $P_\nu(x)$, $P_\nu^{-1}(x)$, а это делается, как описано в главе 2. Функция P_ν^{-1} выражается через $P_\nu(x)$ и $P'_\nu(x)$ хотя бы по формуле (48).

Однако, счет по возрастанию m не всегда устойчив. Проанализируем этот вопрос.

Предельное, при $m \to \infty$, характеристическое уравнение для разностного уравнения (3) таково:

$$-(1-x)z^2 + 2xz + (1+x) = 0,$$

его корни 1 и $\frac{1+x}{1-x}$. Искомому решению $f_m(x)$, видимо, соответствует корень $x = 1$, поскольку $f_m(x) \to 1$ при $m \to \infty$. Это решение является доминирующим при возрастании m, если второй корень по модулю меньше 1, т.е. при $x < 0$, и тогда счет по возрастанию m устойчив; если же $x > 0$, то доминирует другое решение, а с ним растут ошибки. При $x > 0$, следовательно, устойчив счет в сторону убывания m. Этот нестрогий вывод подтверждается численным экспериментом.

Это означает, что нужно разработать способ вычисления $P_\nu^{-m}(x)$ для больших m - начальных значений для рекуррентного счета в обратную сторону.

С этой целью рассмотрим два интегральных представления:

$$P_p^{-q}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+q+1)\Gamma(q-p)} \left(1-x^2\right)^{\frac{q}{2}} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(p+\frac{1}{2}\right)t}{(x+\operatorname{ch} t)^{q+\frac{1}{2}}}dt, \quad (51)$$

[1] 6.713.3;

$$P_p^q(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^q\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-q\right)} \int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)t}{(\cos t - \cos\theta)^{q+\frac{1}{2}}}dt, \quad (52)$$

[1] 6.714.3;

Возьмем сначала первое из них. Положим $q = m, \ p = \nu$:

$$P_\nu^{-m}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m-\nu)} \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} J(\nu,m,x), \quad (53)$$

$$J(\nu,m,x) = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{(x+\operatorname{ch} t)^{m+\frac{1}{2}}}dt.$$

Распространим интеграл на всю ось (подынтегральная функция четна) и применим формулу трапеции в бесконечных пределах. Прикинем величину остатка и требуемый шаг.

Для шага h остаток есть величина порядка

$$M(\sigma)e^{-\frac{2\pi\sigma}{h}}, \tag{54}$$

(см.[3]), где $M(\sigma)$, собственно, интеграл от модуля подынтегральной функции по границе полосы $|\operatorname{Im} t| \le \sigma$, внутри которой функция аналитична. Для оценки порядка, видимо, за $M(\sigma)$ можно принять максимум модуля на этой границе. Оценим его, учитывая ближайшие полюсы $t = \pm i\sigma_0 : \sigma_0 = \arccos(-x) = \pi - \theta$, если $x = \cos\theta$.

Тогда

$$M(\sigma) \sim e^{\nu_0\sigma}(\sigma_0 - \sigma)^{-m},\ 0 < \sigma < \sigma_0,\ \nu_0 = |\operatorname{Im}\nu| \tag{55}$$

$$R \sim e^{\nu_0\sigma}(\sigma_0 - \sigma)^{-m} e^{-\frac{2\pi\sigma}{h}}. \tag{56}$$

Найдем σ наивыгоднейшее для оценки, т.е. минимизирующее это выражение. Логарифмируем, дифференцируем, приравниваем нулю:

$$\nu_0 + \frac{m}{\sigma_0 - \sigma} - \frac{2\pi}{h} = 0,\ \sigma_0 - \sigma = \frac{m}{2\pi h^{-1} - \nu_0},$$

$$\ln R \sim -\left(2\pi h^{-1} - \nu_0\right)\sigma_0 + m + m\ln\frac{1}{\sigma_0 - \sigma}.$$

Пусть ε – требуемая точность, $E = \ln\frac{1}{\varepsilon}$, найдем нужное h :

$$-\sigma_0\left(2\pi h^{-1} - \nu_0\right) + m + m\ln\frac{2\pi h^{-1} - \nu_0}{m} = -E \tag{57}$$

В грубом приближении пренебрегаем логарифмом и берем $h = \frac{2\pi}{\nu_0 + \sigma_0^{-1}(m+E)}$, далее можно h итерационно уточнить по уравнению (57).

Выразим теперь через интегралы нужные нам функции $f_m(x)$. Из (45) и (53) найдем

$$f_m(x) = D_m J(\nu, m, x), \tag{58}$$

$$D_m = \Gamma(m+1)\operatorname{ctg}^m\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu+m)}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+x)^m\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\nu+m)\ldots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\cdot(-\nu+m-1)\ldots(-\nu)\Gamma(-\nu)} \tag{59}$$

По формуле дополнения

$$\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu) = -\frac{\pi}{\sin\nu\pi}$$

и получаем

$$D_m = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}(1+x)^m \prod_{k=1}^{m} \frac{k\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(\nu+k)(-\nu+k-1)} \sin\nu\pi. \tag{60}$$

Этот способ, однако, имеет следующий недостаток. Пусть $\nu = i\mu$, μ вещественно и велико,

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\mu t}{(x+\operatorname{ch} t)^{m+\frac{1}{2}}} dt. \tag{61}$$

Рассмотрим похожий интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\mu t}{\operatorname{ch} mt} dt = \frac{\pi}{m} \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2m}}. \tag{62}$$

При $\mu \gg m$ значения интеграла малы, но складываются из значений функции ~ 1, значит происходит сокращение с потерей точности. Этот способ не годится как универсальный.

Возьмем теперь второе интегральное представление (52). Положим в нем $q = -m$, $p = \nu$

$$P_\nu^{-m}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \sin^{-m}\theta \int_0^\theta \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t \cdot (\cos t - \cos\theta)^m \frac{dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}}. \tag{63}$$

Собственно, это есть обобщение формулы Мелера-Дирихле. Поступаем, как и прежде. Распространяем интеграл на симметричный промежуток, делаем замену $x\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{t}{2}$; функцию $\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t$ можно заменить на $e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}$:

$$P_\nu^{-m}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2} \frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}}{\cos\frac{t}{2}} \left(1-x^2\right)^m \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{64}$$

и, если обозначить

$$J(\nu, m, \theta) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}}{\cos\frac{t}{2}} \left(1-x^2\right)^m \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{65}$$

то

$$f_m(\theta) = C_m J(\nu, m, \theta),$$
$$C_m = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{m} \frac{k}{k-\frac{1}{2}}. \tag{66}$$

Применяем опять квадратурную формулу Эрмита–Мелера. При больших m множитель $\left(1-x^2\right)^m$ имеет при $x = 0$ резко выраженный максимум. У подынтегральной функции максимум смещается при $\nu \neq 0$. Число узлов при больших m и ν велико, однако реальное число слагаемых можно сократить, если суммировать от максимума в обе стороны.

Найдем положение максимума. Рассмотрим функцию $e^{nt}(\cos t - cos\theta)^m$. Производная от логарифма: $n + m\frac{-\sin t}{\cos t - \cos\theta} = 0$; Приравнивая нулю её логарифмическую производную, получим:

$$n(\cos t - \cos\theta) - m \sin t = 0$$

Пусть ψ – угол, для которого $\cos\psi = \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}$, $\sin\psi = \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}$, так что $\cos(\psi + t) = \cos\psi \cdot \cos\theta$.

Здесь t – точка максимума - ищется на отрезке интегрирования $[-\theta, \theta]$. Уравнение для t имеет на $[0, 2\pi]$ два корня. Число $\cos\psi \cdot \cos\theta$ есть абсцисса середины хорды, соединяющей точки на единичной окружности с аргументами $\psi + \theta$, $\psi - \theta$. Соответствующие точки на окружности - их две - лежат: одна на интервале $(-\theta, \theta)$, другая вне его. Поскольку $m > 0$ и ψ лежит на верхней полуокружности, то та из двух точек, которая лежит на $(-\theta, \theta)$, находится выше хорды, и значит на $(0, \pi)$, и значит равна $\arccos(\cos\psi \cdot \cos\theta)$.

Итак,

$$t = \arccos\frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} \cos\theta - \arccos\frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} \tag{67}$$

есть положение точки максимума.

Оценка остатка делалась так же, как и для интеграла Мелера–Дирихле, отличие лишь в том, что появляется множитель $\left(1-t^2\right)^m = \sin^{2m} u$, для которого – с некоторым завышением – примем оценку $\left|\sin^{2m} u\right| \le e^{2m\sigma}$ в той же полосе $|\Im u| \le \sigma$, $\sigma = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}$, тогда для остатка соответственно получим

$$|R| \sim e^{\nu_0 \pi + 2m\sigma - 2N\sigma} = \varepsilon, \tag{68}$$

$$N \sim m\pi \frac{\nu_0 \pi + E}{2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}}, \; E = \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{69}$$

Отметим ещё раз, что фактическое число слагаемых при вычислении квадратурной суммы должно быть существенно меньше N при большом m, так как слагаемые быстро убывают в обе стороны от точки максимума.

Литература

1. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений*. ГИТТЛ М-Л. (1951)
2. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т.2, Физматгиз, М. (1963).
3. Б. А. Самокиш, *Замечание о вычислении определенных интегралов*, Методы вычислений, изд-во ЛГУ, Но. 2 (1963), 45–49.
4. В. А. Фок, *О представлении произвольной функции в виде интеграла от функции Лежандра с комплексным индексом.* — ДАН СССР, **39**, Но. 7 (1943), 279–283.
5. V. M. Babich, K. D. Cherednichenko, *On Fock type asymptotics of Legendre functions.* — Integral Transform and Special Functions., **5**(1-2) (1997), 1–18.

Babich V. M., Dement'ev D. B., Samokish B. A. On the calculations of Legendre functions.

The subject of the paper is methods of calculations of Legendre functions $P_\nu(x)\ -1 < \ x \le \ 1, \ \nu \in \ \mathbb{C}$ and associated Legendre functions $P_\nu^{-m}(x)\ -1 < x \le 1, \ \nu \in \mathbb{C}, \ m \in \mathbb{Z}_+$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: babich@pdmi.ras.ru.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 мая 2007 г.