Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

В. В. Петров

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЖУНА—ЭРДЁША ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ СОБЫТИЙ

В работе Чжуна и Эрдёша [1] содержится следующее неравенство для вероятности объединения произвольных событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant \Big(\sum_{i=1,\ldots,n} P(A_i)\Big)^2 \Big/ \sum_{i,k=1,\ldots,n} P(A_i A_k). \tag{1}$$

В [2] это неравенство получено в качестве следствия доказанных там же нижних оценок для хвостовых вероятностей типа $P(|X| > x)$ или $P(X > x)$, где X – произвольная случайная величина, у которой существуют моменты определенного порядка. В свою очередь, эти нижние оценки являются следствиями одного обобщения [3] моментного неравенства [4], представляющего собой усиление неравенства Ляпунова для моментов случайной величин величины (см. также [5] , теорема 1.2; непосредственный вывод неравенства Чжуна–Эрдёша из этого моментного неравенства приведен в [5], стр. 203).

Для получения обобщения неравенства (1) нам понадобятся приводимые ниже оценки хвостовых вероятностей из [2].

Пусть $b \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ и X – случайная величина, такая, что $E|X|^r < \infty$. Если r – нечетное число, s – четное, $r < s$ и $b^r \geqslant E(X^r)$, то

$$P(X > b) \geqslant (E(X^r) - b^r)^{s/(s-r)} / (E(X^s))^{r/(s-r)}. \tag{2}$$

Полагая здесь $b = (\lambda E(X^r))^{1/r}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, получим

$$P\{X > (\lambda E X^r)^{1/r}) \geqslant ((1-\lambda)(E X^r))^{s/(s-r)} / (E X^s)^{r/(s-r)}. \tag{3}$$

При $r = 1$ и $s = 2$ отсюда вытекает следующий известный результат: если X – невырожденная случайная величина, $EX \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то

$$P(X > \lambda EX) \geqslant (1-\lambda)^2 (EX)^2 / E(X^2). \tag{4}$$

(Соответствующие библиографические ссылки можно найти в [2].)

Пользуясь неравенством (4), легко получить (1). Пусть A_1, $A_2, \dots,$ – произвольные события, $I(A_1)$, $I(A_2), \dots,$ – их индикаторы. Положим $S_n = I(A_1) + \dots + I(A_n)$. Имеем

$$ES_n = P(A_1) + \dots + P(A_n), \quad E(S_n^2) = \sum_{i,k=1,\dots,n} P(A_i A_k).$$

Из (4) следует, что

$$P(S_n > \lambda ES_n) \geqslant (1-\lambda)^2 (ES_n)^2 / E(S_n^2), \tag{5}$$

если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Полагая в (5) $\lambda = 0$, получим $P(S_n > 0) \geqslant (ES_n)^2/E(S_n^2)$. Для завершения доказательства неравенства (1) остается заметить, что $P(S_n > 0) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$.

Займемся теперь обобщением неравенства Чжуна–Эрдёша. Пусть m – целое положительное число, $m \leqslant n$. Пусть P_m – вероятность появления не менее m событий из $A_1, \dots, A_n$. Оценки сверху и снизу для вероятности P_m доставляются широко известными неравенствами Бонферрони. Согласно этим неравенствам,

$$P_m \geqslant T_m - mT_{m+1}, \tag{6}$$

где

$$T_1 = \sum_{k=1,\dots,n} P(A_k), T_2 = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} P(A_i A_k),$$

$$T_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k), \dots .$$

(см., например, [6] , глава 4). В частности, $P_1 = P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geqslant T_1 - T_2$, $P_2 \geqslant T_2 - 2T_3$. С помощью неравенства (2) можно указать иные (во многих случаях лучшие по сравнению с (6)) нижние границы для вероятности P_m при любом $m \leqslant n$.

Положим в (2) $X = S_n = \sum\limits_{k=1,\dots,n} I(A_k)$, $b = m-1$, $r = 1$, $s = 2$. Тогда получим

$$P(S_n > m-1) \geqslant (ES_n - m + 1)^2 / E(S_n^2).$$

Замечая, что $P(S_n > m-1) = P_m$, приходим к неравенству

$$P_m \geqslant \Big(\sum_{k=1,\dots,n} P(A_k) - m + 1\Big)^2 \Big/ \sum_{i,k=1,\dots,n} P(A_i A_k) \quad (1 \leqslant m \leqslant n), \tag{7}$$

если $\sum\limits_{k=1,\ldots,n} P(A_k) \geqslant m-1$.

При $m = 1$ этот результат сводится к неравенству (1). При $m = 2$ имеем

$$P_2 \geqslant \Big(\sum_{k=1,\ldots,n} P(A_k) - 1\Big)^2 \Big/ \sum_{i,k=1,\ldots,n} P(A_i A_k), \tag{8}$$

если $\sum\limits_{k=1,\ldots,n} P(A_k) \geqslant 1$.

Сравним границы, доставляемые неравенствами (1) и (7), с границами, доставляемыми неравенствами Бонферрони, в случае, когда $A_k = A$ при любом k, $P(A) = p > 0$. В этом случае $\sum\limits_{k=1,\ldots,n} P(A_k) = np$, $\sum\limits_{i,k=1,\ldots,n} P(A_i A_k) = np + n(n-1)p = n^2 p$, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = p$, правая часть неравенства (1) равна p, так что (1) имеет место со знаком равенства. Правая часть неравенства Бонферрони при $m = 1$ равна $np - n(n-1)p/2$; эта разность равна p при $n = 1$ или 2, равна 0 при $n = 3$ и отрицательна при всех $n > 3$.

Правая часть (8), соответствующая значению $m = 2$, равна $p - 2/n + 1/(n^2 p)$. Эта граница близка к p при больших n. Такое же заключение справедливо и для правой части неравенства (7) при любом фиксированном m. Нетрудно проверить, что правая часть неравенства Бонферрони (6) отрицательна при любом m и любом $n > m + 2$.

Отметим некоторые следствия неравенства (7). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – произвольные случайные величины, $B_1, \ldots, B_n$ – борелевские множества точек действительной прямой, m – целое положительное число, $m \leqslant n$. Пусть, далее, Q_m – вероятность появления не менее m событий из множества событий $A_1 = [X_1 \in B_1], \ldots, A_n = [X_n \in B_n]$. Из (7) следует, что

$$Q_m \geqslant \Big(\sum_{k=1,\ldots,n} P(X_k \in B_k) - m + 1\Big)^2 \Big/ \sum_{i,k=1,\ldots,n} P(X_i \in B_i, X_k \in B_k), \tag{9}$$

если $\sum\limits_{k=1,\ldots,n} P(X_k \in B_k) \geqslant m - 1$.

В частном случае, когда $B_k = B = [x, \infty)$ при всех k, где x – произвольное действительное число, неравенство (9) принимает вид

$$R_m \geqslant \Big(\sum_{k=1,\ldots,n} P(X_k \geqslant x) - m + 1\Big)^2 \Big/ \sum_{i,k=1,\ldots,n} P(X_i \geqslant x, X_k \geqslant x), \quad (10)$$

где R_m есть вероятность того, что не менее m случайных величин из $X_1, \ldots, X_n$ примут значения, превосходящие или равные x. Это неравенство может представлять интерес для задач, связанных с распределениями порядковых статистик. Заметим, что $R_1 = P(\max_{k=1,\ldots,n} X_k \geqslant x)$.

Литература

1. K. L. Chung and P. Erdös, *On the application of the Borel–Cantelli lemma.* — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 179–186.
2. V. V. Petrov, *On lower bounds for tail probabilities.* — J. Statist. Planning and Inference 137 (2007).
3. B. C. Arnold, *Some elementary variations of the Lyapunov inequality.* — SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 117–118.
4. В. В. Петров, *Одно неравенство для моментов случайной величины.* — Теория вероятн. и ее примен. **20** (1975), 402–403.
5. V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory.* Oxford University Press, New York (1995).
6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Мир, М. (1984).

Petrov V. V. A generalization of the Chung-Erdös inequality for the probability of the union of events.

A generalization of the Chung–Erdös inequality for the probability of the union of arbitrary events is proved using some lower bounds for tail probabilities. We present a lower bound for the probability of appearance of at least m events from the set of events $A_1, \ldots, A_n$ where $1 \leqslant m \leqslant n$.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 27 марта 2007 г.