Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Н. К. Кривулин

СКОРОСТЬ РОСТА ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЕЙ

При исследовании технических, экономических, производственных и других систем находят применение обобщенные линейные динамические модели вида

$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1),$$

где $A(k)$ – случайная матрица, $z(k)$ – вектор состояний системы, $\otimes$ – операция умножения матриц, заданная в некоторой идемпотентной алгебре [1, 2].

При анализе реальных систем часто представляет интерес определение средней (предельной) скорости роста вектора состояний системы

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \|z(k)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – некоторый идемпотентный аналог обычной векторной нормы.

Во многих случаях доказательство существования указанного предела может быть проведено без труда (например, на основе эргодической теоремы из работы [3]). В то же время вычисление значения предела часто оказывается довольно трудной задачей даже в случае весьма простых моделей систем. К имеющимся результатам можно отнести решение этой задачи в [4] для системы второго порядка с матрицей, все элементы которой независимы и имеют одинаковое экспоненциальное распределение с единичным средним. В работе [5] рассматривалась система второго порядка с симметричной матрицей, у которой диагональные элементы независимы и имеют экспоненциальное распределение с единичным средним, а все недиагональные элементы равны нулю.

Для систем произвольного порядка n известны результаты для случая, когда все элементы матрицы одинаково распределены и

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 06-01-00763).

независимы и имеют либо нормальное распределение [6], либо дискретное равномерное распределение [4]. В [7] найдено общее решение для случая системы с треугольной матрицей порядка n при условии, что случайные элементы матрицы имеют распределения вероятностей с конечными средним и дисперсией и могут быть зависимыми.

Целью настоящей работы является вычисление средней скорости роста вектора состояний для системы второго порядка, которая является некоторым обобщением системы, рассмотренной в [5]. Предполагается, что недиагональные элементы матрицы системы равны нулю, а диагональные элементы независимы и имеют экспоненциальные распределения с параметрами μ и ν, $\mu \neq \nu$.

1. Линейная стохастическая динамическая система

Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1), \tag{1}$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}, \quad z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а знак $\otimes$ обозначает операцию умножения матрицы на вектор в идемпотентной алгебре [1, 2] со скалярными операциями обобщенного сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, определенными соответственно как операция максимума и сложение.

Уравнение (1) можно представить в виде системы скалярных уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= \alpha_k \otimes x(k-1) \oplus y(k-1), \\ y(k) &= x(k-1) \oplus \beta_k \otimes y(k-1); \end{aligned}$$

или с использованием обычных обозначений в виде

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(\alpha_k + x(k-1), y(k-1)), \\ y(k) &= \max(x(k-1), \beta_k + y(k-1)). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что каждая из последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин, а также, что случайные величины α_k и β_l независимы при любых k, l.

Пусть диагональные элементы α_k и β_k матрицы $A(k)$ имеют экспоненциальное распределение вероятностей с параметрами μ и ν соответственно. Обозначим функции распределения указанных элементов через

$$F(t) = \max(0, 1 - e^{-\mu t}), \quad G(t) = \max(0, 1 - e^{-\nu t}),$$

а соответствующие им функции плотности через $f(t)$ и $g(t)$.

Заметим, что при условии $\mu = \nu$ рассматриваемая система легко сводится к системе, для которой $\mu = \nu = 1$, изученной в [5].

Одной из важных характеристик систем вида (1) является средняя скорость роста вектора состояний системы, которая определяется так

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \|z(k)\|, \tag{2}$$

где обозначение нормы понимается в смысле идемпотентной алгебры, т.е.

$$\|z(k)\| = x(k) \oplus y(k) = \max(x(k), y(k)).$$

2. Средняя скорость роста вектора состояний

Нетрудно показать, например, с использованием эргодической теоремы из [3], что в случае, когда элементы матрицы $A(k)$ неотрицательны и имеют конечные средние, предел (2) существует с вероятностью 1, а также существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E} \|z(k)\| = \lambda.$$

Для нахождения предела сначала определим случайные величины

$$Z(k) = \|z(k)\| - \|z(k-1)\|, \quad Y(k) = y(k) - x(k),$$

и заметим, что $\|z(k)\| = Z(1) + \cdots + Z(k)$, а также, что $Y(0) = 0$.

Введем функции распределения

$$\Phi_k(t) = \mathbb{P}\{Z(k) < t\}, \quad \Psi_k(t) = \mathbb{P}\{Y(k) < t\}.$$

Рассмотрим функцию Φ_k и представим ее в виде

$$\begin{aligned}\Phi_k(t) &= \mathbb{P}\{\max(x(k-1)+\alpha_k, y(k-1)+\beta_k) - \max(x(k-1), y(k-1)) < t\} \\ &= \mathbb{P}\{\max(\alpha_k, Y(k-1) + \beta_k) - \max(0, Y(k-1)) < t\},\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\Phi_k(t) = G(t)\left(1 - \int_0^\infty \Psi_{k-1}(u) f(u+t)du\right) + F(t)\int_0^\infty \Psi_{k-1}(-u) g(u+t)du.$$

Предположим, что последовательность функций Ψ_k сходится при $k \to \infty$ к некоторой предельной функции распределения Ψ (ниже будет показано, что такое предположение для рассматриваемой системы является справедливым).

Тогда, опираясь на теорему Лебега об ограниченной сходимости, заключаем, что последовательность Φ_k сходится к функции распределения

$$\Phi(t) = G(t)\left(1 - \int_0^\infty \Psi(u) f(u+t)du\right) + F(t)\int_0^\infty \Psi(-u) g(u+t)du \quad (3)$$

некоторой случайной величины Z, причем $Z(k) \to Z$ по распределению.

Кроме того, $\mathbb{E}[Z(k)]$ сходится к $\mathbb{E}[Z]$, а следовательно,

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}\|z(k)\| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\mathbb{E}[Z(m)] = \mathbb{E}[Z]. \quad (4)$$

3. Рекуррентное уравнение для функции Ψ_k

Применяя формулу полной вероятности, запишем функцию Ψ_k так

$$\Psi_k(t) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbb{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \beta_k = v\} f(u)g(v)dudv.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \beta_k = v\} = \\
&= \mathbb{P}\{\max(x(k-1), y(k-1)+v) - \max(x(k-1)+u, y(k-1)) < t\} = \\
&= \mathbb{P}\{\max(0, Y(k-1)+v) - \max(u, Y(k-1)) < t\} = \\
&= \begin{cases} 1 - \Psi_{k-1}(-t), & \text{если } u \le -t,\ v < t, \\ 1, & \text{если } u > -t,\ v < t, \\ 0, & \text{если } u \le -t,\ v \ge t, \\ \Psi_{k-1}(u - v + t), & \text{если } u > -t,\ v \ge t; \end{cases}
\end{aligned}$$

приходим к рекуррентному уравнению

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) f(u-t) g(v) du dv, & \text{если} \quad t \leq 0, \\ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) f(u) g(v+t) du dv + G(t), & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

Учитывая показательное распределение диагональных элементов матрицы системы, представим это уравнение в виде

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} \mu\nu e^{\mu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) e^{-\mu u - \nu v} du dv, \\ \text{если} \quad t \leq 0, \\ \mu\nu e^{-\nu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) e^{-\mu u - \nu v} du dv + 1 - e^{-\nu t}, \\ \text{если} \quad t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Найдем функцию распределения Ψ_1. В силу условия $Y(0) = 0$ имеем

$$\Psi_1(t) = \mathbb{P}\{\beta_1 - \alpha_1 < t\} = \begin{cases} \dfrac{\nu}{\mu+\nu} e^{\mu t}, & \text{если} \quad t \leq 0, \\ 1 - \dfrac{\mu}{\mu+\nu} e^{-\nu t}, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

С помощью уравнения (5) найдем Ψ_2. Сначала вычислим интеграл

$$\mu\nu \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_1(u-v) e^{-\mu u - \nu v} du dv = \frac{\nu^2(3\mu+\nu)}{(\mu+\nu)^3}.$$

Теперь получим

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu^2(3\mu+\nu)}{(\mu+\nu)^3} e^{\mu t}, & \text{если} \quad t \leq 0, \\ 1 - \dfrac{\mu^2(\mu+3\nu)}{(\mu+\nu)^3} e^{-\nu t}, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

4. Предельное распределение Ψ

Проверим сходимость последовательности функций Ψ_k. Рассмотрим разность

$$\Psi_2(t) - \Psi_1(t) = \begin{cases} (\nu-\mu)\dfrac{\nu\mu}{(\mu+\nu)^3}e^{\mu t}, & \text{если} \quad t \le 0, \\ (\nu-\mu)\dfrac{\nu\mu}{(\mu+\nu)^3}e^{-\nu t}, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что при всех t выполняется неравенство $\Psi_2(t) - \Psi_1(t) < 0$, если $\nu < \mu$, или противоположное неравенство $\Psi_2(t) - \Psi_1(t) > 0$, если $\nu > \mu$. При $\nu = \mu$ функции Ψ_1 и Ψ_2 совпадают.

Допустим, что $\nu < \mu$. Тогда для всех $t \le 0$ выполняется

$$\Psi_{k+1}(t) - \Psi_k(t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (\Psi_k(u-v) - \Psi_{k-1}(u-v)) f(u-t) g(v)\, du dv,$$

откуда по индукции следует, что при любом $k \ge 1$ выполняется неравенство

$$\Psi_{k+1}(t) - \Psi_k(t) \le 0.$$

Аналогичным образом проверяется, что такое неравенство выполняется и при всех $t > 0$.

Учитывая, что $\Psi_k(t) \ge 0$ при всех t, заключаем, что последовательность $\Psi_k(t)$ при $k \to \infty$ сходится к некоторой функции $\Psi(t)$.

Применяя те же рассуждения, приходим к выводу, что последовательность функций сходится и при условии $\nu > \mu$.

Ясно, что при $\mu = \nu$ последовательность Ψ_k вообще не зависит от k.

Переходя к пределу в уравнении (5) при $k \to \infty$, приходим к уравнению

$$\Psi(t) = \begin{cases} \mu\nu e^{\mu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \nu v}\, du dv, \\ \text{если} \quad t \le 0, \\ \mu\nu e^{-\nu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \nu v}\, du dv + 1 - e^{-\nu t}, \\ \text{если} \quad t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Исходя из формы уравнения, будем искать его решение в виде

$$\Psi(t) = \begin{cases} c_1 e^{\mu t}, & \text{если} \quad t \leq 0, \\ 1 - c_2 e^{-\nu t}, & \text{если} \quad t > 0, \end{cases}$$

где c_1, c_2 – некоторые коэффициенты.

Подставим это решение в уравнение (6). Сначала найдем интеграл

$$\mu\nu \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \nu v} du dv = \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_1 - \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_2 + \frac{\nu}{\mu+\nu}.$$

Имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_1 - \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_2 + \frac{\nu}{\mu+\nu}, \\ c_2 &= -\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_1 + \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} c_2 + \frac{\mu}{\mu+\nu}. \end{aligned}$$

Решая систему, получим

$$c_1 = \frac{\nu^2}{\mu^2+\nu^2}, \quad c_2 = \frac{\mu^2}{\mu^2+\nu^2}.$$

Таким образом, предельная функция имеет вид

$$\Psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu^2}{\mu^2+\nu^2} e^{\mu t}, & \text{если} \quad t \leq 0, \\ 1 - \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\nu^2} e^{-\nu t}, & \text{если} \quad t > 0 \end{cases}$$

и является, очевидно, функцией распределения некоторой случайной величины.

5. Вычисление средней скорости роста

Определим среднюю скорость роста λ, исходя из (4). По формуле (3) найдем функцию распределения

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1}{\mu^2+\nu^2} \left(\frac{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}{\mu+\nu} (\nu e^{-\mu t} + \mu e^{-\nu t}) + \mu\nu e^{-(\mu+\nu)t} \right).$$

Соответствующая ей плотность имеет вид

$$\phi(t) = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}{\mu+\nu}(e^{-\mu t}+e^{-\nu t}) - (\mu+\nu)e^{-(\mu+\nu)t}\right).$$

Вычисление интеграла дает величину средней скорости роста в виде

$$\lambda = \int_0^\infty t\phi(t)dt = \frac{\mu^4+\mu^3\nu+\mu^2\nu^2+\mu\nu^3+\nu^4}{\mu\nu(\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2)}.$$

Заметим, что при $\nu = \mu$ имеем $\lambda = 5/(4\mu)$, что совпадает с результатом, полученным в [5].

Литература

1. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat, *Synchronization and linearity.* Wiley, Chichester (1992).
2. В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* Физматлит, М. (1994).
3. J. F. C. Kingman, *Subadditive ergodic theory.* — Ann. Probab. **1** (1973), 883–909.
4. G. J. Olsder, J. A. C. Resing, R. E. De Vries, M. S. Keane, G. Hooghiemstra, *Discrete event systems with stochastic processing times.* — IEEE Trans. Automat. Contr. **35** (1990), No. 3, 299–302.
5. A. Jean-Marie, *Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs.* — Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. CWI, Amsterdam (1994), pp. 309-341. (CWI Tracts, Vol. 106.)
6. J. E. Cohen, *Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research.* — SIAM Review **30** (1988), No. 1, 69–86.
7. Н. К. Кривулин, Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной динамической системы со случайной треугольной матрицей. — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, **1** (2005), 33–38.

Krivulin N. K. The growth rate of state vector in a generalized linear stochastic system with symmetric matrix.

The mean growth rate of state vector is evaluated for a generalized linear stochastic second-order system with symmetric matrix. The diagonal entries of the matrix are assumed to be independent and exponentially distributed with different means, whereas the nondiagonal entries are equal to zero.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: Nikolai.Krivulin@pobox.spbu.ru

Поступило 30 ноября 2006 г.