Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Б. П. Харламов

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ВЫХОДА

В настоящей статье продолжается исследование стохастического интеграла по полумарковскому процессу диффузионного типа [2, 4]. Для его построения используется аддитивный функционал по следу, определяемый условным разложением Леви процесса хода времени относительно следа. При этом не требуется (но и не исключется) существование математического ожидания момента первого выхода из малой окрестности начальной точки. Соответственно меняется вид мартингала по следу, составляющего основную часть определения стохастического интеграла. При выводе формул существенно используется иерархический метод вписанных эллипсоидов.

Изложение в настоящей статье опирается на материал статьи [4], хотя минимум определений и обозначений, необходимый для понимания смысла выводимых формул и высказываемых утверждений, также приводится.

1. Обозначения и определения

Мы обозначаем: $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$; $\mathcal{D}$ – пространство Скорохода функций $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ непрерывных справа, имеющих пределы слева; $\mathcal{C}$ – множество непрерывных функций $\xi \in \mathcal{D}$;

$\mathcal{F}$ – борелевская сигма-алгебра подмножеств пространства $\mathcal{D}$;

$X_t : X_t\xi = \xi(t)$ – значение функции в точке t (проекция);

$\theta_t : (\theta_t\xi)(s) = \xi(t+s)$ $(s, t \geqslant 0)$ – сдвиг;

$\alpha_t : (\alpha_t\xi)(s) = \xi(t \wedge s)$ $(s, t \geqslant 0)$ – остановка;

$\mathfrak{A}$ – класс всех открытых подмножеств множества $\mathbb{X}$;

$\sigma_G : \sigma_G(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin G\}$ – момент первого выхода из множества $G \in \mathfrak{A}$;

Поддержано грантом РФФИ НШ-4222.2006.1.

$\sigma_r(\xi) = \sigma_{B(x,r)}(\xi)$ – момент первого выхода из шаровой окрестности $B(x,r) = x + rB$ начальной точки, где $x = \xi(0)$, $r > 0$, $B = B(\mathbf{0},1)$; принимаем $\sigma_\varnothing = \sigma_0 = 0$.

Известно, что $\mathcal{F} = \sigma(X_t : t \geqslant 0)$. Обозначим $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leqslant s \leqslant t)$;

$\mathcal{T}$ – множество марковских моментов относительно потока сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)_0^\infty$; для любого $\tau \in \mathcal{T}$ пусть

$X_\tau : X_\tau(\xi) = X_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$;

$\theta_\tau : \theta_\tau(\xi) = \theta_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$;

$\alpha_\tau : \alpha_\tau(\xi) = \alpha_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\mathcal{D}$;

$\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$ на множестве $\{\tau_1 < \infty\}$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T})$ – сумма марковских моментов с учетом сдвига;

σ_r^k $(k \geqslant 1)$ – итерированный момент первого выхода из шаровых окрестностей: $\sigma_r^1 = \sigma_r$, $\sigma_r^{k+1} = \sigma_r^k \dot{+} \sigma_r$; для произвольной последовательности $\delta \equiv (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$, где $\Delta_k \in \mathfrak{A}$ $(k \geqslant 1)$, определим итерированные моменты σ_δ^n $(n \geqslant 1)$ $\sigma_\delta^1 = \sigma_{\Delta_1}$, $\sigma_\delta^{k+1} = \sigma_\delta^k \dot{+} \sigma_{\Delta_{k+1}}$ (принимаем $\sigma_\delta^0 = \sigma_r^0 = 0$);

$\mathcal{F}_\tau = \{S \in \mathcal{F} : (\forall t \geqslant 0)\ S \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$ $(\tau \in \mathcal{T})$ – сигма-алгебра подмножеств – событий, предшествующих марковскому моменту τ; известно, что любой элемент $A \in \mathcal{F}_\tau$ может быть представлен в виде $\alpha_\tau^{-1}A$ (см. [1, с. 48]); отсюда вытекает обозначение $\mathcal{F}_\tau = \alpha_\tau^{-1}\mathcal{F}$.

Аналогичную сигма-алгебру подмножеств – событий, следующих за марковским моментом τ, естественно обозначить $\theta_\tau^{-1}\mathcal{F}$. Эта сигма-алгебра содержит множество $\{\tau < \infty\}$, а также все подмножества этого множества, представимые в виде $\theta_\tau^{-1}A$ $(A \in \mathcal{F})$.

Пусть $(\mathbf{P}_x)$ $(x \in \mathbb{X})$ – измеримое семейство вероятностных мер на $\mathcal{F}$ такое, что $(\forall x \in \mathbb{X})$ $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$. Мы будем говорить, что для семейства мер $(\mathbf{P}_x)$ выполняется марковское свойство относительно момента τ, если $(\forall B \in \mathcal{F})$ $(\forall A \in \mathcal{F}_\tau)$

$$\mathbf{P}_x(\theta_\tau^{-1}B, A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{E}_x(\mathbf{P}_{X_\tau}(B); A \cap \{\tau < \infty\}).$$

Такой момент τ мы называем *моментом регенерации* семейства мер $(\mathbf{P}_x)$. Обозначим $\mathcal{M}(\mathbf{P}_x)$ множество моментов регенерации данного семейства мер.

Семейство $(\mathbf{P}_x)$ называется *полумарковским*, если при любом $G \in \mathfrak{A}$ $\sigma_G \in \mathcal{M}(\mathbf{P}_x)$. Известно также, что любая конечная итерация моментов первого выхода из открытых множеств вида σ_r^n

также является моментом регенерации полумарковского процесса [1, с. 72].

Рассмотрим отношение эквивалентности $\xi_1 \sim \xi_2$ в $\mathcal{D}$, которое означает, что существуют такие две замены времени, которые переводят функции ξ_1 и ξ_2 из $\mathcal{D}$ в одну функцию из пространства $\mathcal{D}$. Класс эквивалентности $\ell\xi$ функции ξ по отношению $\sim$ называется *следом* или последовательностью состояний траектории ξ. След непрерывной функции ξ на интервале $[0, \tau_0]$ (τ_0 – внутренний марковский момент, $\tau_0 < \infty$) может быть представлен конструктивным образом с помощью значений $X_\tau(\xi)$ для τ из достаточно богатого множества внутренних марковских моментов, например для всех $\tau = \sigma_r^n$ ($r \in \mathbb{R}'_+$ – положительное рациональное число, $n \geqslant 1$). Обозначим $\mathcal{T}^0$ класс марковских моментов, содержащий все σ_G ($G \in \mathfrak{A}$), все конечные итерации таких моментов и замкнутый относительно сходимости снизу; $\mathcal{F}^0 \equiv \sigma(X_\tau : \tau \in \mathcal{T}^0)$ – сигма-алгебра на множестве всех следов, которая может быть определена эквивалентным образом с помощью любого достаточно богатого множества внутренних марковских моментов.

В теории стохастического интегрирования по полумарковскому процессу особую роль играют $\mathcal{F}^0$-измеримые аддитивные функционалы. Такой функционал a_τ, называемый также *аддитивным функционалом по следу*, определяется свойствами:

1) $a_0 = 0$,

2) при любом $\tau \in \mathcal{T}^0$ a_τ как функция от ξ измерима относительно $\mathcal{F}^0_\tau$,

3) при любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^0$ выполняется формула

$$a_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = a_{\tau_1} + a_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}. \tag{1}$$

Построение $\mathcal{F}^0$-измеримых аддитивных функционалов, используемых нами, опирается на следующие свойства условных математических ожиданий, вытекающие из определения полумарковского процесса.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ – возрастающая последовательность внутренних марковских моментов, (x_i) – соответствующая последовательность значений траектории в эти моменты: $x_i = X_{t_i}$, $x_0 = x$. Пусть для данного k справедливо $t_k = t_{k-1} \dot{+} \sigma_S$, где $S \in \mathfrak{A}$ и $S = S(x_0, \ldots, x_{k-1})$, т.е. это множество может зависеть от предыдущих значений траектории. Тогда $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda(\sigma_S \circ t_{k-1})) | \, x_0, x_1, x_2, \ldots) =$$

$$= \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda(\sigma_S \circ t_{k-1}))|\, x_{k-1}, x_k) = \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\exp(-\lambda\sigma_S)|\, X_{\sigma_S}). \quad (2)$$

а также выполняется следующее свойство условной независимости: для любых интегрируемых функций f и g

$$\mathbf{E}_x((f \circ \alpha_{t_k})(g \circ \theta_{t_k})|\, x_0, x_1, x_2, \dots) =$$

$$= \mathbf{E}_x(f \circ \alpha_{t_k}|\, x_0, x_1, \dots, x_k)\mathbf{E}_x(g \circ \theta_{t_k}|\, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots). \quad (3)$$

Доказательство утверждений, подобных этим, можно найти в работе [1].

2. Метод выводящих последовательностей

Для подмножества $A \subset \mathbb{X}$ *выводящей последовательностью* называется последовательность $\delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$ $(\Delta_i \subset \mathbb{X})$ такая, что для любых $\xi \in \mathcal{D}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $X_{\sigma_\delta^n}(\xi) \notin A$ или же $\sigma_\delta^n(\xi) > t$. Выводящая из $\mathbb{X}$ последовательность называется просто *выводящей последовательностью*. Известно, что, если δ – выводящая последовательность то $\delta \cap A$ – выводящая из A последовательность, где $\delta \cap A$ состоит из пересечений $\Delta_n \cap A$. Ранг последовательности δ – это верхняя грань диаметров всех членов последовательности. Пусть $\mathcal{S}(\mathfrak{A}_1)$ – множество всех выводящих последовательностей, составленных из элементов класса $\mathfrak{A}_1$.

В работе [4] использовались выводящие последовательности специального вида. Композицией двух выводящих последовательностей $\delta_i = (\Delta_{in})_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\delta_1 \times \delta_2$, состоящая из элементов вида $\Delta_{1j_1} \cap \Delta_{2j_2}$ $(j_i \in \mathbb{N})$. По индукции определяем композицию $\delta_1 \times \dots \times \delta_n$ любого конечного числа выводящих последовательностей $\delta_k = (\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots) \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_k)$, где $\mathfrak{A}_k$ – счетное открытое покрытие пространства $\mathbb{X}$. Ранг композиции последовательностей не превышает наименьшего ранга из рангов компонент.

3. Метод вписанных эллипсоидов

В работе [4] при построении стохастического интеграла использовался метод конечных композиций выводящих последовательностей, состоящих из множеств произвольной формы. Предпосылкой их использования служила эквивалентность среднего приращения процесса от начальной точки до момента первого выхода из ее малой окрестности и среднего времени первого выхода из нее. При использовании аддитивного функционала, определяемого условным разложением Леви, этих свойств не достаточно. Для нашего метода построения необходима более детальная асимптотика, использующая не только интеграл по распределению точки первого выхода на поверхность данной окрестности, но и плотность этого распределения. Оказалось, что это распределение имеет плотность асимптотически наиболее простую в случае, когда окрестность имеет эллипсоидальную форму с параметрами эллипсоидальности, согласованными с матрицей коэффициентов при вторых производных управляющего уравнения процесса.

Пусть $S^0(x)$ – нормированный и центрированный открытый эллипсоид, соответствующий точке $x \in G$; $(x + rS^0(x))_{r=0}^{\infty}$ – семейство эллипсоидальных окрестностей точки x с параметром масштаба r. Обозначим $r(x,G) = \sup\{r > 0 : x+rS^0(x) \subset G\}$, $S_{G,u}(x) = x + (r(x,G) \wedge u)S^0(x)$, $(u > 0)$, а также $\sigma_{G,u}(\xi) = \sigma_{S_{G,u}(X_0(\xi))}(\xi)$, причем $\sigma_{G,u}(\xi) = 0$, если $X_0(\xi) \notin G$. Обозначим $\sigma^n_{G,u}$ n-ую итерацию этого момента первого выхода, т.е. $\sigma^0_{G,u} = 0$ и $\sigma^n_{G,u} = \sigma^{n-1}_{G,u} \dot{+} \sigma_{G,u}$ $(n \geqslant 1)$. Если эллипсоид $S^0(x)$ нигде не вырождается на множестве G, то на множестве непрерывных функций $\sigma^n_{G,u} \to \sigma_G$ $(n \to \infty)$, а также $X_{\sigma^n_{G,u}} \to X_{\sigma_G}$.

Будем говорить, что множество G *исчерпывается* эллипсоидами с параметром масштаба не более u. Чтобы сохранить монотонность (иерархичность) последовательности разбиений, мы будем на втором этапе исчерпывать эллипсоидами меньшего масштаба каждый эллипсоид из первой последовательности, и т.д. А именно, пусть $S_1, S_2, \ldots$ – первая последовательность исчерпывающих эллипсоидов с параметром масштаба ограниченным единицей, где

$$S_1 = x + (r(G,x) \wedge 1)S^0(x), \quad t_1 = \sigma_{S_1}, \quad x_1 = X_{t_1},$$

$$S_k = x_{k-1} + (r(G,x_{k-1}) \wedge 1)S^0(x_{k-1}), \quad t_k = t_{k-1} \dot{+} \sigma_{S_k},$$

$x_k = X_{t_k}$ $\quad (k \geqslant 1, t_0 = 0, x_0 = x)$. Далее для каждого k определяем последовательности второго этапа $S_{k,l}$ $(l \geqslant 1)$ с параметром масштаба не более 2^{-1}, третьего – с параметром масштаба не более 2^{-2} и т.д.

$$S_{k_1,\ldots,k_n} = x_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n-1} +$$

$$+(r(S_{k_1,\dots,k_{n-1}},x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})\wedge 2^{-n+1})S^0(x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}),$$

где $t_{k_1,\dots,k_n}=t_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}\dot{+}\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}$, $x_{k_1,\dots,k_n}=X_{t_{k_1,\dots,k_n}}$, а также $t_{k_1,\dots,k_{n-1},0}=t_{k_1,\dots,k_{n-1}}$. При этом

$$\sigma_G=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{S_k}\circ t_{k-1}=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sigma_{S_{k_1,k_2}}\circ t_{k_1,k_2-1}=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}\circ t_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}.$$

Ряды сходятся по-траекторно и, следовательно, $\mathbf{P}_x$-почти наверное.

4. Асимптотические формулы

Обозначим $f_\tau(\lambda;\phi|x)=\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\tau}\,\phi(X_\tau);\tau<\infty)$, где ϕ – непрерывная функция на фазовом пространстве $\mathbb{X}$, $\lambda\geqslant 0$, $\tau\in\mathcal{T}$. Полумарковским процессом диффузионного типа назовем процесс, для которого для любого ограниченного множества $G\in\mathfrak{A}$ функционал $f_{\sigma_G}(\lambda;\phi|x)$ как функция от $x\in G$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a^{ij}D_{ij}u+\sum_{i=1}^{d}b^iD_iu-cu=0, \tag{4}$$

где $a^{ij}=a^{ij}(x)$, $(a^{ij}(x))$ – положительно определенная матрица, зависящая от точки x, причем $\sum_{i=1}^{d}a^{ii}(x)=d$ (нормированный след матрицы); $(b^i)=(b^i(x))$ – вектор, зависящий от x, $c=c(\lambda,x)$ – неотрицательная величина, зависящая от $\lambda\geqslant 0$ и от x; D_{ij}, D_i – операторы дифференцирования по соответствующим координатам. Кроме того выполняется граничное условие $u(x)=\phi(x)$ при $x\in\partial G$.

Будем предполагать, что при любых i и j коэффициенты a^{ij}, b^i, c – непрерывные функции от x, причем a^{ij} дважды непрерывно дифференцируемы, b^i непрерывно дифференцируемы. Пусть, кроме того, существуют положительные числа Λ_1, Λ_2 такие, что при любых $x\in G$

$$\sum_{ij}a^{ij}(x)x^ix^j\geqslant\Lambda_1\|x\|^2,\quad |b^i(x)|,\,|c(\lambda,x)|\leqslant\Lambda_2.$$

Пусть U_x – квадратный корень из матрицы $a(x) = (a^{ij}(x))$, т.е. $a(x) = U_x' U_x$. При сделанных предположениях существует плотность $h_{\sigma_S}(\lambda, y\,|\,x)$ $(\lambda \geqslant 0)$ распределения точки первого выхода из множества S с гладкой поверхностью ∂S относительно меры Лебега на этой поверхности:

$$f_{\sigma_S}(\lambda; \phi|x) = \int\limits_{\partial S} \phi(y) h_{\sigma_G}(\lambda, y|\, x)\, dS(y).$$

При этом $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_S)|\, X_{\sigma_S} = y) = \frac{h_{\sigma_S}(\lambda, y|\, x)}{h_{\sigma_S}(0, y|\, x)}.$$

В работе [3] доказана асимптотика для случая $S = x + rU_x B$, т.е. когда $S^0(x) = U_x B$ – образ относительно U_x открытого шара $B = B(\mathbf{0}, 1)$:

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_S)|\, X_{\sigma_S} = y) = 1 - c(\lambda, x) r^2/d + o(r^2) \quad (r \to 0), \tag{5}$$

откуда следует, что момент и точка первого выхода асимптотически независимы. Учитывая доказанное в [3] разложение

$$f_{\sigma_S}(\lambda, \phi|\, x) - \phi(x) = r^2 A_\lambda^{(0)}(\phi|\, x)/d + o(r^2) \quad (r \to 0), \tag{6}$$

где $\lambda > 0$, ϕ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и

$$A_\lambda^{(0)}(\phi|\, x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) D_{ij}\phi(x) + \sum_{i=1}^{d} b^i(x) D_i\phi(x) - c(x, \lambda)\phi(x),$$

получаем $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\frac{\mathbf{E}_x(\phi(X_{\sigma_S})) - \phi(x)}{1 - \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_S)|\, X_{\sigma_G})} = \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x)}{c(\lambda, x)}(1 + o(1)) \quad (r \to 0). \tag{7}$$

Эквивалентность (7) имеет ключевое значение при построении стохастического интеграла по полумарковскому процессу при отсутствии математического ожидания момента первого выхода.

5. Среднее приращение функции

Очередная наша задача – выразить разность $\mathbf{E}_x\phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x)$ с помощью аддитивного функционала Леви. Пусть $G \subset \mathbb{R}_+$ – ограниченное открытое множество и $x \in G$. При сделанных предположения о коэффициентах уравнения (4) $\mathbf{P}_x(\sigma_G < \infty) = 1$ для ограниченного множества G.

Рассмотрим процедуру первого этапа исчерпывания множества G эллипсоидами $S_1, S_2, \ldots$. Имеем $\sigma_G = \sum_{k=1}^N \sigma_{S_k} \circ \theta_{t_{k-1}} + \sigma_G \circ \theta_{t_N}$, откуда $\sigma_G \circ \theta_{t_N} \to 0$ при $N \to \infty$ для любой траектории $\xi \in \mathcal{D}$. Для процесса с непрерывными траекториями имеем $x_N \equiv X_{t_N} \to X_{\sigma_G}$. Отсюда $\phi(x_N) \to \phi(X_{\sigma_G})$ для любой непрерывной функции ϕ. Поэтому в разложении

$$\mathbf{E}_x \phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x) = \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^N (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) + \phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x_N) \right)$$

остаточный член стремится к нулю. С другой стороны, из определения процедуры исчерпывания множества G эллипсоидами и из ограничения на коэффициенты a^{ij} уравнения (4) следует, что $(\forall \xi \in \mathcal{C})$ $(\forall u > 0)$ $(\exists n_u < \infty)$ $(\forall n > n_u)$ параметр масштаба эллипсоида S_n меньше u. Имеем для полумарковского процесса

$$\mathbf{E}_x \sum_{k=1}^N (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) = \mathbf{E}_x \sum_{k=1}^N (\mathbf{E}_{x_{k-1}} \phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1})).$$

Пользуясь эквивалентностью (7) можно найти достаточные условия, при которых ряд в последнем выражении сходится абсолютно $\mathbf{P}_x$-п.н. А именно, при заданном u и $N > n_u$, а также при ϕ, принадлежащем области определения характеристического оператора $A_0^{(0)}$,

$$\sum_{k=1}^N (\mathbf{E}_{x_{k-1}} \phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_u} (\mathbf{E}_{x_{k-1}} \phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1})) + \sum_{k=n_u+1}^{N} (\mathbf{E}_{x_{k-1}} \phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1})) =$$

$$= Z_u^{(1)} + Z_u^{(2)},$$

где $Z_u^{(1)}$ и $Z_u^{(2)}$ – первая и вторая суммы соответственно. Имеем

$$Z_u^{(2)} = \sum_{k=n_0+1}^{N} (1 - \mathbf{E}_{x_{k-1}} (\exp(-\lambda \sigma_{S_k}) | \, X_{\sigma_{S_k}})) \frac{A_0^{(0)}(\phi | \, x_{k-1})}{c(\lambda, x_{k-1})} (1 + \epsilon_u),$$

где $\epsilon_u \to 0$ при $u \to 0$ равномерно по всем $k > n_u$. Пользуясь сходимостью условного математического ожидания

$$\mathbf{E}_{x_{k-1}} (\exp(-\lambda \sigma_{S_k}) | \, X_{\sigma_{S_k}}) \to 1 \quad (u \to 0)$$

при любом $\lambda > 0$, можно заменить во второй сумме разность на логарифм, откуда

$$Z_u^{(2)} = \sum_{k=n_0+1}^{N} (-\log \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_k})|\, X_{\sigma_{S_k}})) \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x_{k-1})}{c(\lambda, x_{k-1})}(1+\epsilon_u).$$

Следовательно

$$|Z_u^{(2)}| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{N} (-\log \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_k})|\, X_{\sigma_{S_k}})) \left| \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x_{k-1})}{c(\lambda, x_{k-1})}(1+\epsilon_u) \right|$$

$$\leqslant \sup_{x\in G} \left| \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x)}{c(\lambda, x)}(1+\epsilon_u) \right| \left(-\log \prod_{k=n_0+1}^{N} \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_k})|\, X_{\sigma_{S_k}}) \right).$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что произведение математических ожиданий в последнем выражении можно заменить на математическое ожидание произведения:

$$\prod_{k=n_0+1}^{N} \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_k})|\, X_{\sigma_{S_k}}) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=n_0+1}^{N} \sigma_{S_k} \circ t_{k-1} \right) |\, x_0, x_1, x_2, \ldots \right).$$

Последнее выражение не меньше

$$\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{S_k} \circ t_{k-1} \right) |\, x_0, x_1, x_2, \ldots \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_G)|\, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Тем самым мы доказали что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{E}_{x_{k-1}}\phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1}))$ сходится абсолютно $\mathbf{P}_x$-п.н., если $(\forall\lambda > 0)$

$$\sup_{x\in G}(1 - \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_S))) \to 0 \tag{8}$$

при $u \to 0$, где $S = x + uU_x B$, а также

$$\sup_{x\in G} \left| \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x)}{c(\lambda, x)} \right| < \infty, \tag{9}$$

что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Очевидно, что по тем же соображениям абсолютно сходятся соответствующие ряды на любом этапе построения иерархической системы исчерпывания эллипсоидами, и поэтому можно записать

$$\mathbf{E}_x\phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x) = \mathbf{E}_x \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{E}_{x_{k-1}}\phi(X_{\sigma_{S_k}}) - \phi(x_{k-1})) =$$

$$= \mathbf{E}_x \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (\mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}\phi(X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}) - \phi(x_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}})) =$$

$$= \mathbf{E}_x \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (1 - \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\, X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))\times$$

$$\times \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})}{c(\lambda, x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})}(1 + \epsilon_{2^{-n+1}}) =$$

$$= \mathbf{E}_x \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\, X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))$$

$$\times \frac{A_0^{(0)}(\phi|\, x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})}{c(\lambda, x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})}(1 + \epsilon_{2^{-n+1}}).$$

Прежде, чем перейти к общему случаю рассмотрим ряд под знаком интеграла при $A_0^{(0)}(\phi|\, x)/c(\lambda, x) \equiv 1$.

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\, X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))(1+\epsilon_{2^{-n+1}})$$

$$= -\log \prod_{k_1=1}^{\infty} \cdots \prod_{k_n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\, X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}})(1+\epsilon_{2^{-n+1}})$$

$$= -\log \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}} \circ t_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})|\, x_{k_1,\dots,k_n} : k_i \geqslant 0)$$

$$= -\log \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_G)|\, x_{k_1,\dots,k_n} : k_i \geqslant 0).$$

Обозначим $\mathcal{F}_n^0$ сигма-алгебру, порожденную всеми $x_{k_1,\dots,k_n} : k_i \geqslant 0$. Согласно построению $\mathcal{F}_n^0 \subset \mathcal{F}_{n+1}^0$ $(n \geqslant 1)$ и $\mathcal{F}^0 = \sigma\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^0\big)$ –

сигма-алгебра, порожденная всеми $\mathcal{F}_n^0$. Отсюда по теореме Леви для мартингалов $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_G)|\,\mathcal{F}_n^0) \to \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_G)|\,\mathcal{F}^0).$$

Известно [1, с. 293], что при выполнении условия (8) выполняется формула условного разложения Леви относительно следа $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_G)|\,\mathcal{F}^0) = \exp(-b_{\sigma_G}(\lambda)), \tag{10}$$

где

$$b_{\sigma_G}(\lambda) = \lambda a_{\sigma_G} + \int\limits_{0+}^{\infty}(1 - e^{-\lambda u})\, n_{\sigma_G}(du), \tag{11}$$

a_τ – аддитивный функционал по следу, и при любом $u > 0$ $n_\tau([0,u))$ – аддитивный функционал по следу – мера Леви, зависящая от следа траектории. Отсюда $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\,X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))(1+\epsilon_{2^{-n+1}})$$

сходится к $b_{\sigma_G}(\lambda)$. Рассмотрим теперь общий случай непрерывного и ограниченного отношения $A_0^{(0)}(\phi|\,x)/c(\lambda,x)$.

Для любого n определим отображение “горизонтального квантования” $L_n : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ такое, что $(\forall t < \sigma_G)$, если $t_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1} \leqslant t < t_{k_1,\dots,k_n}$, то $X_t(L_n\xi) = X_{t_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\xi)$. Согласно построению, $L_n\xi \to \xi$ равномерно по всем $\xi \in \mathcal{C}$ на $[0, \sigma_G(\xi))$. Отсюда для любой непрерывной функции ψ $\psi(X_t \circ L_n) \to \psi(X_t)$. Кроме того $X_{t_{I_n}}L_m = X_{t_{I_m}}L_m = X_{t_{I_m}}$, где $m < n$, $I_m = (k_1,\dots,k_m)$, $I_n = (k_1,\dots,k_m,k_{m+1},\dots,k_n)$. Имеем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\,X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))\times$$

$$\times\psi(x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})(1+\epsilon_{2^{-n+1}}) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\,X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))\times$$

$$\times\psi(x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1} \circ L_m)(1+\epsilon_{2^{-n+1}})+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\,X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))\times$$

$$\times(\psi(x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1})-\psi(x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}\circ L_m))(1+\epsilon_{2^{-n+1}}).$$

Второй член этой суммы имеет порядок $\sup\limits_{x,y\in G,\|x-y\|<2^{-m+1}}|\psi(x)-\psi(y)|$. Первый член суммы можно представить в виде

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}\psi(x_{k_1,\dots,k_{m-1},k_m-1})\sum_{k_{m+1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\times$$

$$\times(-\log \mathbf{E}_{x_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}}(\exp(-\lambda\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}})|\,X_{\sigma_{S_{k_1,\dots,k_n}}}))(1+\epsilon_{2^{-n+1}}).$$

При каждом многомерном индексе $I'_m=(k_1,\dots,k_{m-1},k_m-1)$ сумма по всем оставшимся $n-m$ индексам сходится при $n\to\infty$ к значению $b_{\sigma_{S_{I_m}}}-b_{\sigma_{S_{I'_m}}}$. Отсюда при каждом m предел первой суммы можно записать в виде криволинейного интеграла от ступенчатой функции $\psi(X_t\circ L_m)$ по $\mathcal{F}^0$-измеримому аддитивному функционалу b_τ: $\int_0^{\sigma_G}\psi(X_\tau\circ L_m)\,db_\tau(\lambda)$. Этот интеграл отличается от интеграла от функции $\psi(X_t)$ также на член порядка $\sup\limits_{\|x-y\|<2^{-m+1}}|\psi(x)-\psi(y)|$. Отсюда следует равномерная $\mathbf{P}_x$-п.н. сходимость исследуемой суммы к криволинейному интегралу от $\psi(X_t)$. Из полученных нами соотношений следует теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (8) *и* (9) *и* $\dfrac{A_0^{(0)}(\phi|\,x)}{c(\lambda,x)}$ *равномерно непрерывно на* G. *Тогда*

$$\mathbf{E}_x\phi(X_{\sigma_G})-\phi(x)=\mathbf{E}_x\int_0^{\sigma_G}\frac{A_0^{(0)}(\phi|\,X_\tau)}{c(\lambda,X_\tau)}\,db_\tau(\lambda). \qquad (12)$$

Это выражение можно назвать обобщением формулы Дынкина для полумарковских процессов, которое охватывает как случай конечного, так и бесконечного математического ожидания момента первого выхода из окрестности начальной точки. Для конечного математического ожидания выведенную ранее формулу можно получить, устремив λ к нулю.

Для бесконечного математического ожидания это соотношение справедливо для любого $\lambda > 0$, т.е. не зависит от λ. Следовательно, предел отношения при $\lambda \to 0$ также существует, хотя при этом производные по λ от числителя и знаменателя стремятся к бесконечности. Можно придать этому отношению стандартную форму, положив $\lambda = 1$. С другой стороны, независимость от λ следует из предположения, что существует не зависящий от λ аддитивный функционал η_τ, при котором $b_\tau(\lambda) = \int_0^\tau c(\lambda, X_{\tau_1})\, d\eta_{\tau_1}$. Тогда $db_\tau(\lambda) = c(\lambda, X_\tau)\, d\eta_\tau$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}_x \phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\sigma_G} A_0^{(0)}(\phi|\, X_\tau)\, d\eta_\tau.$$

В случае конечного математического ожидания η_τ совпадает с $\mu_\tau \equiv \mathbf{E}_{X_0}(\tau|\, \mathcal{F}^0)$ [1, с. 316]. Заметим, что предположение о существовании η_τ эквивалентно гипотезе о представлении полумарковского процесса в виде марковского процесса, преобразованного случайной заменой времени (специального вида), которая в общем случае не верна.

Нетрудно доказать формулу (12) для более общих внутренних марковских моментов остановки τ в качестве верхнего предела интегрирования по аддитивному функционалу.

6. Мартингал по следу

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$B_\tau = \int_0^\tau (c(\lambda, X_\tau))^{-1} db_\tau(\lambda).$$

В терминах этого положительного аддитивного функционала по следу будут выражаться другие криволинейные интегралы.

Положим $\phi(x) = x^i - y^i$, где $x, y \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^d$ и для любого $z \in \mathbb{R}^d$ обозначаем $z = (z^1, \ldots, z^d)'$ его координатное представление (вектор-столбец). Тогда $A_0^{(0)}(\phi|\, y) = b^i(y)$, где $\mathbf{b}(y) = (b^1(y), \ldots, b^d(y))'$ – вектор коэффициентов при первых производных уравнения (4). Распространяя определение криволинейного интеграла на векторные функции можно записать ($\forall\tau \in \mathcal{T}^0$) $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mathbf{E}_x(X_\tau - X_0) = \mathbf{E}_x \int_0^\tau \mathbf{b}(X_{\tau_1})dB_{\tau_1}.$$

Обозначим $\beta_\tau^\psi = \int_0^\tau \psi(X_{\tau_1})dB_{\tau_1}$.

Известно [4], что $M_\tau \equiv X_\tau - X_0 - \beta_\tau^{\mathbf{b}}$ – квадратично интегрируемый мартингал на частично упорядоченном множестве $\mathcal{T}^0$ (относительно потока сигма-алгебр $(\mathcal{F}_\tau)$ $(\tau \in \mathcal{T}^0)$), иначе называемый мартингалом по следу, с начальным значением $M_0 = 0$. Этот векторный мартингал имеет размерность d и его квадратическая характеристика – это матрица с элементами

$$K^{ij}(\tau) \equiv \mathbf{E}_x(M_\tau^i M_\tau^j) \quad (\tau \in \mathcal{T}^0).$$

В данном случае $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$K^{ij}(\tau) = \mathbf{E}_x\beta_\tau^{a^{ij}} \equiv \mathbf{E}_x \int_0^\tau a^{ij}(X_{\tau_1})dB_{\tau_1}.$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу выражения для соответствующей квадратической характеристики в работе [4]. Используемый в этой работе метод выводящих последовательностей применим благодаря формуле (12). Требует пояснений только сходимость к нулю интеграла от суммы случайного числа N произведений вида

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(\beta_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i}\beta_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j}); N \geqslant k).$$

В данном случае для любого $x_1 \in G$ и $\lambda_0 > 0$

$$\frac{\mathbf{E}_{x_1}(\beta_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i}\beta_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j})}{\mathbf{E}_{x_1}(\beta_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i})} \sim b^j(x_1)\frac{\mathbf{E}_{x_1}(b_{\sigma_{\Delta_k}}(\lambda_0))^2}{\mathbf{E}_{x_1}(b_{\sigma_{\Delta_k}}(\lambda_0))}.$$

Стремление последнего отношения к нулю при стремлении ранга выводящей последовательности к нулю следует из свойств марковского процесса диффузионного типа, где в данном случае марковский процесс соответствует уравнению (4) с коэффициентом $c(\lambda, x)$, замененным на $\lambda c(\lambda_0, x)$.

Из положительной определенности матрицы (a^{ij}) следует положительная определенность матрицы $K^{ij}(\tau)$. Точно так же, как в [4], доказывается, что (m^{ij}_τ) является мартингалом по следу, где

$$m^{ij}_\tau = M^i_\tau M^j_\tau - \beta^{a^{ij}}_\tau .$$

Таким образом матричный аддитивный функционал по следу с компонентами

$$\beta^{a^{ij}}_\tau \equiv \int\limits_0^\tau a^{ij}(X_{\tau_1})dB_{\tau_1} \tag{13}$$

является квадратической характеристикой векторного квадратично интегрируемого мартингала M_τ.

7. Стохастический интеграл по мартингалу

В многомерном случае интерес представляют интегралы от скалярного произведения интегрируемой векторнозначной функции на приращения векторнозначной интегрирующей функции. Для решения проблемы о существовании стохастического интеграла по мартингалу $M \equiv (M_\tau)$ рассмотрим векторную функцию f ступенчатого вида такого, что существует последовательность марковских моментов $(\tau_k)_1^N$, в которой N – целочисленная функция такая, что $\{N = k\} \in \mathcal{F}_{\tau_k}$, $\tau_k \in \mathcal{T}^0$, $\tau_0 = 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots, \tau_N = \sigma_G$, для любых $t \in [\tau_{k-1} < \tau_k)$ $f(t) = f(\tau_{k-1})$ и для любого k $f(\tau_{k-1})$ – $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$-измеримая случайная величина со значениями из $\mathbb{R}^d$ [4]. Определим стохастический интеграл на интервале $[0, \sigma_G)$ от функции f по мартингалу M как сумму

$$\int\limits_0^{\sigma_G} (f(\tau))'\, dM_\tau = \sum_{k=1}^N (f(\tau_{k-1}))'\, (M_{\tau_k} - M_{\tau_{k-1}}),$$

где “штрих” означает транспонирование. Обозначим $\mathcal{L}_0$ класс таких функций f. Для двух функций этого класса всегда можно подобрать последовательность марковских моментов с перечисленными выше свойствами так, чтобы каждая из этих функций сохраняла постоянное значение на любом интервале между соседними марковскими моментами этой последовательности. Отсюда следует, что $\mathcal{L}_0$ – линейное пространство. Для распространения определения стохастического интеграла на более широкий класс функций введем скалярное произведение

$$(f,g) \equiv \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} \sum_{ij} f^i(\tau) g^j(\tau)\, a^{ij}(X_\tau)\, dB_\tau \right), \tag{14}$$

и рассмотрим пополнение $\mathcal{L}_2$ пространства $\mathcal{L}_0$ относительно метрики, определяемой нормой $\|f\| = (f,f)^{1/2}$. При этом для $f \in \mathcal{L}_0$ справедливо.

$$\|f\|^2 = \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} (f(\tau))'\, dM_\tau \right)^2. \tag{15}$$

Доказательство см. в [4]. Продолжение стохастического интеграла на пространство $\mathcal{L}_2$, состоящее из пределов всех сходящихся в себе последовательностей из элементов класса $\mathcal{L}_0$ (в смысле скалярного произведения (14)), называется стохастическим интегралом (в смысле сходимости в средне квадратичном) по мартингалу (M_τ). При этом для любой функции $f \in \mathcal{L}_2$ справедлива формула (15).

8. Стохастический интеграл по полумарковскому процессу

Стохастический интеграл по полумарковскому процессу диффузионного типа определяется в соответствии с разложением приращения процесса в сумму мартингала и аддитивного функционала ограниченной вариации. То есть этот интеграл представляется в виде суммы стохастического интеграла по мартингалу и криволинейного интеграла по соответствующему аддитивному функционалу. Таким образом, на интервале $[0,\tau)$ $(\tau \in \mathcal{T}^0)$ стохастический интеграл от адаптированной функции f класса $\mathcal{L}_2$ по полумарковскому процессу диффузионного типа равен

$$\int_0^\tau (f(\tau_1))'\, dX_{\tau_1} = \int_0^\tau (f(\tau_1))'\, dM_{\tau_1} + \int_0^\tau (f(\tau_1))' \mathbf{b}(X_{\tau_1}) dB_{\tau_1}. \tag{16}$$

9. Пример

Рассмотрим полумарковский процесс, получающийся в результате случайной замены времени в винеровском процессе

$(w(t))$. Предположим, что замена времени (прямая) представляет собой независимый от $(w(t))$ процесс $(\psi(t))$ с независимыми строго положительными приращениями, которые имеют бесконечное математическое ожидание. Пусть, например, $(\psi(t))$ – процесс Леви с мерой Леви $u^{-3/2}du/\sqrt{2\pi}$:

$$\mathbf{E}(\exp(-\lambda\psi(t))) \equiv \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{0+}^{\infty}(1-e^{-\lambda u})u^{-3/2}du\right) = \exp(-2t\sqrt{2\lambda}).$$

Из определения прямой замены времени [1, с. 237] следует, что $\sigma_\Delta(\xi) = \psi(\sigma_\Delta(w))$. Отсюда

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta)) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\psi(\sigma_\Delta))) = \mathbf{E}_x^W(\exp(-2\sqrt{2\lambda}\,\sigma_\Delta)),$$

где $(\mathbf{P}_x^W)$ – семейство мер винеровского процесса. Отсюда видно, что данный процесс имеет бесконечное математического ожидание момента первого выхода из любой окрестности начальной точки. Уравнение (4) для данного процесса получается из соответствующего уравнения для винеровского процесса путем замены $c^W(\lambda, x) \equiv \lambda$ на $2\sqrt{2\lambda}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u - 2\sqrt{2\lambda}\,u = 0,$$

где ∇^2 – оператор Лапласа. Отсюда $dB_\tau = d\mu_\tau^W$, где $\mu_\tau^W = \mathbf{E}_{X_0}^W(\tau|\,\mathcal{F}^0)$. В этом случае, как было отмечено в [4], криволинейный интеграл под знаком интеграла в (12) может быть заменен на обыкновенный интеграл:

$$\mathbf{E}_x\phi(X_{\sigma_G}) - \phi(x) = \mathbf{E}_x\int_0^{\sigma_G} A_0^{(0)}(\phi|\,X_\tau)\,d\mu_\tau^W = \mathbf{E}_x\int_0^{\sigma_G} A_0^{(0)}(\phi|\,X_t)\,dt.$$

Данный пример показывает независимость стохастического интеграла по следу от замены времени, что может быть доказано и в более общей ситуации.

10. Формула Ито

Рассмотрим дважды дифференцируемую функцию ϕ. Метод построения стохастического интеграла по следу для полумарковских процессов диффузионного типа позволяет достаточно просто доказать представление приращения функции ϕ на интервале

$[0,\sigma_G)$, т.е. доказать формулу Ито–Дынкина

$$\phi(X_{\sigma_G}) = \\ = \phi(X_0) + \int\limits_0^{\sigma_G} \nabla\phi(X_\tau)'\,dX_\tau + \frac{1}{2}\sum_{ij}\int\limits_0^{\sigma_G} D_{ij}\phi(X_\tau)a^{ij}(X_\tau)dB_\tau. \quad (17)$$

В этом представлении первый интеграл является стохастическим интегралом по полумарковскому процессу, а второй – криволинейным интегралом по аддитивному функционалу $b_\tau(\lambda)$.

Заметим, что в работе [4] при выводе формулы (15) метод вписанных эллипсоидов фактически не использовался, так как для ее доказательства было достаточно применить формулу (6) и соответствующую асимптотику для математического ожидания момента первого выхода из малой окрестности начальной точки. Благодаря формуле (12) можно применить тот же метод доказательства и в случае бесконечного математического ожидания момента первого выхода.

Пусть $\delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$ – выводящая из G последовательность ранга r. Ей соответствует случайное число N и разбиение интервала $[0,\sigma_G)$ на N интервалов случайной длины $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = \sigma_G$, где принимаем (после подходящего перенумерования) $t_k = t_{k-1} \dotplus \sigma_{\Delta_k}$. Имеем

$$\phi(X_{\sigma_G}) - \phi(X_0) = \sum_{k=1}^N (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) = \\ = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^d D_i\phi(x_{k-1})(x_k^i - x_{k-1}^i)\right) + \\ + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d D_{ij}\phi(\widetilde{x})(x_k^i - x_{k-1}^i)(x_k^j - x_{k-1}^j)\right),$$

где $x_k = X_{t_k}$, $\widetilde{x} \in \Delta_k$. Заметим, что первая сумма стремится при $r \to 0$ к стохастическому интегралу по полумарковскому процессу от векторной функции $\nabla\phi \equiv (D_1\phi, \dots, D_d\phi)'$. Рассмотрим вторую сумму. Обозначим

$$J_\delta = \sum_{k=1}^N \psi(x_{k-1})(x_k^i - x_{k-1}^i)(x_k^j - x_{k-1}^j),$$

где ψ – непрерывная функция. Мы приводим здесь доказательство средне-квадратической сходимости суммы J_δ к криволинейному интегралу

$$J \equiv \int_0^{\sigma_G} \psi(X_\tau)\, a^{ij}(X_\tau)\, dB_\tau ,$$

так как доказательство аналогичного факта, приведенное в [4], не достаточно корректно.

Используя формулу (12), имеем

$$\mathbf{E}_x J_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\mathbf{E}_{x_{k-1}} (X^i_{\sigma_{\Delta_k}} - X^i_0)(X^j_{\sigma_{\Delta_k}} - X^j_0))\, \psi(x_{k-1}); N \geqslant k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\psi(x_{k-1}) \mathbf{E}_{x_{k-1}} \left(\int_0^{\sigma_{\Delta_k}} A_0^{(0)}(\phi|\, X_\tau)\, dB_\tau \right) ; N \geqslant k \right) .$$

В данном случае $\phi(x) = (x^i - X^i_0)(x_j - X^j_0)$ и потому $A_0^{(0)}(\phi|\, y) = a^{ij}(y)$. Используя оператор горизонтального квантования L_δ $(t_{k-1} \leqslant t < t_k \Rightarrow X_t \circ L_\delta = x_{k-1})$, можно записать

$$\mathbf{E}_x J_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\mathbf{E}_{x_{k-1}} \left(\int_0^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau) \psi(X_\tau \circ L_\delta)\, dB_\tau \right) ; N \geqslant k \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} a^{ij}(X_\tau) \psi(X_\tau \circ L_\delta)\, dB_\tau \right) .$$

Последнее выражение стремится к $\mathbf{E}_x J$ при стремлении ранга выводящей последовательности к нулю благодаря равномерной непрерывности ψ на любом компакте, включенном в G, и потраекторной сходимости $L_\delta \xi \to \xi$ в равномерной метрике в $\mathcal{C}$.

Далее, используя обозначение $h^i_k = x^i_k - x^i_{k-1}$ $(k \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant d)$, имеем

$$\mathbf{E}_x (J_\delta – J)^2 \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k}^{n} \left(\psi(x_{k-1}) h^i_k h^j_k – \int_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau) \psi(X_\tau)\, dB_\tau \right) \times \right.$$

$$\times\left(\psi(x_{l-1})h_k^i h_k^j - \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right); N=n\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\mathbf{E}_x\left(\left(\psi(x_{k-1})h_k^i h_k^j - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right)\times\right.$$

$$\times\left(\psi(x_{l-1})h_k^i h_k^j - \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right); N\geqslant l\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\mathbf{E}_x\left(\left(\psi(x_{k-1})h_k^i h_k^j - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right)\mathbf{E}_{x_{l-1}}\times\right.$$

$$\times\left(\psi(x_{l-1})(X^i_{\Delta_k}-X^i_0)(X^j_{\Delta_k}-X^j_0) - \int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right); N\geqslant l\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n}\mathbf{E}_x\left(\left(\psi(x_{k-1})h_k^i h_k^j - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right)\mathbf{E}_{x_{l-1}}\times\right.$$

$$\times\left(\psi(X_0)(X^i_{\Delta_k}-X^i_0)(X^j_{\Delta_k}-X^j_0) - \int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right); N=n\Bigg).$$

Имеем далее

$$\sum_{l=k}^{n}\mathbf{E}_{x_{l-1}}\left(\psi(X_0)(X^i_{\Delta_k}-X^i_0)(X^j_{\Delta_k}-X^j_0) - \int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right) =$$

$$= \sum_{l=k}^{n}\mathbf{E}_{x_{l-1}}\left(\psi(X_0)\int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\,dB_\tau - \int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\,dB_\tau\right).$$

Обозначим $\sigma^m_{\delta,k} = \sigma^m_\delta - \sigma^{k-1}_\delta$ $(m\geqslant k)$. Тогда для любой функции ϕ для полумарковского процесса справедливо $\mathbf{P}_x$-п.н. $\mathbf{E}_{x_m}\phi = \mathbf{E}_{x_{k-1}}(\phi\circ\theta_{\sigma^m_{\delta,k}})$. Отсюда предыдущая сумма равна

$$\mathbf{E}_{x_{k-1}}\left(\sum_{l=k}^{n}\left(\int\limits_{0}^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_0)-\psi(X_\tau))\,dB_\tau\right)\circ\theta_{\sigma^{l-1}_{\delta,k}}\right) =$$

$$= \mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma^n_{\delta,k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_{\delta,k}) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg),$$

где $L_{\delta,k}$ – оператор горизонтального квантования, соответствующий выводящей последовательности $\delta^{(k)} = (\Delta_k, \Delta_{k+1}, \ldots)$. Итак,

$$\mathbf{E}_x(J_\delta - J)^2 \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}_x\Bigg(\Bigg(\psi(x_{k-1})h^i_k h^j_k - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\, dB_\tau\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma^n_{\delta,k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_{\delta,k}) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg); N = n\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\Bigg(\Bigg(\psi(x_{k-1})h^i_k h^j_k - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\, dB_\tau\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma^n_{\delta,k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_{\delta,k}) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg); N \geqslant k\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\Bigg(\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\psi(X_0)(X^i_{\sigma_{\Delta_k}} - X^i_0)(X^j_{\sigma_{\Delta_k}} - X^j_0) -$$

$$- \int\limits_0^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)\psi(X_\tau)\, dB_\tau\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma^n_{\delta,k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_{\delta,k}) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg); N \geqslant k\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\Bigg(\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma_{\Delta_k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_\delta) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x_{k-1}}\Bigg(\int\limits_0^{\sigma^n_{\delta,k}} a^{ij}(X_\tau)(\psi(X_\tau \circ L_{\delta,k}) - \psi(X_\tau))\, dB_\tau\Bigg); N \geqslant k\Bigg).$$

Это выражение уже нетрудно проанализировать при стремлении ранга выводящей последовательности к нулю. Его модуль не превышает

$$2\left(\sup_{x\in G}|a^{ij}(x)| \sup_{\|x-y\|<r}|\psi(x)-\psi(y)|\right)^2\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma_{\Delta_k}})\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma^n_{\delta,k}}); N\geqslant k\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma_{\Delta_k}})\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma^n_{\delta,k}}); N\geqslant k\right)=$$

$$=\mathbf{E}_x\sum_{k=1}^{N}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma^N_{\delta,k}})\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}_x\sum_{k=1}^{N}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})\mathbf{E}_{x_{k-1}}(B_{\sigma_G})\leqslant(\sup_{y\in G}\mathbf{E}_y(B_{\sigma_G}))\mathbf{E}_x(B_{\sigma_G}),$$

т.е. для доказательства сходимости к нулю достаточно существования первого момента распределения B_{σ_G}. Полагая $\psi(x)=D_{ij}\phi$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ϕ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и мвтематическое ожидание криволинейного интеграла B_{σ_G} относительно меры $\mathbf{P}_x$ ограничен на G как функция от x. Тогда справедлива формула Ито–Дынкина* (17).

Литература

1. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* Наука, СПб, 2001.
2. Б. П. Харламов, *Абсолютная непрерывность мер в классе полумарковских процессов диффузионного типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **294** (2002), 216–244.
3. Б. П. Харламов, *Характеристический оператор диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 226–251.
4. Б. П. Харламов, *Стохастический интеграл по полумарковскому процессу диффузионного типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 251–276.

Harlamov B. P. Stochastic integral in case of infinite expectation of the first exit time.

A method of analysis of a multi-dimensional semi-Markov process of diffusion type in case of infinite expectation of the first exit time from a small neighborhood of the initial point is worked out. A generalization of a formula of Dynkin for this case is proved. The formula of Ito for the stochastic integral by the multi-dimensional semi-Markov process of diffusion type is derived.

Институт проблем машиноведения РАН Поступило 20 ноября 2006 г.
E-mail: harlamov@random.ipme.ru