Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

К. Л. Зильбербург

ОЦЕНИВАНИЕ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ В БЕЛОМ ШУМЕ

1. Введение.

В данной работе мы будем оценивать монотонную на отрезке функцию, наблюдаемую в гауссовском белом шуме, методом максимума правдоподобия и исследовать скорость сходимости.

Впервые вид оценки максимума правдоподобия (ОМП) монотонной плотности был получен У. Гренандером ([3], 1956). Было доказано, что ОМП невозрастающей плотности f в классе F всех непрерывных слева невозрастающих плотностей на отрезке $[0, \infty)$ равна производной от выпуклой мажоранты эмпирической функции распределения от выборки.

В 1969 году Пракаса Рао ([4]) получил следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые наблюдения убывающей плотности f на $[0, \infty)$, у которой существует не обращающаяся в 0 производная $f'(t)$ в точке $t \in (0, \infty)$. Если f_n – ОМП f, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$ и имеющая вид, как в работе Гренандера, тогда*

$$n^{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} f(t) f'(t) \right|^{-\frac{1}{3}} (f_n(t) - f(t)) \to^L 2Z,$$

где Z распределено так же, как $\arg\max\limits_{t \in \mathbb{R}} \left[W(t) - t^2 \right]$, а W – это стандартное двухстороннее броуновское движение на $\mathbb{R}$, выходящее из 0.

Набросок более простого доказательства этого результата предложил П. Грёнебоом ([5], 1985), однако работа содержала некоторые неточности, которые в 1990 году были устранены в работе Ким и Поллард ([2], 1990).

Ниже будет доказан аналогичный результат для функции, наблюдаемой в белом шуме.

2.1. Формулировка основного результата.

Для начала заметим, что ОМП для монотонной функции, наблюдаемой в гауссовском белом шуме, будет иметь схожий с описываемым Гренандером кусочно-постоянный вид. А именно, пусть наблюдается процесс

$$dX(t) = f(t)dt + \varepsilon dW(t), \quad t \in [0,1],$$

где f – убывающая положительная функция на $[0,1]$, такая что существует $f'(t) \neq 0$ в точке $t_0 \in (0,1)$. F – первообразная f. Из работ Цирельсона ([6–8])) следует, что $\widehat{f}_\varepsilon$ – оценка максимума правдоподобия для f, построенная методом натянутой нити по наблюдению X, – равняется правой производной выпуклой мажоранты X. (Результат доказывается в разделе 3.) В этих обозначениях теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть $W(t)$ – стандартное броуновское движение с $W(0) = 0$. Тогда*

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \left|\frac{1}{2}f'(t_0)\right|^{-\frac{1}{3}} \left(\widehat{f}_\varepsilon(t_0) - f(t_0)\right) \to^L 2Z,$$

где Z распределено так же, как $\arg\max\limits_{t\geq 0}\left[W(t) - t^2\right]$.

2.2. Доказательство теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Введем процесс

$$U_\varepsilon(a) = \arg\max_{t\geq 0}\left[X_\varepsilon - at\right].$$

Тогда из определения $\widehat{f}_\varepsilon$ и U_ε следует, что

$$\widehat{f}_\varepsilon(t) \leq a \Leftrightarrow U_\varepsilon(a) \leq t.$$

Поэтому

$$P_f\left\{\widehat{f}_\varepsilon(t_0) - f(t_0) \leq x\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}f'(t_0)\right|^{\frac{1}{3}}\right\} = P_f\left\{U_\varepsilon(f(t_0) + \delta_\varepsilon) \leq t_0\right\},$$

где

$$\delta_\varepsilon = x\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}f'(t_0)\right|^{\frac{1}{3}}$$

По определению

$$U_\varepsilon(a+\delta_\varepsilon) = \arg\max_{t\geq 0}\left[X_\varepsilon(t) - (a+\delta_\varepsilon)t\right],$$

а, значит,

$$U_\varepsilon(a+\delta_\varepsilon) = \arg\max_{t\geq 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}(X_\varepsilon(t) - F(t)) + \frac{1}{\varepsilon}(F(t) - (a+\delta_\varepsilon)t)\right].$$

По определению $X_\varepsilon(t) = F(t) + \varepsilon W(t)$, поэтому $\frac{1}{\varepsilon}(X_\varepsilon(t) - F(t)) = W(t)$, где $W(t)$ – броуновское движение, такое что $W(0) = 0$.

Рассмотрим момент достижения максимума процессом

$$\begin{gathered} W(u) + \frac{1}{\varepsilon}(F(u) - (f(t_0)+\delta_\varepsilon)u) = \\ = (W(t_0 + (u - t_0)) - W(t_0)) + W(t_0) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left(F(u) - f(t_0)u\right) - \frac{1}{\varepsilon}\delta_\varepsilon(u - t_0) + \frac{1}{\varepsilon}t_0\delta_\varepsilon. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Слагаемые $W(t_0)$ и $\frac{1}{\varepsilon}t_0\delta_\varepsilon$ от u не зависят. $W(t_0 + (u - t_0)) - W(t_0) = W_1(u - t_0)$ – новое двухстороннее броуновское движение, такое что $W_1(0) = 0$.

Положим $z = \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{-2/3}(u - t_0)$; $c = -\frac{f'(t_0)}{2}$. Тогда момент достижения максимума процесса 2.1 будет совпадать с моментом достижения максимума процесса

$$W_1\left(\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{2/3}z\right) - \varepsilon^{-1}\left[F\left(t_0 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{2/3}z\right) - F(t_0) - f(t_0)\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{2/3}z\right] - \\ - \varepsilon^{-1}\varepsilon^{2/3}c^{-2/3}\delta_\varepsilon z,$$

который по свойству масштабируемости винеровского процесса можно переписать как

$$\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/3}\left(W_1(z) - \varepsilon^{-4/3}c^{1/3}\left[F\left(t_0 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{2/3}z\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - F(t_0) - f(t_0)\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{2/3}z\right] - xz\right),$$

(поскольку $\delta_\varepsilon = x\varepsilon^{2/3}c^{1/3}$). Аргумент максимума не зависит от положительного коэффициента $\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/3}$, поэтому аргумент максимума процесса 2.1 совпадает с аргументом максимума процесса

$$W_1(z) + \frac{f'(t_0)}{2c}z^2 + b(z,\varepsilon) - xz = W_1(z) - z^2 + b(z,\varepsilon) - xz, \tag{2.2}$$

где

$$b(z,\varepsilon) = -F\Big(t_0 + \Big(\frac{\varepsilon}{c}\Big)^{2/3} z\Big) + F(t_0) + f(t_0)\Big(\frac{\varepsilon}{c}\Big)^{2/3} z + \frac{f'(t_0)}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{c}\Big)^{2/3} z^2$$

и $b(z,\varepsilon) = \varepsilon^{-4/3} o(z^2 \varepsilon^{4/3})$.

Введём следующие обозначения: пусть $\mathbf{B}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – это пространство всех локально ограниченных вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$, снабжённое топологией равномерной сходимости на компактах, а $\mathbf{C}_{\max}(\mathbb{R})$ — сепарабельное подмножество всех непрерывных функций $x(\cdot)$ из $\mathbf{B}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, для которых (i) $x(t) \to -\infty$ при $|t| \to \infty$ и (ii) x достигает максимума в единственной точке в $\mathbb{R}$.

Для доказательства сходимости аргументов максимумов по распределению мы воспользуемся следующей теоремой (Теорема 2.7, [2]).

Теорема 2.2 (Ким, Поллард, [2]). *Пусть* $\{Z_n\}$*– случайные отображения в* $\mathbf{B}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$*, а* $\{t_n\}$ *– случайные отображения в* $\mathbb{R}$*, такие что*

(i) $Z_n \rightsquigarrow Q$*, где* Q *– борелевская мера, сосредоточенная на* $\mathbf{C}_{\max}(\mathbb{R})$*;*

(ii) $t_n = O_p(1)$*;*

(iii) $Z_n(t_n) \ge \sup_t Z_n(t) - \alpha_n$*, где* $\alpha_n \to 0$ *по вероятности.*

Тогда $t_n \rightsquigarrow \arg\max(Z)$ *для* Z *с распределением* Q*.*

(Здесь и далее символ $\rightsquigarrow$ обозначает слабую сходимость распределений.)

В качестве процесса Z_n выберем процесс 2.1 для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$, в роли t_n выступит аргумент его максимума. Тогда останется доказать лишь ограниченность t_n и слабую сходимость Z_n к процессу $W(z) - z^2 - xz$. В силу классических результатов Ю. В. Прохорова, для этого достаточно показать, во-первых, сходимость конечномерных распределений и, во-вторых, плотность семейства распределений процесса Z_n. По теореме Арцела–Асколи, плотность семейства следует из равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности (см. Биллингсли, [11] или Поллард, [9]).

Теорема 2.3 (Прохоров). *Пусть* Z_n *– последовательность случайных процессов с траекториями в* $B_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$*. Пусть*

(i) *для любого конечного подмножества* $S \subset \mathbb{R}$ *существует вероятностная мера* Q_s *на* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$, *такая что слабо сходятся распределения* $\{Z_n(t) : t \in S\} \rightsquigarrow Q_s$;

(ii) *для любого* $\varepsilon > 0, \eta > 0$ *и* $M < \infty$ *существует* $\delta > 0$, *такое что*

$$\limsup P^*\Big\{ \sup_{\|s-t\|<\delta, \max\{\|s\|,\|t\|\}\le M} \|Z_n(s) - Z_n(t)\| > \eta \Big\} < \varepsilon.$$

Тогда существует борелевская вероятностная мера Q *с конечномерными проекциями* Q_s, *такая что* $Z_n \rightsquigarrow Q$ *(в смысле сходимости по распределению в метрике равномерной сходимости на компактах) и* Q *сконцентрирована на сепарабельном множестве всех непрерывных функций в* $B_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$

Проверим равностепенную непрерывность (условие (ii))

$$\sup_{|s-t|<\delta, max\{|s|,|t|\}\le M} |Z_n(s) - Z_n(t)| =$$

$$= \sup |W(s) - W(t) - (t^2 - s^2) - x(t-s) + (b_\varepsilon(t) - b\varepsilon(s))| \le$$

$$\le \sup |W(t) - W(s)| + \sup |t-s||t+s| + \sup |x||t-s| +$$

$$+ \sup |b_\varepsilon(t) - b_\varepsilon(s)| \le c\delta^\gamma + 2\delta M + |x|\delta + |b(t,\varepsilon)| + |b(s,\varepsilon)|, \qquad (2.3)$$

где $0 < \gamma < 1/2$. Последнее неравенство следует из условия Гёльдера для винеровского процесса и выполняется с вероятностью 1. Функция $b(z,\varepsilon)$ при малых ε ведёт себя как $\varepsilon^{-4/3} o(\varepsilon^{4/3} z^2)$ с точностью до домножения на константу, а значит, если $|t|$, $|s| \le M$, то два последних слагаемых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Из всего вышесказанного следует сходимость к 0 по вероятности левой части неравенства, что и обеспечивает равностепенную непрерывность.

Для равномерной ограниченности на компакте достаточно равномерной ограниченности в одной точке этого компакта, а она, в свою очередь, следует из сходимости конечномерных распределений и свойств пространства $\mathbf{B}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Сходимость конечномерных распределений следует из независимости приращений винеровского процесса, а также из равномерной сходимости остатка $b(z,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ при $|z| \le M$.

Применяя теорему 2.2 (теорема 2.7 в [2]), получаем, что предельное при $\varepsilon \to 0$ распределение процесса

$$\frac{c^{2/3}}{\varepsilon^{2/3}}(U_\varepsilon(a+\delta_\varepsilon)-t_0)$$

будет совпадать с распределением аргумента максимума процесса

$$W(z)-(z^2+xz), \quad z\in\mathbb{R} \quad \text{или} \quad W(z)-\Big(z+\frac{1}{2}x\Big)^2, \quad z\in\mathbb{R}.$$

Если мы теперь введём обозначение

$$V(s)=\arg\max_{z\in\mathbb{R}}\left[W(z)-(z-s)^2\right],$$

тогда $V(s)-s$ будет стационарным процессом, следовательно

$$P\{V(s)\le t\}=P\{V(0)\le t-s\}$$

$$P_f\left\{\widehat{f}_\varepsilon(t_0)-a\le x\varepsilon^{2/3}c^{1/3}\right\}=P_f\{U_\varepsilon(a+\delta_\varepsilon)-t_0\le 0\}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$\longrightarrow P_f\Big\{V\Big(-\frac{1}{2}x\Big)\le 0\Big\}=P\{2V(0)\le x\}. \tag{2.4}$$

Тем самым, теорема 2.1 доказана. □

3.1. Вид оценки максимума правдоподобия.

Осталось привести доказательство того, что оценка максимума правдоподобия $\widehat{f}$ монотонной функции f существует и имеет вид, как указано в пункте 2.1. Необходимые и достаточные условия существования, единственности и состоятельности МП-оценки, сформулированы доказаны Б. С. Цирельсоном ([6–8]) в терминах геометрической характеристики множества V – средней ширины; её связь с гауссовской мерой установлена В. Н. Судаковым ([10]).

Пусть дано линейное пространство с центрированной гауссовской мерой (E,γ) и его ядро $E_0\subset E$. E_0 – гильбертово пространство; для θ, $\eta\in E_0$ заданы скалярное произведение $\langle\theta,\eta\rangle$ и норма $\|\theta\|=\langle\theta,\theta\rangle^{\frac{1}{2}}$, однозначно определяемые мерой γ. Для каждого $\theta\in E_0$ линейный непрерывный по $\eta\in E_0$ функционал $\langle\theta,\eta\rangle$ имеет единственное (с точностью до совпадения почти всюду) продолжение до линейного измеримого по $x\in E$ функционала, обозначаемого $\langle\theta,x\rangle$; при этом $\int\langle\theta,x\rangle^2\gamma(dx)=\|\theta\|^2$.

Мера γ_θ, получаемая из меры γ сдвигом на вектор θ, имеет плотность по мере γ тогда и только тогда, когда $\theta \in E_0$. Оценивается параметр сдвига θ по одному наблюдению $x \in E$. Считаем, что θ пробегает известное множество $V \subset E_0$ (снабжённое метрикой из E_0). Нам достаточно рассматривать сепарабельную модификацию процесса $\langle \theta, x \rangle$.

V называется GB-множеством, если

$$\gamma\{x \in E : \sup_{\theta \in V} \langle \theta, x \rangle < +\infty\} = 1.$$

В этом (и только в этом) случае конечна средняя ширина

$$h_1(V) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int (\sup_{\theta \in V} \langle \theta, x \rangle) \gamma(dx);$$

см. [10, глава 2]. Если V – GB-множество, то функция правдоподобия

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\widehat{\theta}(x), x) = \sup_{\theta \in V} \mathcal{L}_\varepsilon(\theta, x).$$

Введём характеристику

$$C_1(V) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{1}{r^2} (2\pi)^{-1/2} h_1(V \cap B(\theta, r)),$$

где $B(\theta, r) = \{\eta \in E_0 : \|\eta - \theta\| \le r\}$; и θ – произвольная точка E_0.

В нашем случае мера γ соответствует белому шуму на $[0,1]$, E – пространство обобщённых функций $(C_1[0,1])^*$; тогда $E_0 = L_2[0,1]$ с обычным скалярным произведением. МП-оценка имеет смысл, если оцениваемый сигнал θ берётся из замкнутого множества $V \subset L_2[0,1]$, а $C_1(V) < \infty$. Если мы просто возьмём множество V всех убывающих на $(0,1)$ суммируемых с квадратом положительных функций, то $C_1(V) = +\infty$ и функция правдоподобия не ограничена сверху на V. Поэтому мы рассмотрим множество $V_{0,b}$ всех таких функций $\theta \in V$, что $0 \le \theta(e) \le b$ при всех $t \in (0,1)$. $V_{0,b} \in GB$ – выпуклое и $C_1(V_{0,b}) < +\infty$, поэтому $C_1(V_{0,b}) = 0$ (для выпуклого множества характеристика C_1 может быть либо бесконечностью, либо нулём). Следовательно, по теореме 1 из работы Цирельсона ([6]) для γ_θ-почти всех $x \in E$ функция правдоподобия $\mathcal{L}_\varepsilon(\widehat{\theta}_{0,b}(x), x)$ конечна, а также существует и единственна оценка $\widehat{\theta}_{0,b}(x) \in V$, такая что супремум фукции правдоподобия по $V_{0,b}$ сосредоточен в сколь угодно малой окрестности $\widehat{\theta}_{0,b}(x)$, и эта оценка сходится к θ по вероятости γ.

Сейчас мы докажем, что $\widehat{\theta}_{0,b}(x)$ имеет ступенчатый вид. Потом устремим b к бесконечности и получим, что $\widehat{\theta}_{0,b}(x)$ сходится с вероятностью 1 в метрике $L_2[0,1]$ к функции $\widehat{\theta}(x)$, которая есть производная выпуклой мажоранты $X(t)$, а $\widehat{\theta}_{0,b}(x)$ получается из $\widehat{\theta}(x)$ заменой всех значений, больших b, на b. Эта функция сверху неограничена, она представляет из себя ломаную, ступеньки которой сгущаются к 0.

Определим теперь для любого $\eta \in V_{0,b}$ число $K(\eta)$ – наибольшее такое k, для которого существуют линейно независимые векторы $\eta_1, \ldots, \eta_k \in E_0$, такие что $\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_k\eta_k \in V$ для любых $a_1, \ldots, a_k =\in [-1,+1]$. Это число означает максимальную размерность грани выпуклого множества (многогранника) $V_{0,b}$, которой принадлежит точка. Очевидно, $K(\eta) < \infty$ только для граничных точек $V_{0,b}$ и равно 0 для крайних точек.

По теореме 3 из работы Цирельсона ([7]) для любого случайного элемента ξ пространства E с распределением γ_θ и для любого $a \geq 0$

$$E\exp(aK(\widehat{\theta}_{0,b}(\xi))) \leq \exp(Ce^a/\sigma),$$

где $C = (2\pi)^{-1/2}h_1(V) < \infty$. Следовательно, $K(\widehat{\theta}_{0,b})$ конечно.

Выведем из этого, что функция $\widehat{\theta}_{0,b}$ – ступенчатая. $\widehat{\theta}_{0,b} \in V_{0,b}$, следовательно она монотонно убывает. Предположим, что в точке $t \in (0,1)$ функция строго убывает. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ $\widehat{\theta}_{0,b}(t-\varepsilon) > \widehat{\theta}_{0,b}(t) > \widehat{\theta}_{0,b}(t+\varepsilon)$. Возьмём функцию

$$\widehat{\theta}_t(s) = \widehat{\theta}_t(t-\varepsilon) = \frac{\widehat{\theta}_{0,b}(t-\varepsilon) - \widehat{\theta}_{0,b}(t)}{1000000}, \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\widehat{\theta}_t(s) = \widehat{\theta}_t(t+\varepsilon) = 0, t \leq s \leq 1.$$

Очевидно, любая такая функция годится в качестве функции η_i. Так же очевидно, что для любых двух различных точек монотонности получатся линейно независимые функции. Таким образом, $K(\widehat{\theta}_{0,b})$ может быть конечно только для функции с конечным числом точек убывания. А так как $\widehat{\theta}_{0,b}$ монотонна, то она имеет ступенчатый вид (конечное число ступенек).

Осталось этот вид найти. Для этого рассмотрим логарифм функции правдоподобия (см. Ибрагимов, Хасьминский, [1]):

$$\ln \mathcal{L}_\varepsilon(\widehat{\theta}_{0,b}(\cdot), x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^1 \widehat{\theta}_{0,b}(t) dX_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \widehat{\theta}^2_{0,b}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^1 \widehat{\theta}_{0,b}(t)\Big(dX_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}d\Theta(t)\Big) = \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\widehat{\theta}_{0,b}(t)\Big(X_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\Theta(t)\Big)\Big|_0^1 -$$

$$- \int\limits_0^1 \Big(X_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\Theta(t)\Big) d\widehat{\theta}_{0,b}(t)\Big], \tag{3.1}$$

где $\Theta(t)$ – это первообразная $\widehat{\theta}_{0,b}(t)$. Последний интеграл следует понимать как интеграл Лебега–Стилтьеса. Домножим равенство на ε^2 и попытаемся отыскать максимизирующую оценку. Для этого обозначим точки скачков $\widehat{\theta}_{0,b}$ за $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ и абсолютные величины скачков за $g_k = \widehat{\theta}_{0,b}(t_k - 0) - \widehat{\theta}_{0,b}(t_k + 0)$, g_n считаем равным $\widehat{\theta}_{0,b}(1)$. Тогда выражение 3.1 можно переписать так:

$$g_n\Big(X_\varepsilon(1) - \frac{1}{2}\Theta(1)\Big) - \sum_{k=1}^n g_k\Big(X_\varepsilon(0) - \frac{1}{2}\Theta(0)\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} g_k\Big(X_\varepsilon(t_k) - \frac{1}{2}\Theta(t_k)\Big) = \sum_{k=1}^n g_k\Big(X_\varepsilon(t_k) -$$

$$- \frac{1}{2}\Big[g_1t_1 + g_2t_2 + \cdots + g_kt_k + g_{k+1}t_k + \cdots + g_nt_k\Big]\Big), \tag{3.2}$$

поскольку первообразные мы можем выбирать так, чтобы в 0 они равнялись 0. Продифференцировав 3.1 по g_k и приравняв производную к 0 мы получим уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \mathcal{L}_\varepsilon(\widehat{\theta}_{0,b}(\cdot), x) = X(t_k) - \frac{1}{2}\Theta(t_k) = \tag{3.3}$$

$$= \frac{1}{2}[g_1t_1 + g_2t_2 + \ldots + g_kt_k + g_{k+1}t_k + \ldots + g_nt_n] = X(t_k) - \Theta(t_k) = 0,$$

а значит, что $X(t_k) = \Theta(t_k)$. Подставляя в 3.1 мы получаем, что нам нужно найти такие t_k, чтобы

$$\varepsilon^2 \ln \mathcal{L}_\varepsilon(\widehat{\theta}_{0,b}(\cdot), x) = \sum_{k=1}^n g_k \frac{1}{2} X_\varepsilon(t_k)$$

было максимальным, что и приводит нас к выпуклой мажоранте.

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания.* Наука, М. (1979).
2. J. Kim, D. Pollard, *Cube root asymptotics.* — Ann. Statist. **18**, No. 1 (1990), 191–219.
3. U. Grenander, *On the theory of mortality measurement.* Part II, — Skand. Akt. **39** (1956), 125–153.
4. Rao B. L. S. Prakasa, *Estimation of a unimodal density.* — Sankhaya, Ser. A **31** (1969), 23–36.
5. P. Groeneboom, *Estimating a monotone density.* — In: Proc. Berkley Conf. in Honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer (L. Le Cam and R. A. Olshen eds.) II, Wadsword, Belmont, Calif. (1985), 539–555.
6. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* I. — Теория вероятности и её применение **27**, вып. 2 (1982), 388–395.
7. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* II. — Теория вероятности и её применение **30**, вып. 4 (1985), 772–779.
8. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* III. — Теория вероятности и её применение **31**, вып. 3, 537–549.
9. D. Pollard, *Empirical processes.* — Theory Appl., IMS, Hayward (1990).
10. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Труды МИАН **141** (1976).
11. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М. (1977).

Zilberburg K. L. Estimating a monotone function, being observe in the white noise.

Monotone functions on the segment is being observed in the Gaussian white noise. The Maximum Likelihood Estimator of such a function is of a piecewise continious sort. A limit theorem on the convergence rate of such an estimator is proved.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 февраля 2007 г.