Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Н. В. Смородина

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ЛЕВИ

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0,1]$ – скачкообразный процесс Леви, т.е. стохастически непрерывный, сепарабельный процесс с независимыми однородными приращениями, гауссовская компонента которого равна нулю. Известно ([6, 11]), что траектории процессов Леви с вероятностью единица принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке.

Для описания данного класса процессов мы будем использовать представление Леви–Хинчина ([6, 3]). Именно,

$$\xi(t) = at + \int_0^t \int_{0<|x|\leqslant 1} x\widetilde{\nu}(ds,dx) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\nu(ds,dx). \qquad (1)$$

В этом представлении a – неслучайная константа, $\nu(ds,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,1]\times\mathbb{R}$ с интенсивностью вида $dt\Lambda(dx)$, где мера Λ носит название меры Леви или спектральной меры процесса ξ, а $\widetilde{\nu}(dt,dx) = \nu(dt,dx) - \mathbb{E}\nu(dt,dx)$ – соответствующая центрированная мера. Известно, что мера Леви Λ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Lambda(\{0\}) = 0$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ $\Lambda(\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]) < \infty$,

3) $\int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2 d\Lambda < \infty$.

Мы дополнительно предположим, что мера Λ не содержит дискретной компоненты и $\Lambda(\mathbb{R}) = \infty$ (последнее условие означает, что рассматриваемый процесс не является обобщенным пуассоновским).

Работа выполнена при поддержке гранта DFG 436 RUS 113/823.

В качестве вероятностного пространства для пуассоновской случайной меры мы выберем пространство конфигураций (см. [2]). Вид множества, на котором мы будем рассматривать конфигурации, определяется свойствами меры Λ. Для односторонних процессов мы рассматриваем конфигурации на множестве на множестве $[0,1]\times(0,\infty)$, а для произвольных процессов – на множестве $[0,1]\times\mathbb{R}$ На этом пространстве конфигураций мы рассматриваем пуассоновскую меру с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\Lambda(dx)$.

Распределение процесса ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ можно рассматривать как образ пуассоновской меры на пространстве конфигураций под действием отображения, задаваемого (1). Поэтому, вместо того, чтобы строить отображения пространства $\mathbb{D}[0,1]$ в себя, мы сначала решим более общие задачи.

1. Построения полугруппы несингулярных преобразований пуассоновской меры, заданной на пространстве конфигураций $\mathcal{X}(G)$, где множество G имеет вид прямого произведения $G = S\times(0,\infty)$, S – полное сепарабельное метрическое пространство. Про интенсивность Π пуассоновской меры в этом случае мы предполагаем, что она имеет вид

$$\Pi(d\theta,dx) = \pi(d\theta)\gamma_\theta(dx), \tag{2}$$

где π – конечная мера на S, γ_θ – σ-конечная мера на $(0,\infty)$, причем для π- почти всех $\theta\in S$ мера γ_θ удовлетворяет тем же свойствам, что и мера Леви Λ (кроме свойства 3).

2. Построения группы, сохраняющих пуасссоновскую меру, преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, где множество G имеет вид прямого произведения $G = S\times\mathbb{R}$, S – полное сепарабельное метрическое пространство (при тех же предположениях об интенсивности Π пуассоновской меры).

Всюду далее мы будем рассматривать преобразования F пространства конфигураций, порожденные преобразованиями $\varphi : G\to G$, так что конфигурация X, состоящая из точек вида $\overline{x}$, $\overline{x} = (\theta,x)$, $\overline{x}\in X$ под действием этого преобразования переходит в конфигурацию $Y = F(X)$, состоящую из точек вида $\varphi(\overline{x})$, $\overline{x}\in X$, т.е.

$$F(X) = \{\varphi(\overline{x})\}_{\overline{x}\in X}. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что под действием преобразования (3) пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую же меру с интенсивностью $\Pi\varphi^{-1}$.

Первый результат об абсолютной непрерывности пуассоновских мер в пространстве конфигураций (в $\mathbb{R}^n$) принадлежит А. В. Скороходу [4] (см. также [9, 1, 2 5]).

В работе [10] Вершика и Цилевич рассматривались преобразования гамма меры, представляющей из себя пуассоновскую меру на множестве $S \times (0, \infty)$ с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\frac{e^{-x}}{x}dx,$$

где $\theta \in S$, $x \in (0, \infty)$, причем $\pi(S) < \infty$.

В этой работе было показано, что гамма мера квазиинвариантна относительно группы преобразований F_a, $a \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ есть множество измеримых функций $a : S \to (0, \infty)$ таких, что

$$\int\limits_S |\log a(\theta)| \pi(d\theta) < \infty,$$

а F_a есть преобразование вида (3) с $\varphi(\theta, x) = (\theta, a(\theta)x)$. Заметим, что множество $\mathcal{M}$ является коммутативной группой относительно поточечного умножения функций, и для любых a_1, $a_2 \in \mathcal{M}$ мы имеем $F_{a_1 a_2} = F_{a_1} \circ F_{a_2}$.

Далее, в работе [7] рассматривались трансформации пуассоновской меры P_α, $\alpha > 0$ на $S \times (0, \infty)$ с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$. В этой работе было показано, что мера P_α квазиинвариантна относительно полугруппы преобразований Φ_f, $f \geqslant 0$, $f \in L_1(S, \pi)$, где Φ_f есть преобразование вида (3) с

$$\varphi(\theta, x) = \left(\theta, \frac{x}{(1 + \alpha f(\theta) x^\alpha)^{1/\alpha}}\right). \tag{4}$$

В этой же работе было показано, что для всякого $\alpha > 0$ пуассоновская мера $\widetilde{P_\alpha}$ на пространстве $S \times \overline{\mathbb{R}}$ (здесь $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}$ инвариантна относительно группы преобразований $\widetilde{\Phi_f}$, где f пробегает множество всех измеримых функций на S а $\widetilde{\Phi}_f$ есть преобразование вида (3) с функцией φ, задаваемой формулой (4), при этом в (4) функции x^α, $x^{1/\alpha}$ предполагаются продолженными на отрицательную полуось нечетным образом.

В настоящей работе аналогичные результаты получены для произвольной пуассоновской меры с интенсивностью вида (2).

Статья организована следующим образом. В §2 содержатся все необходимые определения и обозначения, относящиеся к пространству конфигураций. В §3 строится полугруппа несингулярных преобразований пуассоновской меры на $S\times(0,\infty)$ (случай 1) с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\gamma_\theta(dx)$. В §4 для пуассоновской меры на $S\times\overline{\mathbb{R}}$ (случай 2) строится группа сохраняющих эту меру преобразований. Наконец, в §5 построены группы и полугруппы преобразований траекторий процессов Леви.

2. Пространство конфигураций

Пусть G – метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – его борелевская σ-алгебра, $\mathcal{B}_0$ — кольцо ограниченных борелевских подмножеств G. Далее, пусть Π – σ-конечная мера на $(G,\mathcal{B})$, причем $\Pi(V)<\infty$ для любого $V\subset\mathcal{B}_0$.

Через $\mathcal{X}=\mathcal{X}(G)$ мы обозначим пространства конфигураций на G. По определению

$$\mathcal{X}(G)=\{X\subset G:|X\cap V|<\infty\quad \text{для любого}\quad V\subset\mathcal{B}_0\},$$

где через $|A|$ обозначено число точек в множестве A. На пространстве $\mathcal{X}$ мы будем рассматривать топологию $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, – слабейшую топологию, такую, что все функционалы $\mathcal{X}\to\mathbb{R}$

$$X\mapsto\sum_{x\in X}f(x)$$

непрерывны для любых непрерывных функций $f:G\to\mathbb{R}$ с ограниченным носителем. Борелевскую σ-алгебру, порожденную $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ мы будем обозначать через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ Это наименьшая σ-алгебра для которой отображения

$$X\mapsto|X\cap V|$$

измеримы для любого $V\subset\mathcal{B}_0$.

Далее, мы говорим, что вероятностная мера P на $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ есть пуассоновская мера с интенсивностью Π, если для каждого $V\in\mathcal{B}_0$

$$P(X:|X\cap V|=k)=e^{-\Pi(V)}\frac{\Pi(V)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\dots,$$

и для непересекающихся множеств V_j, $j = 1, 2, \dots, n$ случайные величины ν_j, где $\nu_j(X) = |X \cap V_j|$ независимы. Подробнее см. [2, 8]

Нас будут интересовать только пуассоновские меры, удовлетворяющие условию $\Pi(G) = \infty$. Лишь в этом случае с вероятностью 1 конфигурация содержит бесконечное число точек.

3. Несингулярные преобразования пуассоновской меры

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что пространство G имеет вид прямого произведения $G = S \times (0, \infty)$, где S – полное сепарабельное метрическое пространство, а мера Π имеет вид

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma_\theta(dx), \quad \theta \in S, \quad x \in (0, \infty),$$

где π – конечная мера на S. Мы предполагаем также, что для π-почти всех $\theta \in S$.

1) $\gamma_\theta(0, \infty) = \infty$,

2) для любого $x > 0$ $\gamma_\theta(x, \infty) < \infty$, причем функция $U_\theta(x)$, где

$$U_\theta(x) = \gamma_\theta(x, \infty) \tag{5}$$

непрерывна и строго убывает.

Обозначим через $L^+(S)$ множество всех измеримых неотрицательных функций на S, а через $L_1^+(S, \pi)$, $L_1^+(S, \pi) \subset L^+(S)$ обозначим его подмножество, состоящее из всех интегрируемых по мере π функций. Отметим, что $L^+(S)$ и $L_1^+(S, \pi)$ образуют полугруппы по сложению.

Далее, для фиксированных $\theta \in S$, $t \geqslant 0$ определим преобразование $T_t^\theta : [0, \infty) \to [0, \infty)$, полагая

$$T_t^\theta(x) = U_\theta^{-1}(U_\theta(x) + t). \tag{6}$$

Заметим, что T_0^θ – тождественное отображение. Покажем, что для любых $s, t \in [0, \infty)$

$$T_{t+s}^\theta = T_t^\theta \circ T_s^\theta. \tag{7}$$

Действительно,

$$T_t^\theta \circ T_s^\theta(x) = T_t^\theta(U_\theta^{-1}(U_\theta(x) + s)) = U_\theta^{-1}(U_\theta(U_\theta^{-1}(U_\theta(x) + s)) + t) =$$
$$= U_\theta^{-1}(U_\theta(x) + s + t) = T_{t+s}^\theta.$$

Для $f \in L^+(S)$ определим преобразование $\tau_f : G \to G$ пространства G в себя, полагая

$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T^\theta_{f(\theta)}(x)). \tag{8}$$

Заметим, что если $f \equiv 0$, то τ_f тождественное преобразование, а из (7) немедленно вытекает, что для любых f, $g \in L^+(S)$

$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g. \tag{9}$$

Теперь, используя полугруппу преобразований τ_f, $f \in L^+(S)$, построим порожденную ею полугруппу преобразований Φ_f, $f \in L^+(S)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(S \times (0, \infty))$ в себя. В соответствии с (3), всякая конфигурация X, состоящая из точек вида (θ, x), $\theta \in S$, $x \in (0, \infty)$ под действием преобразования Φ_f переходит в конфигурацию Y, состоящую из точек вида $\tau_f(\theta, x) = (\theta, T^\theta_{f(\theta)}(x))$, т.е.

$$\Phi_f(X) = Y = \{(\theta, T^\theta_{f(\theta)}(x))\}. \tag{10}$$

Из (7) и (8) следует, что для всех f, $g \in L^+(S)$

$$\Phi_{f+g} = \Phi_f \circ \Phi_g. \tag{11}$$

Заметим, что в случае, когда мера $\gamma_\theta(dx)$ для всех $\theta \in S$ есть мера вида $\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ мы имеем

$$\tau_f(\theta, x) = \left(\theta, \frac{x}{(1 + \alpha f(\theta) x^\alpha)^{1/\alpha}}\right),$$

что соответствует преобразованиям, построенным в [7].

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. 1. *Для любого $f \in L_1^+(S, \pi)$ мера $P\Phi_f^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно P, причем*

$$P\Phi_f^{-1} = e^{\int_S f\, d\pi} \cdot P\big|_{A_f},$$

где A_f – подмножество пространства конфигураций положительной меры (зависящее от f), т.е. преобразование Φ_f переводит меру P в ее сужение $P\big|_{A_f}$ на некоторое подмножество ($e^{\int_S f\, d\pi} = \frac{1}{P(A_f)}$ – естественный нормирующий коэффициент).

2. *Для любой функции* $f \in L^+(S)$ *такой, что* $\int\limits_S f d\pi = \infty$ *меры* $P\Phi_f^{-1}$ *и* P *взаимно сингулярны.*

Доказательство. Прежде всего посмотрим, как выглядит при фиксированных $\theta \in S$, $t > 0$ образ меры γ_θ под действием отображения $T_t^\theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$.

Легко проверить, что $T_t^\theta(x)$ – строго возрастающая функция переменной x, причем $T_t^\theta(+\infty) = U_\theta^{-1}(t)$ и, следовательно, образ меры γ_θ под действием отображения T_t^θ будет иметь своим носителем интервал $(0, U_\theta^{-1}(t))$. Покажем, что на этом интервале мера $\gamma_\theta(T_t^\theta)^{-1}$ совпадает с мерой γ, т.е.

$$\gamma_\theta(T_t^\theta)^{-1} = \gamma_\theta\big|_{(0,U_\theta^{-1}(t))}. \tag{12}$$

Действительно, пусть $[\alpha,\beta] \subset (0, U_\theta^{-1}(t))$, тогда

$$\gamma_\theta(T_t^\theta)^{-1}([\alpha,\beta]) = \gamma_\theta([(T_t^\theta)^{-1}(\alpha),(T_t^\theta)^{-1}(\beta)]) =$$
$$U_\theta(U_\theta^{-1}(U_\theta(\alpha)-t)) - U_\theta(U_\theta^{-1}(U_\theta(\beta)-t)) =$$
$$U_\theta(\alpha) - U_\theta(\beta) = \gamma_\theta([\alpha,\beta]).$$

Формула (12), таким образом, доказана.

Далее, из (12) немедленно вытекает, что образ меры $\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma_\theta(dx)$ под действием отображения τ_f, есть мера, абсолютно непрерывная относительно Π, вида

$$\Pi\tau_f^{-1}(d\theta,dx) = \mathbf{1}_{(0,U_\theta^{-1}(f(\theta)))}(x)\pi(d\theta)\gamma_\theta(dx), \tag{13}$$

(здесь через $\mathbf{1}_{(0,U_\theta^{-1}(f(\theta))}$ обозначена индикаторная функция интервала $(0, U_\theta^{-1}(f(\theta)))$.

Рассмотрим теперь подмножество G_f множества $G = S\times(0,\infty)$, на котором плотность $\frac{d\Pi\tau_f^{-1}}{d\Pi}$ равна единице, т.е.

$$G_f = \{(\theta,x) \in G : 0 < x < U_\theta^{-1}(f(\theta))\}. \tag{14}$$

Из (13) вытекает, что мера $P\Phi_f^{-1}$ сосредоточена на множестве A_f вида

$$A_f = \{X \in \mathcal{X}(G) : X \cap (G \setminus G_f) = \emptyset\},$$

т.е. на множестве конфигураций, не имеющих точек в множестве $G \setminus G_f$. С другой стороны, A_f совпадает с пространством $\mathcal{X}(G_f)$

конфигураций на множестве G_f, причем в силу (13) на множестве G_f интенсивность пуассоновской меры $P\Phi_f^{-1}$ есть $\pi(d\theta)\gamma_\theta(dx)$.

Из всего вышесказанного немедленно следует, что мера $P\Phi_f^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно P, если $P(A_f) > 0$ и ортогональна P если $P(A_f) = 0$. Для завершения доказательства осталось только сосчитать $P(A_f)$.

Имеем

$$P(A_f) = P(X :| X \cap (G \setminus G_f) |= 0) = \exp(-\Pi(G \setminus G_f)) =$$

$$\exp\left(-\int\limits_S \pi(d\theta) \int\limits_{U_\theta^{-1}(f(\theta))}^{\infty} \gamma_\theta(dx)\right) = \exp\left(-\int\limits_S f d\pi\right).$$

Последнее выражение положительно тогда и только тогда, когда $\int\limits_S f d\pi < \infty$. Теорема 1 полностью доказана. $\square$

4. Сохраняющие меру преобразования

Предположим здесь, что пространство G имеет вид $S \times \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – расширенная числовая прямая (точка ∞ по определению знака не имеет), а интенсивность Π пуассоновской меры P имеет вид

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma_\theta(dx),$$

где π – конечная мера на S, а γ_θ – σ – конечная мера на $\overline{\mathbb{R}}$ (зависящая от θ). Для фиксированного $\theta \in S$ через U_θ, $U_\theta : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим функцию задаваемую формулой

$$U_\theta(x) = \begin{cases} \gamma_\theta(x, \infty), & \text{если } \ x > 0; \\ -\gamma_\theta(-\infty, x), & \text{если } \ x < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Также по определению положим $U_\theta(\infty) = 0$, $U_\theta(0) = \infty$. Заметим, что при $x > 0$ формула (15) совпадает с формулой (5).

Мы предположим, что для π-почти всех $\theta \in S$.

1) $\gamma_\theta(\{0\}) = \gamma_\theta(\{\infty\}) = 0$,

2) $\gamma_\theta((0, \infty)) = \gamma_\theta((-\infty, 0)) = +\infty$,

3) для любого $\varepsilon > 0$ $\gamma_\theta(\overline{\mathbb{R}} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]) < \infty$,

4) функция U_θ непрерывна на $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ и строго убывает на интервалах$(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Построим сначала при фиксированном $\theta \in S$ группу преобразований, сохраняющих меру γ_θ.

Для каждого $t \in (-\infty, \infty)$ определим преобразование $T_t^\theta : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, полагая

$$T_t^\theta(x) = U_\theta^{-1}\big(U_\theta(x) + t\big), \tag{16}$$

Для этого преобразования мы сохраним тоже обозначение, что и для преобразования, определяемого (6), но в отличие от (6) это преобразование действует из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, а параметр t может быть как положительным, так и отрицательным. Заметим, что $T_t^\theta(\infty) = U_\theta^{-1}(t)$ и $T_t^\theta(0) = 0$. Легко проверить, что семейство T_t^θ, $t \in (-\infty, \infty)$ образует однопараметрическую группу преобразований, т.е.

$$T_{t+s}^\theta = T_t^\theta \circ T_s^\theta. \tag{17}$$

Посмотрим, как выглядит траектория $t \mapsto T_t^\theta(x)$ при фиксированном x Для определенности, пусть t возрастает от 0 до ∞. Ясно, что $T_t^\theta(0) \equiv 0$ Пусть $x > 0$, тогда при возрастании t точка $T_t^\theta(x)$ будет монотонно стремиться к нулю справа. В случае, когда $x < 0$ траектория за конечное время, равное $-U_\theta(x)$ достигнет бесконечности, а когда t станет больше, чем $-U_\theta(x)$ траектория попадет уже на положительную полуось и начнет монотонно двигаться к нулю.

Далее, покажем, что группа преобразований T_t^θ, $t \in (-\infty, \infty)$ сохраняет меру γ_θ, т.е. для любого $t \in (\infty, +\infty)$

$$\gamma_\theta (T_t^\theta)^{-1} = \gamma_\theta. \tag{18}$$

Действительно, T_t^θ представляет из себя суперпозицию трех преобразований: U_θ, сдвига на t и U_θ^{-1} Первое преобразование переводит меру γ_θ в меру Лебега, преобразование сдвига меру Лебега не меняет, а преобразование U_θ^{-1} переводит меру Лебега обратно в меру γ_θ.

Как и ранее, через $L(S)$ будем обозначать множество всех измеримых функций на S Пусть $f \in L(S)$. Определим преобразование

$$\tau_f : S \times \overline{\mathbb{R}} \to S \times \overline{\mathbb{R}},$$

полагая

$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}^\theta). \tag{19}$$

Из (17) немедленно вытекает, что для любых $f,\, g \in L(S)$

$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g, \tag{20}$$

а из (18) вытекает, что для любого $f \in L(S)$

$$\Pi \tau_f^{-1} = \Pi. \tag{21}$$

Далее, по аналогии с (10), определим семейство $\widetilde{\Phi}_f$, $f \in L(S)$ преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}(S \times \overline{\mathbb{R}})$ в себя, полагая

$$\widetilde{\Phi}_f(X) = Y = \{(\theta, T^{\theta}_{f(\theta)}(x))\}.$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. 1. *Для любых $f, g \in L(S)$*

$$\widetilde{\Phi}_{f+g} = \widetilde{\Phi}_f \circ \widetilde{\Phi}_g.$$

2. *Для любого $f \in L(S)$*

$$P \widetilde{\Phi}_f^{-1} = P,$$

т.е $\widetilde{\Phi}_f$, $f \in L(S)$ является группой преобразований, сохраняющих меру P.

Доказательство. Утверждение п. 1 теоремы следует из (20). Для доказательства утверждения п. 2 заметим, что мера $P\widetilde{\Phi}_f^{-1}$ есть пуассоновская мера с интенсивностью $\Pi\tau_f^{-1}$, а в силу (21) $\Pi\tau_f^{-1} = \Pi$. $\square$

5. Преобразование траекторий процессов Леви

Рассмотрим сначала случай одностороннего процесса Леви. Для определенности предположим, что процесс имеет скачки только положительного знака. Мера Леви Λ такого процесса сосредоточена на положительной полуоси. Мы предположим, что мера Леви Λ удовлетворяет двум условиям:

1) $\Lambda(0, \infty) = \infty$,

2) функция

$$U(x) = \Lambda(x, \infty) \tag{22}$$

на интервале $(0, \infty)$ непрерывна и строго убывает.

Рассмотрим пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ на множестве G вида $G = [0,1] \times (0,\infty)$. На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi = \lambda \times \Lambda$, где λ – мера Лебега.

В соответствии с (1) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}(G), P)$ процесс ξ, с мерой Леви Λ может быть задан как

$$\xi(t,X) = at + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant x\leqslant 1}} x - t\int_{\varepsilon}^{1} x\Lambda(dx)\Bigg) + \sum_{(s,x)\in X, s\leqslant t, 1<x<\infty} x. \quad (23)$$

Суммирование в этих формулах проводится по точкам (s,x) конфигурации $X \in \mathcal{X}$. Соответствие между конфигурациями и траекториями имеет очень простой смысл. Именно, если точка (s,x) принадлежит конфигурации X, то построенная по X траектория случайного процесса в момент времени s имеет скачок величины x. Отображение $\mathcal{X} \to \mathbb{D}[0,1]$, задаваемое (22), сопоставляющее конфигурации траекторию случайного процесса, будем обозначать через Ξ, так что

$$\Xi(X) = \xi(\cdot, X).$$

Отметим очевидный факт, что различные конфигурации порождают различные траектории случайного процесса: при $X_1 \neq X_2$

$$\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2). \quad (24)$$

Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$, т.е.

$$\mathcal{P}_\xi = P\Xi^{-1}. \quad (25)$$

Для каждой функции $z \in \mathbb{D}[0,1]$ через Δz будем обозначать функцию

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-0), \quad t \in [0,1].$$

Ясно, что функция $\Delta z(t)$ отлична от нуля только в точках разрыва функции z.

Далее, пусть функция $f \in L_1^+[0,1]$. С помощью функции f мы определим преобразование $\Psi_f : \mathbb{D}[0,1] \to \mathbb{D}[0,1]$, полагая

$$[\Psi_f(z)](t) = z(t) + \sum_{s \leqslant t} \big(T_{f(s)}(\Delta z(s)) - \Delta z(s)\big), \tag{26}$$

где T_t, $t \geqslant 0$ – полугруппа преобразований (6), т.е. $T_t(x) = U^{-1}(U(x)+t)$ (функция U задается формулой (22), причем в отличие от общего случая, рассмотренного в (6), не зависит от параметра $t \in [0,1]$).

Посмотрим, что происходит с функцией $z \in \mathbb{D}$ под действием этого преобразования. Если функция z имела в момент времени t скачок равный x, то функция $\Psi_f(z)$ имеет в момент t скачок равный $T_{f(t)}(x)$, т.е. преобразование меняет только величину скачка, а момент скачка остаётся неизменным. Отметим, что непрерывные функции являются неподвижными точками $\Psi_f(z)$. Далее, рассмотрим полугруппу преобразований Φ_f, $f \in L_1^+([0,1],\lambda)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, $G = [0,1] \times (0,\infty)$ в себя, задаваемое (10). Из (10), (23) и (26) немедленно следует, что

$$\Psi_f \circ \Xi = \Xi \circ \Phi_f. \tag{27}$$

Соотношение (27) показывает, что Ψ_f определено почти всюду по мере $\mathcal{P}_\xi$. Кроме того, из (7) вытекает, что для любых $f, g \in L_1^+([0,1],\lambda)$

$$\Psi_{f+g} = \Psi_f \circ \Psi_g.$$

Далее, для $f \in L_1^+([0,1],\lambda)$ определим подмножество $\mathbb{D}_f$ множества $\mathbb{D}[0,1]$, полагая

$$\mathbb{D}_f = \{z \in \mathbb{D}[0,1] : \forall t \in (0,1] \quad 0 \leqslant \Delta z(t) < U^{-1}(f(t))\}.$$

Из определения видно, что принадлежность множеству $\mathbb{D}_f$ означает определенные ограничения на величину скачков – в каждый момент времени величина скачка не должна быть больше определенного значения.

Теорема 3. *Для любого* $f \in L_1^+([0,1],\lambda)$

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} \ll \mathcal{P}_\xi,$$

причем

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} = e^{\int_0^1 f(t)dt} \cdot \mathcal{P}_\xi\big|_{\mathbb{D}_f}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и (27)

$$P\Phi_f^{-1} \ll P,$$

следовательно,

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} \ll P\Xi^{-1}. \tag{28}$$

Правая часть (27) равна $\mathcal{P}_\xi$, а левая часть

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} = P(\Xi \circ \Phi_f)^{-1} =$$

$$P(\Psi_f \circ \Xi)^{-1} = (P\Xi^{-1})\Psi_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1}.$$

□

Рассмотрим теперь случай, когда процесс ξ не является односторонним, т.е. $\Lambda(0,\infty) > 0$ и $\Lambda(-\infty, 0) > 0$. Мы предположим, кроме того, что мера Λ удовлетворяет двум условиям:

1) $\Lambda(0,\infty) = \infty$, и $\Lambda(-\infty,0) = \infty$,

2) функция $U : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая формулой

$$U(x) = \begin{cases} \Lambda(x,\infty), & \text{если} \quad x > 0; \\ -\Lambda(-\infty,x), & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

на интервалах $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$ непрерывна и строго убывает.

На пространстве конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$ рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\Lambda(dx)$.

В соответствии с (1) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), P)$ процесс Леви $\xi(t)$ со спектральной мерой Λ может быть задан как

$$\xi(t,X) = at + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1}} x - t\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} x d\Lambda\Bigg) + \sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,|x|>1}} x. \tag{29}$$

Далее, рассмотрим группу $T_t, t\in(-\infty,\infty)$, определяемую (16) и соответствующую ей группу $\widetilde{\Phi}_f$, где f пробегает множество всех борелевских функций $[0,1]\to\mathbb{R}$, преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$. Аналогично тому, как это делалось выше, с помощью группы $\widetilde{\Phi}_f$ и отображения Ξ (задаваемого (20)) определим группу $\widetilde{\Psi}_f$, преобразований пространства $\mathbb{D}[0,1]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\widetilde{\Psi}_f \circ \Xi = \Xi \circ \widetilde{\Phi}_f.$$

Легко проверить, что преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ может быть задано формулой

$$[\widetilde{\Psi}_f(z)](t) = z(t) + \sum_{s \leqslant t, T_{f(s)}(\Delta z(s)) \neq \infty} (T_{f(s)}(\Delta z(s)) - \Delta z(s)). \tag{30}$$

Отметим, что в отличие от преобразования Ψ_f (определяемого из (26)) преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ может менять не только величину скачка, но и его знак.

Теорема 4. *Для любой борелевской функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ определено на множестве $\mathcal{P}_\xi$-полной меры, и является сохраняющем меру $\mathcal{P}_\xi$ преобразованием, т.е.*

$$\mathcal{P}_\xi \widetilde{\Psi}_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 3.□

В работе две формулы (23), пожалуйста, проверьте ссылки на формулы.

Литература

1. Y. Takahashi, *Absolute continuity of Poisson random fields.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990),629–649.
2. J. Kerstan, K. Mattes, and J. Mecke, *Infinite divisible point processes.* — Akademie-Verlag, Berlin (1978).
3. W. Linde, *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* — Leipzig, Teubner (1983).
4. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **II** (1957), 629–649.
5. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* — Изд-во Киевского ун-та, Киев (1961).
6. А. В. Скороход, *Стохастические процессы с независимыми приращениями.* — Наука, Москва (1986).
7. Н. В. Смородина, *Инвариантные и квазиинвариантные преобразования мер, отвечающих устойчивым процессам с независимыми приращениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 135–150.
8. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes.* — Clarendon Press, Oxford (1993).
9. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of diffeomorphisms.* — Russian Math. Surveys **30** (1975), 3–50.
10. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. **329** (1999), 163–168.

11. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* — Наука, Москва (1977).

Smorodina N. V. The measure preserving and nonsingular transformations of the jump Lévy processes.

Let $\xi(t), t \in [0,1]$ be a jump Lévy process. By $\mathcal{P}_\xi$ we denote the law of ξ in the Skorokhod space $\mathbb{D}[0,1]$. Under some nondegeneracy condition on the Lévy measure Λ of the process we construct a group of a $\mathcal{P}_\xi-$preserving transformations of the space $\mathbb{D}[0,1]$.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 27 марта 2007 г.