Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Л. В. Розовский

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Введение

В заметке доказываются результаты, анонсированные в [1].

Пусть $S = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$ – неотрицательные числа, такие что

$$1 \leqslant n = \#\{j|\lambda_j > 0\} \leqslant \infty \tag{1.1}$$

(если $n = \infty$, предполагается, что ряд S сходится п.н.),
$\{X_i\}$ – независимые копии положительной случайной величины X с функцией распределения $V(x)$, удовлетворяющей следующему условию:
существуют постоянные $b \in (0,1)$, $c_1, c_2 > 1$ и $r_0 > 0$ такие, что при каждом $r \leqslant r_0$

$$c_1 V(br) \leqslant V(r) \leqslant c_2 V(br). \tag{L}$$

Здесь и в дальнейшем $c_1, c_2, \ldots$ обозначают положительные постоянные, зависящие лишь от распределения V и связанных с ним параметров из условий (L), (1.2) и т.д.

Условие (L), предложенное в работе [2], очевидно, выполняется, если $V(r)$ правильно меняется в нуле. Последнее, в частности, имеет место в важном гауссовом случае, т.е. когда $X = |\xi|^p$, $p > 0$, где ξ – стандартная нормальная случайная величина.

Из условия (L) также следует, что

$$\begin{gathered} c_1 u^\beta \geqslant V(ur)/V(r) \geqslant u^\alpha/c_2,\ u \leqslant 1,\ r \leqslant r_0, \\ u^\beta/c_1 \leqslant V(ur)/V(r) \leqslant c_2 u^\alpha,\ u \geqslant 1,\ r \leqslant r_0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$c_3 r^\alpha \leqslant V(r) \leqslant c_4 r^\beta,\ r \leqslant r_0, \tag{1.3}$$

Работа над статьей была поддержана грантом НШ 4222.2006.1 и грантом РФФИ 06-01-00179-а.

при некоторых постоянных α, β таких, что $\log c_1/|\log b| \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \log c_2/|\log b|$.

Нас в первую очередь интересует поведение вероятностей $\mathbf{P}\,(r - s < S \leqslant r)$ при $r, s > 0$. Аналогичные задачи, в основном в гауссовом случае, решали многие авторы (см. ссылки в [2] и [3]). Наиболее общие и точные (в контексте настоящей работы) утверждения были доказаны в [2]. Сформулируем основной результат этой работы. С этой целью введем некоторые обозначения.

Для $\gamma \geqslant 0$ положим

$$\begin{gathered}\Lambda(\gamma) = \mathbf{E}\, e^{-\gamma S}, \quad m(\gamma) = -\left(\log \Lambda(\gamma)\right)', \quad \sigma^2(\gamma) = \left(\log \Lambda(\gamma)\right)'', \\ Q(\gamma) = -\gamma\, m(\gamma) - \log \Lambda(\gamma).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Предположим, что случайная величина X имеет*
а) конечную дисперсию,
б) абсолютно непрерывное распределение
и удовлетворяет условию (L). Если $\{\lambda_j\}$ – некоторая невозрастающая положительная последовательность, такая что $\sum_{j \geqslant 1} \lambda_j < \infty$, то

$$\mathbf{P}\,(S \leqslant r) = (2\pi)^{-1/2} (\gamma\sigma(\gamma))^{-1}\, e^{-Q(\gamma)} \bigl(1 + o(1)\bigr), \ r \searrow 0,$$

где параметр $\gamma = \gamma(r)$ является решением уравнения $m(\gamma) = r$. Кроме того, если $\mathbf{E}\, X^3 < \infty$, то для α из (1.3) и для любого $\kappa \in (0, 2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(S \leqslant r) = (2\pi)^{-1/2} (\gamma\sigma(\gamma))^{-1}\, e^{-Q(\gamma)} \\ \Bigl(1 + O\bigl((\gamma\sigma(\gamma))^{-1} + (\gamma\sigma(\gamma))^{-(2-\kappa)/\alpha}\bigr)\Bigr), \ r \searrow 0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Отметим, что сделанные в теореме 1.1 предположения а) и б) существенно используются в доказательствах.

Наша основная цель показать, что соотношения вида (1.5) сохраняют справедливость при отсутствии предположения б) и при заметном ослаблении условия а).

2. Результаты

Вначале приведем утверждение, для справедливости которого достаточно выполнения лишь условия (L).

Теорема 2.1. *Пусть функция распределения V удовлетворяет условию (L). Тогда*

$$e^{-Q(\gamma)} \geqslant \mathbf{P}\left(S \leqslant r\right) \geqslant e^{-Q(\gamma)-c_5\sqrt{1+Q(\gamma)}}, \quad 0 < r < \mathbf{E}\, S, \tag{2.1}$$

где γ является единственным решением уравнения $m(\gamma) = r$.

Замечание 1. Поскольку функция $m(u)$ монотонно убывает на $(0, \infty)$ и $m(0) = \mathbf{E}\, S \leqslant \infty$, $m(\infty) = 0$, соотношение (2.1) равносильно

$$e^{-Q(\gamma)} \geqslant \mathbf{P}\left(S \leqslant m(\gamma)\right) \geqslant e^{-Q(\gamma)-c_5\sqrt{1+Q(\gamma)}}, \quad 0 < \gamma < \infty.$$

Соотношение (2.1) позволяет найти асимптотику логарифма вероятности $\mathbf{P}\left(S \leqslant r\right)$.

Чтобы сформулировать более точный результат, нам понадобится некоторая информация о поведении V на бесконечности.

Введем условие

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^2\, \mathbf{P}\left(X \geqslant r\right)}{\mathbf{E}\, X^2\, \mathbf{I}[X < r]} < \infty. \tag{F}$$

Отметим, что условие (F), т.н. условие стохастической компактности Феллера, выполняется, когда X принадлежит области притяжения какого-либо устойчивого, в том числе, нормального, закона. Можно также показать, что условие (F) равносильно соотношению

$$r^{-\omega}\, \mathbf{E}\left(1 \wedge r\, X^2\right) \nearrow, r > 0 \ (\exists\ \omega \in (0,1)), \tag{2.2}$$

из которого, в частности, следует $\mathbf{E}\, X^{\delta} < \infty$ $(\exists\ \delta > 0)$.

В самом деле, пусть $\xi \in (0,2)$ и $g(x) = x^{-\xi}\, \mathbf{E}\left(x^2 \wedge X^2\right)$, $x \geqslant x_0$. Имеем, $g(x) = x^{-\xi} \int\limits_0^x \overline{V}(u) du^2$, где $\overline{V}(u) = 1 - V(u)$. Далее,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\xi\, g(x)/x + 2x^{1-\xi}\overline{V}(x) \\ &= x^{-1-\xi}(2\, x^2\overline{V}(x) - \xi\, x^2\overline{V}(x) - \xi\ \mathbf{E}\, X^2\, \mathbf{I}[X \leqslant x]). \end{aligned}$$

Видим, что $g'(x) < 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{x^2\, \overline{V}(x)}{\mathbf{E}\, X^2\, \mathbf{I}[X<x]} < \xi/(2-\xi)$, что доказывает равносильность (F) и (2.2).

Теорема 2.2. *Пусть функция распределения V удовлетворяет условиям (L) и (F). Тогда при всех r, $0 < r < \mathbf{E}S$ и всех положительных s*

$$\mathbf{P}\,(r - s < S \leqslant r) = e^{-Q(\gamma)}\,\frac{1 - e^{-\gamma\, s}}{\tau\sqrt{2\pi}}$$

$$\left(1 + \theta\,\left(\tau^{-1} + \left(\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^2}\right)^{1/\alpha}\left(1 + (\gamma s)^{-1}\right)\right)\right), \qquad (2.3)$$

где γ является решением уравнения $m(\gamma) = r$, $\tau = \gamma\,\sigma(\gamma)$(см. (1.4)), постоянная α взята из условий (1.3), а $|\theta| \leqslant c_6$.

Теорема 2.2 вытекает из следующего более общего утверждения.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия (L) и (F). Тогда при всех положительных r, s и γ*

$$\mathbf{P}\,(r - s < S \leqslant r) = \Lambda(\gamma)e^{\gamma\, r}\,\frac{1 - e^{-\gamma\, s}}{\tau\sqrt{2\pi}} \qquad (2.4)$$

$$\left(e^{-(r-m(\gamma))^2/2\sigma^2(\gamma)} + \theta\,\left(\tau^{-1} + \left(\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^2}\right)^{1/\alpha}\left(1 + (\gamma s)^{-1}\right)\right)\right),$$

где $\tau = \gamma\,\sigma(\gamma)$, а $|\theta| \leqslant c_7$.

Замечание 2. Если (см. (1.1)) $n < \infty$, то в условиях теорем 2.2 и 2.3 соотношения (2.3), $0 < r < m(\delta/\lambda_n)$, и (2.4), $\gamma > \delta/\lambda_n$, при $|\theta| \leqslant c(V,\delta)$ сохраняют справедливость без условия (F) для любого положительного δ.

Далее приведем локальный вариант теоремы 2.3.

По аналогии с [2, (3.6), (3.7)] предположим, что случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью f такой, что при некоторых положительных C, x_0, δ и $p > 1$

$$|df(x)| \leqslant C\,V(x)\,x^{-2}\,dx,\;\; 0 < x \leqslant x_0,\;\; dx > 0, \qquad (2.5)$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left(e^{-\delta x} f(x)\right)^p dx < \infty. \qquad (2.6)$$

Теорема 2.4. *Пусть функция распределения V удовлетворяет условиям (L) и (F), а ее плотность f – условиям $(2.5), (2.6)$. Предположим также, что $n \geqslant n_0$, где целое $n_0 > (1+\alpha)(1 \vee 1/\beta)$ и $n_0 \geqslant 2 \vee p/(p-1)$ (см. обозначения в $(1.1), (1.2), (2.6)$). Тогда при всех положительных r, s и всех $\gamma \geqslant \delta/\lambda_{n_0}$*

$$\mathbf{P}\,(r-s < S \leqslant r)$$
$$= \Lambda(\gamma) e^{\gamma r}\, \frac{1-e^{-\gamma s}}{\gamma\,\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}} \left(e^{-(r-m(\gamma))^2/2\sigma^2(\gamma)} + \theta(\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1}\right), \quad (2.7)$$

причем

$$|\theta| \leqslant c_8 \left(1 + \lambda_{n_0}^{-1} \sum_{j \geqslant 1} \mathbf{E}\,(1 \wedge \lambda_j X)\right). \qquad (2.8)$$

В частности, если $0 < r \leqslant m(\delta/\lambda_{n_0})$, а $m(\gamma) = r$, то

$$\mathbf{P}\,(r-s < S \leqslant r) = e^{-Q(\gamma)}\, \frac{1-e^{-\gamma s}}{\tau\sqrt{2\pi}} \left(1 + \theta(\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1}\right).$$

Обращаем внимание на то, что равенство (2.7) в отличие от (2.4) нетривиально в том числе и при произвольно малых значениях параметра s, что позволяет, поделив обе части (2.7) на s и устремив s к нулю, найти соответствующую асимптотику плотности распределения $q(r)$ случайной величины S.

Так, если выполнены условия теоремы 2.4, то

$$q(r) = \left(\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \Lambda(\gamma) e^{\gamma r} \left(e^{-(r-m(\gamma))^2/2\sigma^2(\gamma)} + \theta(\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1}\right),$$

и, если $0 < r \leqslant m(\delta/\lambda_{n_0})$, а $m(\gamma) = r$, то

$$q(r) = \left(\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}\right)^{-1} e^{-Q(\gamma)} \left(1 + \theta\,(\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1}\right),$$

где θ удовлетворяет условию (2.8).

Замечание 3. Если в условиях теоремы 2.4 заменить (2.6) более ограничительным предположением

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-\delta x} |df(x)| < \infty \qquad (2.9)$$

(и отбросить предположение $n_0 \geqslant 2 \vee p/(p-1)$), то соотношение (2.7) будет выполняться при $|\theta| \leqslant c_8$.

Напоминаем, что постоянные $c_6 - c_8, \dots$ зависят лишь от распределения V и связанных с ним параметров, в том числе из условий (2.5), (2.6).

Замечание 4. Если в теореме 2.4 $n_0 = n < \infty$, то ее утверждения сохраняют справедливость без условия (F).

3. Некоторые следствия

Пусть в (1.1) $n = \infty$, т.е. $\{\lambda_j\}$ является невозрастающей последовательностью *положительных* чисел, такой, что ряд S сходится, или (по теореме о 3-х рядах)

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathbf{E}\,(1 \wedge \lambda_j X) < \infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что отсюда следует сходимость ряда $\sum_j \lambda_j$, а если $\mathbf{E}\,X < \infty$, то и наоборот. Кроме того, (3.1) накладывает некоторые ограничения на моменты случайной величины X. Например, при $\lambda_j = j^{-\omega}$, $\omega > 1$, (3.1) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{E}\,X^{1/\omega} < \infty$, а если $\lambda_j = q^j$, $0 < q < 1$, то (3.1) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{E}\log(1+X) < \infty$, причем последнее условие вытекает из (F).

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнено условие (L). Тогда*

$$-\log \mathbf{P}\,(S \leqslant r) \sim Q(\gamma),\ \ r \to 0, \tag{3.2}$$

где $m(\gamma) = r$, или, равносильно,

$$-\log \mathbf{P}\,(S \leqslant m(\gamma)) \sim Q(\gamma),\ \ \gamma \to \infty.$$

Если же выполняются условия (L) и (F), то равномерно по r

$$\mathbf{P}\,(S \leqslant r) = \Lambda(\gamma)e^{\gamma r}\,(\tau\sqrt{2\pi})^{-1} \\ \left(e^{-((r-m(\gamma))/\sigma(\gamma))^2/2} + O\,(1/\tau + (1/\tau)^{2/\alpha}\ln^{1/\alpha}\tau)\right),\ \ \gamma \to \infty. \tag{3.3}$$

В частности, если $m(\gamma) = r$, то

$$\mathbf{P}\,(S \leqslant r) = e^{-Q(\gamma)}\,(\tau\sqrt{2\pi})^{-1}\left(1 + O\,(1/\tau + (1/\tau)^{2/\alpha}\ln^{1/\alpha}\tau\right),\ \ r \to 0. \tag{3.4}$$

Здесь обозначения такие же, как в теоремах 2.1– 2.3, случай $s = \infty$ рассматривается для простоты.

Теорема 3.2. *Пусть функция распределения V удовлетворяет условиям (L) и (F), а ее плотность f – условиям* (2.5), (2.6). *Тогда*

$$q(r) = \left(\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}\right)^{-1} e^{-Q(\gamma)} \left(1 + O\left((\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1}\right)\right), \; r \to 0, \tag{3.5}$$

где $m(\gamma) = r$.

Теоремы 3.1 и 3.2 вытекают из теорем 2.1– 2.4, поскольку (см. (4.4a), (4.4b) и доказательство оценки (4.8) из [2]) $\tau = \gamma\,\sigma(\gamma) \to \infty$ с ростом γ и, кроме того, $Q(\gamma) \nearrow \infty$, $m(\gamma) \searrow 0 \iff \gamma \nearrow \infty$.

Отметим, что соотношения (3.3)– (3.5) обобщают и уточняют соответствующие результаты из [2, теоремы 2, 3 и (6.19)].

По поводу случая конечного n заметим лишь, что следствием теорем 2.2, 2.3 и замечания 2 настоящей работы являются теоремы 1 и 2 из [6].

Замечание. В [7], [8] независимо найдены условия выполнения соотношения (3.2) при существенно более слабых, по сравнению с условием (L), ограничениях на поведение распределения V в нуле, причем правая часть асимптотики (3.2) в этих работах выписана в явном виде. Правда, авторы исследовали случаи *степенных* (и некоторых других) весов, в то время как наш результат справедлив при *любых* допустимых $\{\lambda_j\}$. В рамках настоящей работы можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$\lim_{\gamma\to\infty} \sup_{u\geqslant\gamma} u\,\sigma(u)/Q(u) = 0. \tag{3.6}$$

Тогда справедливо соотношение (3.2).

Заметим, что (3.6) вытекает из условия (L); оно также выполнено, если коэффициенты λ_j при $j \to \infty$ грубо эквивалентны $\lambda(j)$, где функция $\lambda(x)$ правильно меняется на бесконечности с некоторым показателем, не превосходящим -1 (см. (3.1)), а $\lim\limits_{u\to\infty} |\log V(\lambda(u))|/u = 0$.

4. Леммы

Лемма 1. *Пусть γ является единственным решением уравнения $m(\gamma) = r$, $0 < r <$ $\mathbf{E}\,S$. Тогда*

$$\begin{gathered} e^{-Q(\gamma)} \geqslant \mathbf{P}\,(S \leqslant r) \geqslant \tfrac{1}{2}\,e^{-2a\,(1+\sqrt{1+2Q(\gamma)/a})}\; e^{-Q(\gamma)}, \\ \mathbf{P}\,(S \leqslant r) \geqslant \tfrac{1}{2}\,e^{-Q(\gamma)(1+b\sqrt{2})/(1-b\sqrt{2})^{+}}, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $a = \sup\limits_{u \geqslant \gamma} \frac{u^2 \sigma^2(u)}{Q(u)}$, $b = \sup\limits_{u \geqslant \gamma} \frac{u\,\sigma(u)}{Q(u)}$.

Лемма 1 доказывается так же, как лемма 1 из [4](см. также [5]).

Пусть случайная величина $S(h)$, $h \geqslant 0$, имеет распределение

$$\mathbf{P}\,(S(h) \leqslant r) = \int\limits_0^r e^{-hy}\, d\,\mathbf{P}\,(S \leqslant y)/\Lambda(h), \;\; r \geqslant 0.$$

Заметим (см. (1.4)), что $m(h) = \mathbf{E}\,S(h)$, $\quad \sigma^2(h) = \mathbf{Var}\,S(h)$.

Положим

$$\begin{gathered} g_h(t) = \mathbf{E}\,\exp\left(it\,\frac{S(h) - m(h)}{\sigma(h)}\right), \;\; \tau = h\sigma(h) \;\; (h > 0), \\ \delta_\varepsilon(h) = \int\limits_0^{1/\varepsilon} |g_h(t) - e^{-t^2/2}|\, dt \;\; (\varepsilon > 0). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Лемма 2. *При любых положительных* r, h, s *и* ε

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\,(r - s < S \leqslant r) \\ = \Lambda(h) e^{h\,r}\,\frac{1 - e^{-h\,s}}{\tau\sqrt{2\pi}}\, \left(e^{-\beta^2/2} + \theta\,(\beta\, e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \rho_\varepsilon(h,s))\right). \end{gathered}$$

Здесь

$$\beta = \frac{r - m(h)}{\sigma(h)}, \;\; \rho_\varepsilon(h,s) = \delta_\varepsilon(h) + (1 + \delta_\varepsilon(h))(1 + \tfrac{1}{h\,s})\,\tau\varepsilon,$$

$|\theta| \leqslant c$, *где* c*– некоторая абсолютная постоянная.*

В частности, если $m(h) = r$, *то* $\beta = 0$ *и*

$$\mathbf{P}\,(r - s < S \leqslant r) = e^{-Q(h)}\,\frac{1 - e^{-h\,s}}{\tau\sqrt{2\pi}}\, \left(1 + \theta\,(1/\tau^2 + \rho_\varepsilon(h,s))\right).$$

Лемма 2 является частным случаем леммы 2 из [4].

Отметим, что в леммах 1 и 2 выполнение условий (L) или (F) не предполагается.

Пусть случайная величина $X(h)$, $h \geqslant 0$, имеет распределение $e^{-hr}\,V(dr)/L(h)$, где $L(h) = \mathbf{E}\,e^{-hX}$. Положим $G(h) = \mathbf{E}\,\left(1 \wedge (h\,X)^2\right)$, $G_1(h) = \mathbf{E}\,(1 \wedge h\,X)$.

Лемма 3.

1) Если выполнено условие (F), то при всех $0 < h \leqslant 1$

$$c_9 \leqslant h\,\mathbf{E}\,X(h)/G_1(h) \leqslant c_{10}, \tag{4.3a}$$

$$c_9 \leqslant h^2 \mathbf{Var} X(h)/G(h) \leqslant c_{10}, \tag{4.3b}$$

$$h\,\mathbf{E}\,X^3(h)/\mathbf{Var} X(h) \leqslant c_{11}. \tag{4.3c}$$

2) Если выполнено условие (L), то при всех $h \geqslant 1$

$$c_9 \leqslant h\,\mathbf{E}\,X(h) \leqslant c_{10}, \tag{4.4a}$$

$$c_9 \leqslant h^2 \mathbf{Var} X(h) \leqslant c_{10}, \tag{4.4b}$$

$$h^3\,\mathbf{E}\,X^3(h) \leqslant c_{11}. \tag{4.4c}$$

Справедливость первого утверждения леммы 3 была установлена в [9, Лемма 4.1] или может быть доказана аналогично, вторая ее часть совпадает с [6, Лемма 1].

Лемма 4. *Положим $f_h(v) = \mathbf{E}\,e^{iv\,X(h)}$. Если выполнено условие (L), то*

$$1 - |f_h(v)| \geqslant c_{15} e^{-(2\pi+b)h/v}\, V(1/v)/V(1/h), \ v \geqslant (2\pi+b)/r_0, \ h > 0. \tag{4.5}$$

Если выполнено условие (F), то при любом достаточно малом положительном v_0 и любом $\varepsilon \in (0,1)$

$$|f_h(v)| \leqslant e^{-\delta G(h)(v/h)^{\omega}}, \ \varepsilon h \leqslant v \leqslant v_0, \tag{4.6}$$

где $\delta = \delta(V, \varepsilon, v_0) > 0$, а $\omega = \omega(V) \in (0,2)$.

Доказательство леммы 4. Соотношение (4.5) доказано в [6, Лемма 1]. Проверим (4.6). Будем считать, что $\mathbf{E}\,X^2 = \infty$ (противоположный случай рассматривается аналогично с упрощениями). Очевидно,

$$L(h)\,|f_h(v) - 1| \leqslant \Big|\int_{1/v}^{\infty} e^{-hy}(e^{ivy} - 1)\,V(dy)\Big|$$
$$+\Big|\int_{0}^{1/v} e^{-hy}(e^{ivy} - 1)\,V(dy)\Big| = I + J,$$

причем

$$I \leqslant 2 \int\limits_{1/v}^{\infty} e^{-hy}\, V(dy) \leqslant 2(1 - V(1/v)),$$

$$J = \Big| \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} (e^{ivy} - 1 - ivy)\, V(dy) + \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} ivy\, V(dy)$$

$$+ \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} (e^{hy} - 1)(e^{ivy} - 1)\, V(dy)\Big| \leqslant$$

$$0.5\, v^2 \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} y^2\, V(dy) + v \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} y\, V(dy) + vh\, e^{h/v} \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} y^2\, V(dy).$$

Из вышесказанного следует, что при любом достаточно малом положительном v_0 и всех h, v таких, что $\varepsilon h \leqslant v \leqslant v_0$

$$|f_h(v) - 1| \leqslant c_{12} e^{1/\varepsilon}/\varepsilon\, (G(v) + v\, \mathbf{E}\, X\mathbf{I}[0 \leqslant X \leqslant 1/v])\,. \tag{4.7}$$

Теперь, если выполнено условие (F), при тех же ограничениях на h и v

$$\begin{aligned} L(h)\, \mathbf{Re}(f_h(v) - 1) &= \int\limits_0^{\infty} (\cos vy - 1) e^{-hy}\, V(dy) \\ &\leqslant \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} \frac{\cos vy - 1}{(vy)^2} (vy)^2 e^{-hy}\, V(dy) \\ &\leqslant (\cos 1 - 1) e^{-h/v} v^2 \int\limits_{0 \leqslant y < 1/v} y^2\, V(dy) \leqslant -c_{13} e^{-1/\varepsilon} G(v) \end{aligned} \tag{4.8}$$

(условие (F) используется в последнем неравенстве).

Принимая во внимание (см.[9, (4.9)]) то, что

$$\mathbf{E}^{\,2} X\mathbf{I}[|X| \leqslant z] = o(z^2 G(1/z)),\ z \to \infty,$$

если $\mathbf{E}\, X^2 = \infty$, из (4.7),(4.8) и оценки $L(h) \geqslant \int_0^{1/h} e^{-th} V(dt) \geqslant e^{-1} V(1/h)$ при достаточно малом v_0 найдем

$$|f_h(v)| \leqslant e^{\mathbf{Re}(f_h(v) - 1) + |f_h(v) - 1|^2} \leqslant e^{-\delta_1 G(v)},\ \varepsilon h \leqslant v \leqslant v_0. \tag{4.9}$$

Далее, если выполнено условие (F), то (см.(2.2)) $v^{-\omega}G(v) \nearrow$ $(\exists\ \omega \in (0,2))$ при всех достаточно малых v. Таким образом, если $\varepsilon h \leqslant v$ и $\varepsilon \in (0,1)$, то

$$G(v) = v^{\omega} v^{-\omega} G(v) \geqslant v^{\omega} (\varepsilon h)^{-\omega} G(\varepsilon h) \geqslant \varepsilon^{2-\omega} v^{\omega} h^{-\omega} G(h).$$

Отсюда и из (4.9) вытекает оценка (4.6). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если имеет место условие (L), то (обозначения см. в (1.4)) при любом положительном u*

$$\begin{aligned} Q(u) &\geqslant c_{14}\, u^2\, \sigma^2(u), \\ u\, m(u) &\geqslant c_{15}\, u^2\, \sigma^2(u). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Доказательство леммы 5.

Положим $\overline{Q}(u) = -u\, \mathbf{E}\, X(u) - \log L(u)$, $\sigma_j^2(u) = \lambda_j^2\, \mathbf{Var}\, X(u\lambda_j)$, $j \geqslant 1$.

Пусть k удовлетворяет условию $u\lambda_k > 1 \geqslant u\lambda_{k+1}$. Тогда

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{k} \overline{Q}(u\lambda_j) + \sum_{j>k} \overline{Q}(u\lambda_j) = Q_1 + Q_2. \tag{4.11}$$

причем (см. (4.4b))

$$Q_1 \geqslant k\overline{Q}(u\lambda_k) \geqslant k\overline{Q}(1) \geqslant c_{16} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2(u). \tag{4.12}$$

Далее, по [9, лемма 2.2] (без предположения (L))

$$\overline{Q}(\gamma) \geqslant c_{17}\gamma^2 G(1/\gamma) \geqslant c_{18}\gamma^2\, \mathbf{Var}\, X(\gamma),\ \ 0 < \gamma \leqslant 1,$$

откуда

$$Q_2 \geqslant c_{19} u^2 \sum_{j>k} \sigma_j^2(u). \tag{4.13}$$

Первое утверждение леммы 5 вытекает из (4.11)–(4.13). Соотношение (4.10) проверяется аналогично. Достаточно заметить (см. лемму 3), что $uG_1(1/u) \geqslant u^2 G(1/u)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* (L) *и* (F). *Тогда (см.* (4.2)*) при любом $h > 0$*

$$\int_0^{\tau\rho} |g_h(t) - e^{-t^2/2}|\, dt \leqslant c_{20}\, (1 \wedge 1/\tau), \tag{4.14}$$

где $\rho = \delta_0\,(\tau/\sqrt{\ln(1+\tau)})^{2/\alpha}$, $\delta_0 = \delta_0(V)$*– некоторая достаточно малая положительная постоянная, зависящая лишь от* V*, а* α *такое, как в условиях* (1.2), (1.3).

Замечание. Пусть в равенстве (3.1) $n < \infty$. Если $h > \delta/\lambda_n$ при некотором положительном δ, то оценка (4.14) с постоянными c_{20} и δ_0, зависящими в том числе и от δ, сохраняет справедливость без предположения (F).

Доказательство леммы 6. Оценка (4.14) при $\tau \leqslant \tau_0$ тривиальна, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что τ достаточно велико и $\rho > 1$.

Имеем (см. [10, гл.5, лемма 1])

$$|g_h(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant 16\mu\, e^{-t^2/3}, \ \ |t| \leqslant 1/4\mu,$$

где

$$\mu = \frac{1}{\sigma^3(h)} \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j^3\, \mathbf{E}\,|X(h\lambda_j) - \mathbf{E}\,X(h\lambda_j)|^3,$$

причем в соответствии с леммой 3((4.3c), (4.4c))

$$\mu \leqslant \frac{8}{h\sigma^3(h)} \sum_{j\geqslant 1} \sigma_j^2(h) \frac{h\lambda_j\,\mathbf{E}\,X^3(h\lambda_j)}{\mathbf{Var}\,X(h\lambda_j)} \leqslant \frac{8}{\tau} \sup_{\gamma\geqslant h\lambda_n} \frac{\gamma\,\mathbf{E}\,X^3(\gamma)}{\mathbf{Var}\,X(\gamma)} \leqslant 8c_{11}/\tau. \tag{4.15}$$

Отсюда при $\varepsilon = (32c_{11})^{-1}$ следует

$$\int_0^{\varepsilon\tau} |g_h(t) - e^{-t^2/2}|\,dt \leqslant c_{21}/\tau. \tag{4.16}$$

Если $\rho \leqslant \varepsilon$, оценка (4.14) вытекает из (4.16). Пусть $\rho > \varepsilon$. Оценим $I(h) = \int_{\varepsilon\tau}^{\tau\rho} |g_h(t)|\,dt$. Воспользовавшись обозначениями из (4.2) и леммы 4((4.5)), запишем равенство

$$|g_h(t)| = \prod_j |f_{h\lambda_j}(t/\sigma(h))|. \tag{4.17}$$

Пусть k выбрано из условия

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2(h) \geqslant \sigma^2(h)/2 > \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j^2(h). \tag{4.18}$$

Положим $\nu = v_0/\lambda_k$, где постоянная v_0 заимствована из условия (4.6). Если $\rho \leqslant \nu/h$, то при каждом $j \geqslant k$ и всех $t \in [\varepsilon\tau, \tau\rho]$, справедливы оценки

$$\varepsilon h\lambda_j \leqslant t\lambda_j/\sigma(h) \leqslant \tau\rho\lambda_j/\sigma(h) \leqslant \tau\nu\lambda_j/(h\sigma(h)) \leqslant v_0\lambda_j/\lambda_k \leqslant v_0.$$

Отсюда, из (4.17),(4.18) и (4.6) с учетом (4.3b) следует

$$\begin{aligned} I(h) &\leqslant \int\limits_{\varepsilon\tau}^{\tau\nu/h} \prod_{j\geqslant k} |f_{h\lambda_j}(t\lambda_j/\sigma(h))|\,dt \\ &\leqslant \tau \int\limits_{\varepsilon}^{\nu/h} \prod_{j\geqslant k} \exp\left(-\delta_2\sigma_j^2(h)h^2t^\omega\right)dt \leqslant \tau\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \exp\left(-\delta_2\tau^2t^\omega\right)dt \leqslant \delta_3/\tau, \end{aligned} \tag{4.19}$$

где $\delta_i = \delta_i(V, v_0)$. Утверждение леммы 6 при $\varepsilon < \rho \leqslant \nu/h$ следует из (4.16) и (4.19).

Принимая во внимание равенство (4.17), легко понять, что для завершения доказательства леммы 6 достаточно установить оценку

$$J(h) = \tau\int\limits_{\varepsilon\vee\nu/h}^{\rho} \prod_{1\leqslant j\leqslant k} |f_{h\lambda_j}(th\lambda_j)|\,dt \leqslant c_{22}/\tau. \tag{4.20}$$

С этой целью покажем, что

$$|f_{h\lambda_j}(th\lambda_j)| \leqslant e^{-c_{23}t^{-\alpha}},\ t \geqslant \varepsilon\vee\nu/h,\ j \leqslant k. \tag{4.21}$$

Обозначим для краткости $h\lambda_j\,(1 \leqslant j \leqslant k)$ через γ и положим (см.(4.5)) $\xi(t) = |f_\gamma(t\gamma)|$, $H_0 = (2\pi + b)/r_0$, $\overline{\gamma} = H_0/\varepsilon$.

Пусть вначале $\varepsilon \leqslant \nu/h$. Тогда, если $\gamma < \overline{\gamma}$, то при $t \geqslant \varepsilon$ из (4.5) и (1.2) следует оценка

$$\xi(t) \leqslant 1 - c_{24}V(1/t\gamma) \leqslant 1 - c_{25}t^{-\alpha},\ t\gamma \geqslant H_0, \tag{4.22}$$

и, кроме того,

$$\xi(t) \leqslant e^{-\delta},\ \delta = \delta(V, v_0),\ t\gamma \in [v_0, H_0] \tag{4.23}$$

благодаря нерешетчатости случайной величины X и исходя из соображений непрерывности по h отображения между распределениями X и $X(h)$.

Поскольку $t\gamma \geqslant v_0\lambda_j/\lambda_k \geqslant v_0$ при $t \geqslant \nu/h$, из (4.22) и (4.23) следует (4.21). Пусть теперь $\gamma \geqslant \overline{\gamma}$. Тогда (при $t \geqslant \varepsilon$) из (1.2) получим

$$V(1/t\gamma)/V(1/\gamma) \geqslant \frac{1}{c_2}(t^{-\alpha}\wedge 1) \geqslant (\frac{1}{c_2}\wedge\varepsilon^{\alpha})t^{-\alpha},\ t \geqslant \varepsilon,\ \gamma \geqslant 1/r_0, \quad (4.24)$$

причем $t\gamma \geqslant \varepsilon\gamma \geqslant \varepsilon\overline{\gamma} = H_0$, т.е. из (4.24) и (4.5) снова следует оценка (4.21). Таким образом, случай $\varepsilon \leqslant \nu/h$ проанализирован полностью.

Пусть $\varepsilon > \nu/h$ (и $t \geqslant \varepsilon$). В этом случае $\gamma \geqslant \tilde{\gamma} = v_0/\varepsilon$ и $t\gamma \geqslant \varepsilon\tilde{\gamma} = v_0$. Если $t\gamma \geqslant H_0$ и $\gamma < \overline{\gamma}$, пользуемся оценкой (4.22), а если $t\gamma < H_0$ – оценкой (4.23). Если же $\gamma \geqslant \overline{\gamma}$, то $t\gamma \geqslant H_0$, и для доказательства соотношения (4.21) можно применить (4.24).

Воспользуемся (4.21) для получения искомой оценки (4.20). Имеем по (4.3b), (4.4b) и (4.18),

$$k \geqslant c_{26}\sum_{j=1}^{k} h^2\sigma_j^2(h) \geqslant c_{24}h^2\sigma^2(h)/2 = c_{27}\tau^2,$$

и, следовательно,

$$J(h) \leqslant \tau \int\limits_{\varepsilon\vee\nu/h}^{\rho} e^{-c_{23}\,k\,t^{-\alpha}}\,dt \leqslant \tau\rho e^{-c_{28}\,\tau^2\rho^{-\alpha}} \leqslant \delta_0\,\tau^{1+2/\alpha}e^{-c_{29}\,\delta_0^{-\alpha}\,\ln(1+\tau)}.$$

Остается лишь сделать постоянную δ_0 достаточно малой. Лемма 6 полностью доказана.

Замечание к лемме 6 проверяется аналогично с учетом того, что при $\varepsilon > \nu/h$ условие (F) не используется (см. также (4.15)).

5. Доказательства

Теорема 2.1 вытекает из лемм 1 и 5.

Теорема 2.3 при $\tau < 1$ тривиальна, а при $\tau \geqslant 1$ является следствием лемм 6 и 2 при $\varepsilon = 1/\tau\rho$.

Чтобы проверить теорему 2.4, следует воспользоваться леммой 2 с $\varepsilon = \infty$, предварительно доказав, что при всех достаточно больших τ

$$\int\limits_{\tau\rho}^{\infty}|g_h(t)|\,dt \leqslant c_{30}/\tau. \quad (5.1)$$

Имеем при любом целом $m \geqslant 1$,

$$\int\limits_{\tau\rho}^{\infty} |g_h(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{\rho}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} |f_{h\lambda_j}(t\,h\,\lambda_j)|\,dt$$

$$\leqslant 2^{m-1} \max_{1\leqslant j\leqslant m} \Bigl(\int\limits_{\rho}^{\infty} |f_{1j}|^m\,dt + 2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{2j}|^m\,dt\Bigr), \tag{5.2}$$

где

$$f_{1j} = \frac{1}{L(s)}\int\limits_{0}^{x_0} e^{(it-1)sx} f(x)\,dx,\ \ f_{2j} = \frac{1}{L(s)}\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{(it-1)sx} f(x)\,dx,\ \ s = h\lambda_j. \tag{5.3}$$

С помощью интегрирования по частям при $tsx_0 > 1$ получим

$$-itsL(s)\,f_{1j} = (1-e^{itsx_0})\,e^{-sx_0} f(x_0) + (-s)\int\limits_{0}^{x_0}(e^{itsx}-1)e^{-sx} f(x)\,dx +$$

$$\Bigl(\int\limits_{0}^{1/ts} + \int\limits_{1/ts}^{x_0}\Bigr)(e^{itsx}-1)e^{-sx}\,df(x) = I_1 + I_2 + I_3.$$

При этом, по (1.2), (2.5)

$$|I_1| \leqslant 2sL(s), \quad |I_2| \leqslant C\,ts\int\limits_{0}^{1/ts} V(x)/x\,dx \leqslant C\,ts\,c_1 V(1/s)t^{-\beta}/\beta,$$

$$|I_3| \leqslant 2\Bigl(\int\limits_{1/ts}^{1/s} + \int\limits_{1/s}^{x_0}\Bigr)e^{-sx}\,|df(x)|\Bigr)$$

$$\leqslant 2C\,s\Bigl(\int\limits_{1/t}^{1} V(u/s)du/u^2 + \int\limits_{1}^{sx_0} V(u/s)e^{-u}du/u^2\Bigr) = 2Cs\,(J_1 + J_2);$$

$$J_2 \leqslant V(1/s)c_2\int\limits_{1}^{\infty} u^{\alpha-2}e^{-u}du, \quad J_1 \leqslant V(1/s)c_1\,\kappa(t),$$

где $\kappa(t) = (\beta-1)^{-1}$ $(\beta > 1)$, $\kappa(t) = \log t$ $(\beta = 1)$ и $\kappa(t) = t^{1-\beta}/(1-\beta)$, если $\beta < 1$. Учитывая, что

$$L(s) \geqslant e^{-1} V(1/s) \leqslant e^{-1} c_3 s^{-\alpha}, \tag{5.4}$$

отсюда получим

$$|f_{1j}| \leqslant c_{31}\ (t^{-\beta} + \ln(1+t)/t),\ \ s \geqslant \delta,\ \ ts \geqslant 1/x_0. \tag{5.5}$$

Поэтому,

$$\int\limits_{\rho}^{\infty} |f_{1j}|^m\, dt \leqslant c_{32}/\tau^2,\ \ m > (1+\alpha)/\min(1,\beta),\ \ h\lambda_m \geqslant \delta. \tag{5.6}$$

Пусть при некотором $p > 1$ выполнено условие (2.6) и $m \geqslant \max(2, p/(p-1))$. Тогда (см. также (5.3) и (5.4))

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{2j}|^m\, dt \leqslant c_{33} \left(\int\limits_{x_0}^{\infty} (s^{\alpha} e^{-sx} f(x))^{m/m-1}\, dx \right)^{m-1}$$
$$\leqslant s^{\alpha m/m-1} \left(\int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx + \int\limits_{x_0}^{\infty} (e^{-sx} f(x))^p\, dx \right).$$

Отсюда, из (5.6) и оценки $\tau^2 = h^2\sigma^2(h) \leqslant c_{34} \max(1,h) \sum\limits_{j \geqslant 1} \mathbf{E}\,(1 \wedge \lambda_j X)$, справедливой в силу леммы 3, следует (5.1).

При проверке Замечания 3 используется неравенство, аналогичное (5.2), и то, что для $|f_{h\lambda_j}(t)|$ справедлива оценка вида (5.5).

Наконец, теорема 3.3 является следствием леммы 1 ((4.1)).

Литература

1. Розовский, Л. В., *О вероятностях малых уклонений некоторых случайных сумм.* — Обозрение прикладной и промыш. математики **12**, № 4 (2005), 865 - 866.
2. Lifshits, M.A., *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab. **25** (1997), 424–442.
3. R. Davis, S. Resnick, *Extremes of moving averages of random variables with finite endpoint.* — Ann. Probab. **19** (1991), 312–328.
4. Розовский, Л. В., *О вероятностях малых уклонений положительных случайных величин,.* — Записки научн.семин. ПОМИ **320** (2004), 150 - 159.

5. Розовский, Л. В., *О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера.* — Записки научн.семин. ПОМИ **278** (2001), 208 - 224.
6. Розовский, Л. В., *Вероятности малых уклонений для одного класса распределений со степенным убыванием в нуле.* — Записки научн.семин. ПОМИ **328** (2005), 182 - 190.
7. Aurzada, F., *On the lower tail probabilities of some random sequences in l_p.* — Unpablished manuscript (2006).
8. Borovkov, A.A., Ruzankin P.S., *On small deviations of series of weighted i.i.d. random variables.* — IV International Conf. "Limit theorems in Probability Theory and Their Applications, Novosibirsk, 21-25 August, Absracts (2006), 14.
9. N.C. Jain , W.E. Pruitt, *Lower tail probability estimates for subordinators and nondecreasing random walks.* — Ann. Probab. **15** no. 1 (1987), 76–101.
10. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987, 320 с.

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables.

In the note we give estimates of small deviation probabilities of a sum $\sum_{j\geqslant 1}\lambda_j X_j$, where $\{\lambda_j\}$ are nonnegative numbers and $\{X_j\}$ are i.i.d. positive random variables, satisfying mild assumptions at zero and infinity.

Санкт-Петербургская
химико-фармацевтическая академия
E-mail: l_rozovsky@mail.ru

Поступило 1 ноября 2006 г.