Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

В. В. Петров

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

1. Пусть G – множество функций $g(x)$, определенных для всех действительных x и удовлетворяющих следующим условиям: (а) $g(x)$ – неотрицательная, четная, неубывающая в области $x > 0$ функция, такая, что $g(x) \neq 0$ при $x \neq 0$; (б) функция $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$.

В [4] (см. также [5, с. 187]) содержится следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и пусть $EX_j^2 g(X_j) < \infty$ для некоторой функции $g(x) \in G$ и $j = 1, \dots, n$. Положим*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad B_n = E(S_n^2), \quad Z_n = B_n^{-1/2} S_n, \quad F_n(x) = P(Z_n < x).$$

Тогда

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{A \sum\limits_{j=1}^{n} EX_j^2 g(Xj)}{B_n (1+|x|)^2 g(B_n^{1/2}(1+|x|))} \tag{1}$$

для любого x. Здесь $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, A – некоторая абсолютная положительная постоянная.

Очевидно, $|x|^\delta \in G$, если $0 < \delta \leqslant 1$. Полагая в неравенстве (1) $g(x) = |x|^\delta$, $0 < \delta \leqslant 1$, получим

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{AL_n}{(1+|x|)^{2+\delta}}$$

для любого x, где

$$L_n = B_n^{-1-\delta/2} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta}.$$

Это неравенство принадлежит А. Бикялису [1]; ранее оно было получено С. В. Нагаевым для случая одинаковых распределений и $\delta = 1$. Их результаты представляют собой неравномерные усиления неравенств Эссеена и Берри–Эссеена соответственно (см., например, [5, гл. 5]).

Доказательство теоремы 1, приведенное в [4], опиралось на неравенство

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A\Big\{B_n^{-1}(1+|x|)^{-2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n^{1/2}} u^2 dV_j(u) +$$

$$+B_n^{-3/2}(1+|x|)^{-3}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n^{1/2}} |u|^3 dV_j(u)\Big\} \qquad (2)$$

для любого x и любого набора независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с функциями распределения $V_1(x), \dots, V_n(x)$, математическими ожиданиями, равными нулю,и конечными дисперсиями. Здесь и в дальнейшем мы обозначаем буквой A абсолютную положительную постоянную (не обязательно одну и ту же в различных формулах).

Неравенство (2) содержится в работе А. Бикялиса [1] наряду с эквивалентной формой этого неравенства. Ссылки на этот результат можно найти в [3–5]. Однако он остался незамеченным Чэнем и Шао [2], основной результат которых эквивалентен неравенству (2), при этом в [2] содержатся ссылки на работу А. Бикялиса [1] вместе с ошибочным утверждением, что ее результаты имеют менее общий характер и получены при условии конечности абсолютных моментов третьего порядка.

Обобщение неравенства (2) без предположений о существовании каких-либо моментов у рассматриваемых случайных величин получено в [3, теорема 2]. С помощью неравенства (2) в [3] доказан также следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю, и положительной дисперсией σ^2. Пусть $E|X_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого положительного δ. Если $\delta < 1$, то*

$$\Big|P\Big(\sigma^{-1}n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}X_j < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leqslant \frac{\psi(n^{1/2}(1+|x|))}{n^{\delta/2}(1+|x|)^{2+\delta}} \qquad (3)$$

для любых n и x, где $\psi(u)$ – ограниченная функция, такая, что $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$.

Заметим, что в теореме 2 нельзя заменить условие $\delta<1$ условием $\delta\leqslant 1$. Действительно, для симметричной схемы Бернулли имеет место равенство

$$P(S_n=0)=2(2\pi n)^{-1/2}(1+o(1))\quad(n\to\infty)$$

(см., например, [5, с. 150]), так что (3) не имеет места при $\delta=1$ и любой функции $\psi(u)$ с указанными в теореме 2 свойствами.

Целью настоящей заметки является обобщение теоремы 2 для случая, когда условие $E|X_1|^{2+\delta}<\infty$ заменяется более общим условием $EX_1^2g(X_1)<\infty$, где функция g принадлежит некоторому подмножеству множества G (содержащему функции $g(x)=|x|^\delta$ при $0<\delta<1$, но не содержащему функцию $g(x)=|x|$).

2. Пусть G_0 – множество функций $g(x)\in G$, удовлетворяющих дополнительному условию (в) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x^2)/(xg(x))=0$.

Очевидно, функция $g(x)=|x|^\delta$ принадлежит множеству G_0, если $0<\delta<1$, и не принадлежит G_0, если $\delta=1$. Другим примером функции класса G_0 может служить функция $g(x)=\exp\{(\log(e+|x|))^p\}$, где $0<p<1$.

Теорема 3. *Пусть $X_1,X_2,\dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю,и положительной дисперсией σ^2. Пусть $EX_1^2\,g(X_1)<\infty$ для некоторой функции $g\in G_0$. Тогда*

$$\left|P\Big(\sigma^{-1}n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j<x\Big)-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{\psi(n^{1/2}(1+|x|))}{(1+|x|)^2g(\sigma n^{1/2}(1+|x|))}$$

для любых n и x, где $\psi(u)$ – ограниченная функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$.

Из теоремы 3 следует теорема 2.

Доказательство теоремы 3. Применяя неравенство (2) к n первым случайным величинам из рассматриваемой последовательности, мы получим

$$\left|P(\sigma^{-1}n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j<x)-\Phi(x)\right|\leqslant A(T_1+T_2),$$

где

$$T_1 = \sigma^{-2}(1+|x|)^{-2} \int\limits_{|u|>\sigma n^{1/2}(1+|x|)} u^2 dV(u),$$

$$T_2 = \sigma^{-3} n^{-1/2}(1+|x|)^{-3} \int\limits_{|u|\leqslant \sigma n^{1/2}(1+|x|)} |u|^3 dV(u),$$

и $V(x)$ есть функция распределения случайной величины X_1. Для оценки T_1 и T_2 используем условие $EX_1^2 g(X_1) < \infty$ и свойства функции $g \in G_0$. Мы имеем

$$T_1 \leqslant \sigma^{-2}(1+|x|)^{-2}\big(g(\sigma n^{1/2}(1+|x|))\big)^{-1} \int\limits_{|u|>\sigma n^{1/2}(1+|x|)} u^2 g(u)\, dV(u) =$$

$$(1+|x|)^{-2}\big(g(\sigma n^{1/2}(1+|x|))\big)^{-1}\psi_1(n^{1/2}(1+|x|)),$$

причем $\lim\limits_{u\to\infty}\psi_1(u) = 0$. Далее, $T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)}$, где

$$T_2^{(1)} = \sigma^{-3} n^{-1/2}(1+|x|)^{-3} \int\limits_{D_1} |u|^3 dV(u),$$

$$T_2^{(2)} = \sigma^{-3} n^{-1/2}(1+|x|)^{-3} \int\limits_{D_2} |u|^3 dV(u),$$

$$D_1 = \Big\{ u : |u| \leqslant (\sigma n^{1/2}(1+|x|))^{1/2} \Big\},$$

$$D_2 = \Big\{ u : (\sigma n^{1/2}(1+|x|))^{1/2} < |u| \leqslant \sigma n^{1/2}(1+|x|) \Big\}.$$

Справедлива оценка

$$T_2^{(2)} \leqslant \sigma^{-3} n^{-1/2}(1+|x|)^{-3}\sigma n^{1/2}(1+|x|)(g(\sigma n^{1/2}(1+|x|)))^{-1}\times$$

$$\times \int\limits_{\substack{|u|> \\ (\sigma n^{1/2}(1+|x|))^{1/2}}} u^2 g(u)\, dV(u) = (1+|x|)^{-2}(g(\sigma n^{1/2}(1+|x|)))^{-1}\psi_2(n^{1/2}(1+|x|)),$$

где функция $\psi_2(u)$ удовлетворяет условию $\lim_{u\to\infty}\psi_2(u) = 0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно получить аналогичную оценку для $T_2^{(1)}$. Положим $\sigma n^{1/2}(1+|x|) = y^2$. Тогда $T_2^{(1)} \leqslant nCy^{-5}/g(y)$, где $C = EX_1^2\ g(X_1)$. В силу условия $g(x) \in$

G_0 имеем $\lim\limits_{y\to\infty} g(y^2)/(yg(y)) = 0$, поэтому $\lim\limits_{y\to\infty} y^4\, g(y^2) n^{-1} T_2^{(1)} = 0$. Отсюда следует требуемая оценка.

Автор благодарен А. И. Мартикайнену, заметившему, что предложенное доказательство теоремы 3 позволяет указать явное представление функции $\psi(u)$.

Литература

1. А. Бикялис, *Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.* — Литовский матем. сборник **6**, No. 3 (1966), 323–346.
2. L. H. Y. Chen, Q. M. Shao, *A nonuniform Berry–Esseen bound via Stein's method.* — Probab. Theory Relat. Fields **120** (2001), 236–254.
3. Л. В. Осипов, В. В. Петров, *Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме.* — Теория вероятн. и ее примен. **12**, No. 2 (1967), 322–329.
4. В. В. Петров, *Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **85** (1979),188–192.
5. V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory.* Oxford University Press, New York (1995).

Petrov V. V. On estimation of the remainder in the central limit theorem.

A nonuniform estimate of the remainder in the central limit theorem is obtained for a sequence of independent identically distributed random variables. This estimate is a generalization of an earlier result of L.V.Osipov and the author.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 11 ноября 2005 г.