Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 342, 2007 г.

В. М. Бабич

КВАЗИФОТОНЫ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЛУЧЕВОЙ МЕТОД

Для широкого класса уравнений в частных производных существуют высокочастотные асимптотические решения, имеющие характер волны, амплитуда которой существенно отлична от нуля лишь в окрестности изолированной точки. Точка эта движется вдоль луча (в квантомеханическом случае - вдоль классической траектории) с групповой скоростью. Решения такого типа строятся начиная с шестидесятых годов (см. [1]). Более общие варианты сосредоточенных разложений получены в книге [2]. Асимптотические решения, сосредоточенные в окрестности движущейся точки, мы будем называть “квазифотонами”. Здесь мы следуем работе [3], где впервые использовался такой термин. Квазифотоны в противоположность тоже сосредоточенным решениям – солитонам – чисто линейный феномен. В работах [1–9] аналитические выражения для квазифотонов находятся либо с помощью методики монографии В. П. Маслова [2], либо на основе теории дифракционного пограничного слоя. Это непростые построения.

Мы поставили своей целью максимально упростить теорию квазифотонов. В настоящей работе, как и в работах [2, 7, 9], исходным пунктом является геометро-оптическое (или ВКБ) приближение. Используя формальные степенные ряды (см. [10]), нам удается провести нужные построения, следуя плану по которому строятся классические пространственно временные (ПВ) разложения. Аналог эйконала здесь комплексный и классическая теория характеристик неприменима ни для его построения, ни для решения аналога уравнений переноса. Практически во всех случаях, когда удается построить ПВ – геометро-оптическое разложение, вывод аналитического выражения для квазифотонов оказывается делом по-существу рутинным, хотя и не всегда про-

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ИНТАС-РФФИ 05-01-00936, 04-01-00522.

стым.

В целях иллюстрации нашего подхода здесь рассматривается модельный пример волнового уравнения с переменной скоростью. В этом случае основные идеи не затеняются технически сложными построениями. Другими способами квазифотоны для волнового уравнения давно построены (см. [3, 5, 6].

1. Введение

Рассмотрим волновое уравнение с переменной скоростью

$$LU := \frac{1}{c^2(x)}U_{tt} - \Delta U = 0, \quad z = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

Здесь $s(x) > 0$ и имеет непрерывные производные всех порядков.

ПВ разложение – это формально удовлетворяющий уравнению (1.1) ряд вида

$$U = e^{ip\theta(t,x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(t,x)}{(ip)^j}, \tag{1.2}$$

где p – большой параметр. Если выполняются равенства

$$\theta_t^2 = c^2(\nabla\theta)^2, \tag{1.3}$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial U_{j+1}}{\partial t} - 2\frac{\partial\theta}{\partial x^\ell}\frac{\partial U_{j+1}}{\partial x^\ell} + U_{j+1}L\theta + LU_j = 0, \tag{1.4}$$
$$j = -1, 0, 1, 2, \dots, \quad U_{-1} := 0, \ \ \ell = 1, 2, 3,$$

то ряд (1.2) – формальное решение уравнения (1.1).

Традиционный метод решения уравнения (1.3), применимый лишь для вещественных θ – это метод характеристик (см. например, [6, глава 1, [11], [12, глава 2). Характеристики здесь – решения канонической системы

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial\theta_i}, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0, \quad \frac{d\theta_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\theta_0 + H = 0, \quad x^0 = t, \quad \theta_0 = \theta_t, \\ H = \pm c\sqrt{(\nabla\theta)^2} = H(x^1, x^2, x^3, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ \theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Решения $t = s$, $x^i = x^i(s)$ называются бихарактеристиками уравнения (1.1) или ПВ лучами. Уравнения (1.4) превращаются в рекуррентную последовательность обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для $U_0, U_1, U_2, \ldots$.

Предположим, что θ – комплексная функция, причем $\operatorname{Im}\theta \geqslant 0$, а равенство осуществляется лишь на фиксированном "опорном" ПВ луче $t = s$, $x^i = x^i(s)$, проходящем через начало координат (т.е. $x^i(0) = 0$). Частные суммы ряда (1.2) при $p \to \infty$ будут экспоненциально малы вне ПВ-луча.

Классическая теория характеристик – это существенно вещественная теория. Она неприменима при $\operatorname{Im}\theta \not\equiv 0$. Предположим, что θ не функция в классическом смысле, а разложение вида

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \cdots, \tag{1.7}$$

где $\theta^{(r)}$ – однородный r-ой степени полином от $\eta^i := x^i - x^i(t)$ ($x^i - x^i(t) = 0$ опорный ПВ луч) с коэффициентами, зависящими от t.

Если $\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$ – вещественные полиномы, и $\theta^{(2)}$ – квадратичная форма притом с положительно определенной мнимой частью и ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{U_j}{(ip)^j} \not\equiv 0$, то разложение (1.2) мы будем называть квазифотоном. Коэффициенты U_j – тоже будем считать формальными степенными рядами по η^i (см. [5, 6, 8]).

2. О решении задачи Коши для уравнения $\theta_t + H = 0$

Сначала рассмотрим коротко вопрос о решении уравнения

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + H(x^1, x^2, x^3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0 \tag{2.1}$$

при начальном условии

$$\theta|_{t=0} = \vartheta(x^1, x^2, x^3) \tag{2.2}$$

в классе формальных степенных рядов. Задача эта в классической постановке решается так (см. например, [11, 12] или [6, глава 1]): сначала находится решение задачи Коши для канонической системы (1.6) с начальными данными

$$\begin{gathered} t|_{s=0} = 0; \quad x^i|_{s=0} = a^i; \quad \theta_i|_{s=0} = \frac{\partial\vartheta(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^i}, \\ \theta_0 = -H(a^1, a^2, a^3, \theta_i|_{s=0}), \quad \theta|_{s=0} = \vartheta(a^1, a^2, a^3). \end{gathered} \tag{2.3}$$

В результате по крайней мере при малых t мы придем к соотношениям:

$$t = s; \quad x^i = x^i(s, a^j), \quad \theta = \theta(s, a^j). \tag{2.4}$$

Решив равенства $x^i = x^i(s, a^j)$ относительно a^j, что возможно при малых s, и, подставив в формулу $\theta = \theta(s, a^j)$ вместо s, a^j их выражения через $t(= s)$ и x^j, придем к функции θ как функции t, x^1, x^2, x^3, которая и будет решением задачи Коши (2.1)–(2.2). В классе формальных степенных рядов задача (2.1)–(2.2) решалась (см. [5, 6]). Здесь мы предлагаем несколько иной подход. В основе лежит замечательное наблюдение (см. [10]), состоящее в том, что в классе формальных степенных рядов сохраняются многие фундаментальные теоремы классического анализа в частности те, на которых основано решение задачи Коши (2.1)–(2.2) с помощью теории характеристик. Переписав все ее положения для формальных степенных рядов, мы придем к решению задачи Коши (2.1)–(2.2), либо в виде $\theta(t, x^1, x^2, x^3)$ – где θ ряд вида (1.7), либо в координатах s, a^1, a^2, a^3 в виде формального степенного ряда по степеням a^1, a^2, a^3 с коэффициентами, зависящими от s.

Задача построения θ рассматривалась в [2, 3], [6, глава 3]. Коротко приведем соответствующие результаты, несколько дополнив их. Подставляя разложение (1.7) в уравнение (1.6), получим $\theta^{(0)} = \text{const}$, $\theta^{(1)} = \theta_j \eta^j$, где θ_j, $j = 1, 2, 3$ однозначно определяется по $\frac{dx^j}{dt}$ (см. формулы (1.5)–(1.6). Положив $\theta^{(2)} = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}(t)\eta^i\eta^j$ ($\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ $i, j = 1, 2, 3$) получим для матрицы $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ матричное уравнение Риккати

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma A \Gamma + B\Gamma + \Gamma B^\top + C \tag{2.5}$$

$$A = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^i \partial\theta^j}\right), \quad B = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial\theta^j}\right), \quad C = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\right), \tag{2.6}$$

$$\theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial x^i},$$

$\top$ – знак транспонирования. Матрицы A, B, C рассматриваются на опорном луче $\eta^i = 0$.

Поступим в соответствии с методами (написанной М. М. Поповым) главы 9 монографии [13]. Положим

$$\Gamma = ZY^{-1}, \tag{2.7}$$

тогда из (2.5) получаем

$$\frac{dZ}{dt} = BZ + CY, \quad \frac{dY}{dt} = -AZ - B^\top Z. \tag{2.8}$$

Дифференцируя по a^i уравнения системы (1.5), придем к решению системы (2.8), если

$$Y = \left(\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\right), \quad Z = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial a^j}\right). \tag{2.9}$$

Из начальных данных (2.3) вытекает, что $Y|_{s=0} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичная матрица, тогда

$$Z|_{s=0} = \Phi + i\Omega, \tag{2.10}$$

где Φ и Ω симметричные матрицы, причем Ω – положительно-определенная. Матрицы Y и Z удовлетворяют соотношениям

$$Y^\top Z - Z^\top Y = 0, \quad Y^* Z - Z^* Y = i\Omega \tag{2.11}$$

(здесь $\top$ – знак транспонирования, $*$ – эрмитова сопряжения).

Равенство, эквивалентное соотношению $Y^*Z - Z^*Y = i\Omega$, можно найти в работе [8]. Это условие обеспечивает положительную определенность $\operatorname{Im}\Gamma = \operatorname{Im}(ZY^{-1})$. Равенство $Y^\top Z - Z^\top Y = 0$ эквивалентно симметричности Γ.

3. О некоторых квазиэнергетических соотношениях

Перейдем в равенствах (1.4) к системе координат s, a^1, a^2, a^3. Мы получим, что при $H = \pm c\sqrt{\sum\limits_{\ell=1}^{3} \theta_\ell^2}$ и при любом выборе знака

$$\begin{gathered} \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx^\ell}{ds} = \frac{-c^2\theta_\ell}{\theta_t}, \\ \frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial U_{j+1}}{\partial t} - 2\frac{\partial\theta}{\partial x^\ell}\frac{\partial U_{j+1}}{\partial x^\ell} = \frac{2}{c^2}\frac{dU_{j+1}}{ds}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Таким образом равенства (1.4) являются рекуррентной системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ряд U (см.(1.2)) будет тогда формальным решением уравнения (1.1).

Построим теперь квазисопряженное к U решение. Заметим, что если θ – решение уравнения (1.3), то $-\theta$ – тоже решение. Далее, учитывая линейность системы уравнений переноса, легко увидеть, что формальным решением уравнения (1.1) будет также ряд

$$V = e^{-ip\theta(t,x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(t,x)}{(-ip)^j}. \tag{3.2}$$

Разложение (3.2) и есть искомое квазисопряженное к U решение. Если бы θ и U_j были бы вещественными функциями, ряды (1.2) и (3.2) были бы просто комплексно сопряженными выражениями, здесь же θ и U_j формальные степенные ряды по η^ℓ или a^ℓ с комплексными вообще говоря коэффициентами.

Существует аналог энергетического подхода к интегрированию уравнений переноса, позволяющий их проинтегрировать примерно на том же пути, который применялся в ряде работ по ПВ методу в случае вещественного ПВ эйконала θ.

Начнем соответствующие рассмотрения с простого легко проверяемого тождества – следствия того, что U и V удовлетворяют уравнению (1.1)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{S} = 0 \tag{3.3}$$

$$E = \frac{1}{2c^2} U_t \cdot V_t + \frac{1}{2} U_{x^i} V_{x^i}; \quad \overrightarrow{S} = -\frac{1}{2} U_t \operatorname{grad} V - \frac{1}{2} V_t \operatorname{grad} U. \tag{3.4}$$

Если θ, U_j вещественны, то $U = \overline{V}$ ($^{-}$ – знак комплексного сопряжения), тождество (3.3) – закон сохранения энергии в дифференциальной форме, E – плотность энергии. В задачах, связанных с механикой, произведение $\frac{1}{2c^2} U_t \cdot V_t = |U_t|^2 \frac{1}{2c^2}$ – плотность кинетической энергии, $U_{x^i} \cdot V_{x^i} = U_{x^i} \overline{U}_{x^i}$ – плотность потенциальной энергии, $\overrightarrow{S}$ – вектор Умова–Пойнтинга – вектор потока энергии. В случае комплексных θ и U_j приписать E и $\overrightarrow{S}$ физический смысл затруднительно. Мы чаще будем иметь дело не с E и $\overrightarrow{S}$, а с их первыми приближениями по большому параметру p.

Обратимся к уравнению (1.3). Его можно переписать так:

$$\frac{1}{2c^2} e^{ip\theta} U_0 ip\theta_t \cdot e^{-ip\theta} U_0 (-ip\theta_t) = \frac{1}{2} e^{ip\theta} U_0 ip\theta_{x^\ell} \cdot e^{-ip\theta} U_0 (-ip\theta_{x^\ell}). \tag{3.5}$$

Это равенство – аналог известного в теории гармонических колебаний равенству среднего за период значения кинетической энергии среднему за период значению потенциальной энергии

([14], см. также [6, гл. 1 и 2]). Считая, что $\theta_t = \theta_t(x^j, \theta_\ell) \equiv -H$ (см. (2.1)) и дифференцируя (3.5) по θ_ℓ, получим (с учетом (1.5))

$$\langle E \rangle \frac{dx^\ell}{ds} = \langle S^\ell \rangle, \tag{3.6}$$

где

$$\langle E \rangle =: \frac{p^2}{2c^2} U_0^2 \theta_t^2 + \frac{p^2}{2} U_0^2 \theta_{x^i} \theta_{x^i} \tag{3.7}$$

$$\langle S^\ell \rangle =: p^2 U_0^2 \theta_t \theta_\ell. \tag{3.8}$$

Равенство (3.6) – аналог "квазигидроэнергетического" соотношения, связывающего групповую скорость с потоком энергии ([14], [6, гл. 1–2]).

Обратимся к соотношению (3.3) и напишем его в первом приближении по p:

$$p^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta_t^2}{2c^2} U_0^2 + \frac{(\nabla\theta)^2}{2} U_0^2 \right) + \operatorname{div} \left(U_0^2 \theta_t \nabla\theta \right) \right] = 0. \tag{3.9}$$

Сократим равенство (3.9) на p^2. Мы получим, учитывая (3.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta_t^2}{c^2} U_0^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x^\ell} \left(U_0^2 \theta_t \frac{\partial \theta}{\partial x^\ell} \right) = 0. \tag{3.10}$$

Введем в "системе координат" $x^{0'}$, $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'} = s$, a^1, a^2, a^3 вектор $\overrightarrow{A}$ с компонентами $A^{0'}, A^{1'}, A^{2'}, A^{3'}$, где

$$A^{0'} = \frac{\theta_t^2}{c^2} U_0^2, \quad A^{i'} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.11}$$

Считаем θ_t, c^2, U_0^2 – скалярами.

В системе x^0, x^1, x^2, x^3 ($x^0 = t$) вектор (3.11) будет иметь компоненты $A^i = A^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, где

$$A^0 = A^{0'} \frac{\partial t}{\partial s} = A^{0'}, \quad A^i = A^{0'} \frac{\partial x}{\partial s}$$

или, учитывая (3.6), (3.7), (3.8):

$$A^0 = \frac{\theta_t^2}{c^2} U_0^2, \quad A^\ell = \frac{\theta_t^2}{c^2} U_0^2 \frac{\langle S^\ell \rangle}{\langle E \rangle} = U_0^2 \theta_t \frac{\partial \theta}{\partial x^\ell}. \tag{3.12}$$

Таким образом левая часть равенства (3.10) – т.е. $\partial A^i/\partial x^i$ – это дивергенция вектора $\overrightarrow{A}$, записанная в декартовых координатах t, x^1, x^2, x^3. Перейдем к координатам s, a^1, a^2, a^3. Известная формула векторного анализа позволяет написать равенство:

$$0 = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}(JA^{i'}), \quad J = \frac{D(x^0, x^1, x^2, x^3)}{D(s, a^1, a^2, a^3)}. \tag{3.13}$$

Из компонент $A^{i'}$ отлична от нуля лишь $A^{0'}$ (см. (3.11)), поэтому (3.13) сводится к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(J\frac{\theta_t^2}{c^2}U_0^2\right) = 0, \tag{3.14}$$

откуда, с учетом равенства $\frac{d\theta_t}{ds} = 0$ (см. (1.5)), получаем:

$$U_0 = \frac{\Psi_0(a^1, a^2, a^3)\cdot c}{\sqrt{J}}. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание, что $t = s$, приходим к формуле:

$$U_0|_{x^i = x^i(t)} = \frac{\Psi_0(0,0,0)c}{\sqrt{\det Y}}, \tag{3.16}$$

где Y – матрица, определяемая формулой (2.9). Результаты, эквивалентные формуле (3.16), можно найти в [2–5], [6, гл. 3].

Для U в первом приближении (см. (1.2), (1.7), (3.16)) получается выражение:

$$U \sim \frac{\Psi_0(0,0,0)c(x)}{\sqrt{\det Y}} e^{i[p\theta_i(x^i - x^i(t)) + \frac{1}{2}p\Gamma_{ij}(x^i - x^i(t))(x^j - x^j(t))]} \tag{3.17}$$

$$\Gamma = (\Gamma_{ij}) = ZY^{-1}, \quad p \gg 1. \tag{3.18}$$

4. Заключение

Выражение (3.17) физически соответствует волновому пакету – квазифотону, двигающемуся вдоль луча с групповой скоростью. Выражение (3.17) – известно. Цель настоящей работы – новый вывод формулы для квазифотона, вывод, фактически копирующий настолько близко, насколько это возможно, вывод формул пространственно-временного лучевого метода. Развиваемый здесь подход к построению квазифотонов не связан тесно с частными особенностями геометро-оптического разложения (1.1) и по-видимому допускает разнообразные обобщения и аналоги.

Литература

1. В. М. Бабич, Ю. П. Данилов, *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенного в окрестности классической траектории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **15** (1969), 47–65.
2. В. М. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, Физматгиз, М. (1977).
3. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–11.
4. J. Ralston, *Gaussian beams and the propagation of singularities.* — MAA Studies Math. **21**, Englewood Cliffs. N. Y. (1982), 206–248.
5. А. П. Качалов, *Система координат при описании квазифотонов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 73–76.
6. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны.* — Изд-во ЛГУ, Л. (1985).
7. V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, *Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics.* — Ann. Phys. **246**, No. 2 (1996), 231–290.
8. А. П. Качалов, *Нестационарные электромагнитные гауссовы пучки в неоднородной анизотропной среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **264** (2000), 83–100.
9. В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри.* — Теор. и мат. физика **130**, No. 2 (2002), 460–492.
10. С. Бохнер, У. Т. Мартин, *Функции многих комплексных переменных.* ИЛ, М. (1951).
11. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Том 4, часть 2. Наука, М. (1981).
12. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* Мир, М. (1964).
13. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М. (1972).
14. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* Наука, М. (1977).

Babich V. M. Space-time ray method and quasiphotons.

A new approach to the construction of qusiphotons is illustrated by example of quasiphotons of the wave equation with variable velocity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: babich@pdmi.ras.ru.

Поступило 25 января 2007 г.