Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

В. А. Егоров

ОЦЕНКА ПОСТОЯННЫХ В ВЕРХНИХ НЕРАВЕНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА И РОЗЕНТАЛЯ

Оцениванием хвостов распределений сумм независимых случайных величин занимались на протяжении всего развития теории вероятностей. Достаточно отметить показательные оценки А. Н. Колмогорова [1] и С. Н. Бернштейна [2], работы Хефдинга [3], Беннета [4], неравенства Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [5]. Обширную библиографию на эту тему можно найти в монографиях В. В. Петрова [6], [7].

Используя эти оценки, можно получить точную асимптотику поведения сумм случайных величин как с точки зрения слабой, так и с точки зрения сильной сходимости. Конечно, это можно сделать только с помощью оптимальных оценок хвостов. Оказывается, что использование неравенств Чебышевского типа для моментов сумм, порядок которых растет с ростом n, приводит к оптимальным сильным верхним оценкам, при этом, очевидно, должна быть найдена точная асимптотика роста постоянных в соответствующих неравенствах. Этим вопросам посвящена настоящая работа.

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{n}-$ независимые случайные величины, $EX_k = 0, E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для некоторого $p > 2$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Мы будем интересоваться верхними оценками моментов сумм $E|S_n|^p$ при $p \to \infty$ и $n \to \infty$.

Укажем некоторые известные неравенства для этих сумм.

Используя L^p- нормы ($||X||_p = (E|X|^p)^{1/p}$), неравенства Марцинкевича можно записать в виде (см. [6], [7])

$$B(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}} \le ||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \tag{1}$$

Работа частично поддержена грантами РФФИ Н 06-01-00179 и НШ-4222.2006.1.

где $B(p)$, $C(p)$ – положительные постоянные, зависящие только от p.

Другое известное неравенство, неравенство Розенталя, имеет вид (см. [6],[7])

$$E|S_n|^p \leq L^p(A_{p,n} + 2^{p^2/4}A_{2,n}^{p/2}), \qquad (2)$$

где $L > 0-$ постоянная, $A_{r,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} E|X_i|^r$.

Правые части этих неравенств можно было бы успешно использовать для получения оптимальных сильных верхних оценок в предельных теоремах теории вероятностей, если знать асимптотику постоянных $L = L(p)$ и $C(p)$ при $p = p(n) \to \infty$ и оптимальный порядок множителя при $A_{2,n}^{p/2}$.

В работе автора [8] эта асимптотика в случае неравенств Марцинкевича была найдена для независимых симметрично распределенных слагаемых. Была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{|X_k\}_{k=1}^{n}-$ *независимые симметричные случайные величины,* $E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$||S_n||_p \leq C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}},\ C(p) = C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}, \qquad (3)$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Поскольку в этой теореме, кроме симметричности и существования соответствующих моментов, отсутствуют ограничения на слагаемые, мы можем использовать ее для получения оценок для самонормированных сумм этих слагаемых. Так, в [8] получен следующий результат.

Следствие 1. *Положим* $t_n = \frac{S_n}{\sqrt{T_n}}$. *Тогда в условиях Теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$E|t_n|^p \leq C(\frac{p}{e})^{p/2}, \qquad (4)$$

или, что то же самое,

$$||t_n||_p \leq C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}. \qquad (5)$$

Непосредственным следствием этих соотношений является неравенство

$$P(t_n > x) < Cexp\{-\frac{x^2}{2}\}. \tag{6}$$

Отметим, что правая часть приведенных неравенств не зависит от n и что оценка (6) является неулучшаемой по x, что указывает на оптимальность оценок (3) и (4).

Приведем аналогичное следствие, относящееся к нормированным суммам независимых симметричных случайных величин.

Следствие 2.

$$E|S_n|^p \leq C(\frac{p}{e})^{p/2} ET_n^{p/2}. \tag{7}$$

$$P(S_n > x\sqrt{||T_n||_{x^2/2}}) < Cexp\{-\frac{x^2}{2}\}. \tag{8}$$

Соотношение (7) доказано в [8], соотношение (8) легко выводится с помощью неравенств чебышевского типа. Действительно, мы имеем

$$P(S_n > x\sqrt{||T_n||_{p/2}}) \leq \frac{E|S_n|^p}{x^p(||T_n||_{p/2}^{p/2})} = \frac{E|S_n|^p}{x^p ET_n^{p/2}} \leq \frac{C(p/e)^{p/2}}{x^p}.$$

Положив $p = x^2$, получим (8).

Применение неравенств симметризации не позволяет получить аналогичные Следствию 1 результаты для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных слагаемых. (В лучшем случае удается получить оценки для сумм, центрированных определенными условными математическими ожиданиями (см. [8])). Более того, без серьезных дополнительных предположений для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных слагаемых Следствие 1 не справедливо. Об этом говорит приводимый ниже простой пример.

Пример 1. *Пусть $X_i, : i \leq n$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, такие, что*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью} \quad 1-2^{-n}, \\ -2^n & \text{с вероятностью} \quad 2^{-n}-2^{-2n} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, $EX_i = 0$. Обозначим $A = \{\omega : \exists i \leq n, X_i \neq 1\}$. Тогда $P(A) \leq n2^{-n}$, и

$$P(t_n \neq \sqrt{n}) \leq P(A) \leq n2^{-n}.$$

Поэтому для $x < \sqrt{n}$ выполняется неравенство

$$P(t_n > x) > 1 - n2^{-n}.$$

Это неравенство, очевидно, противоречит неравенству (6), *а также неравенству* (4), *поскольку* (6) *является следствием* (4).

Различными аспектами асимптотического поведения самонормированных сумм занимаются в настоящее время многие математики. Отметим здесь только работы [9], [10], [11].

Что касается Теоремы 1 и Следствия 2, то неравенства симметризации позволяют получить для несимметричных случайных величин аналогичные, но более грубые, верхние оценки.

Действительно, согласно [12, стр. 260]

$$E|S_n - \mu S_n|^p \leq 2E|S_n^s|^p \leq C\left(\frac{p}{e}\right)^{p/2} E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - X_i')^2}\right)^p$$

$$\leq C\left(\frac{p}{e}\right)^{p/2} E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i'^2}\right)^p \leq C2^p ET_n^{p/2}.$$

Здесь $S_n^s = S_n - S_n'$ – симметризованная величина S_n, а X_n', и S_n' – независимые экземпляры X_n, и S_n – соответственно.

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$||S_n - \mu S_n||_p \leq C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}\sqrt{||T_n||_{p/2}}.$$

Поскольку $|\mu S_n| \leq \sqrt{2B_n}$, где $B_n = DS_n$, имеем

$$||S_n||_p \leq C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}\sqrt{||T_n||_{p/2}} + \sqrt{2B_n}.$$

Поскольку при $p > 2$ справедливо неравенство $B_n \leq ||T_n||_{p/2}$, имеем

$$||S_n||_p \leq \left(C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}} + \sqrt{2}\right)\sqrt{||T_n||_{p/2}}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^n$ *— независимые случайные величины, центрированные своими математическими ожиданиями. Пусть* $E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$. *Тогда*

$$||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \ C(p) = C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}} + \sqrt{2}, \tag{9}$$

где $C > 0$*— абсолютная постоянная.*

Легко видеть, что в этой теореме, увеличив немного постоянную C, можно положить $C(p) = C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}$.

В этой работе, используя новые комбинаторные методы, мы при дополнительных предположениях получаем аналогичные оценки с асимптотически оптимальными постоянными для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных величин.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^n$ *– независимые случайные величины,* $EX_k = 0$, $k = 1, 2, \dots n$. *Пусть* $ES_n^2 = B_n$, $p = p(n) \to \infty$ *и для некоторого* $\epsilon > 0$ *выполнено условие*

$$|X_k| < \epsilon \frac{\sqrt{B_n}}{p}. \tag{10}$$

Тогда

$$||S_n||_p < C(p) e^{\epsilon} \sqrt{\frac{pB_n}{e}}, \tag{11}$$

где $C(p) = C^{1/p} \exp\left(\frac{\ln p}{\sqrt{2p}}\right)$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Отметим, что, поскольку при $p \ge 2$ $B_n = ||T_n||_1 \le ||T_n||_{p/2}$, неравенство (11) можно рассматривать как частный случай как неравенства Марцинкевича, так и неравенства Розенталя.

Доказательство Теоремы 3. При $p = 2m$ рассмотрим многочлен степени n от исходных величин $X_j, j \le n$, который получается выбрасыванием из полиномиального разложения для $(S_n)^p$ слагаемых, содержащих хотя бы одну переменную X_j в первой степени. Обозначим этот полином через $S_{n,p}$. Обозначим через $Z_{n,p}$ аналогичный полином, построенный по модулям исходных величин. Тогда, очевидно,

$$ES_n^p = ES_{n,p} \le EZ_{n,p}. \tag{12}$$

Ниже будем предполагать, что случайные величины X_k нормированы величиной $\sqrt{B_n}$. Это означает, что выполнены условия

$$B_n = 1, \ |X_k| < \epsilon/p. \tag{13}$$

Далее,

$$Z_{n,p} = \sum_{i=1}^{p/2} \sum^{1} \sum^{2} \frac{(p!) X_{j_1}^{k_1} \cdots X_{j_i}^{k_i}}{k_1! \cdots k_i!}. \tag{14}$$

Здесь суммирование во второй сумме ведется по всем наборам $(j_1 < \ldots < j_i)$. Суммирование в третьей сумме ведется по всем $k_1, \ldots k_i$, которые больше единицы и для которых $\sum_{r=1}^{i} k_r = p$.

Обозначим отдельные слагаемые во внешней сумме через $Z_{n,p,i}$. Тогда легко видеть, что

$$EZ_{n,p,i} \leq \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=2}^{p} C_p^k EX_r^k E \sum \frac{((p-k)!) X_{j_1}^{k_1} \cdots X_{j_i}^{k_i}}{k_2! \ldots k_i!}. \tag{15}$$

Суммирование во внутренней сумме производится по всем $k_2 \ldots k_i$, большим единицы и для которых выполняется условие $\sum_{t=2}^{i} k_t = p - k$ и по всем $j_1 < \ldots < j_{i-1}$, не равным r.

Таким образом,

$$EZ_{n,p,i} \leq \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=2}^{p} C_p^k EX_r^k EZ_{n-1,p-k,i-1} \quad \{\text{без} \quad X_r\}.$$

Здесь запись $\{\text{без}\, X_r\}$ означает, что в формировании $Z_{n-1,p-k,i-1}$ не участвует переменная X_r. Положим $\overline{Z}_{n,p,i} = \max EZ_{s,l,j}$. Здесь максимум берется по $s \leq n, \ l \leq p, \ j \leq i, \ 0 \leq X_r \leq \epsilon$. Легко видеть, что этот максимум конечен.

Из последнего неравенства, формулы Тейлора, неравенства $(1+x) \leq \exp(x)$ для $x > 0$, и соотношений (13) следуют соотношения

$$\overline{Z}_{n,p,i} \leq \frac{1}{i} \overline{Z}_{n-1,p-2,i-1} E \sum_{r=1}^{n} ((1+X_r)^p - 1 - pX_r) \tag{16}$$

$$\leq \frac{1}{i} \overline{Z}_{n-1,p-2,i-1} \frac{p(p-1)}{2} (1 + \frac{\epsilon}{p})^{(p-2)} \sum_{r=1}^{n} EX_r^2$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2i}\exp(\epsilon)\overline{Z}_{n-1,p-2,i-1}.$$

Итерируя соотношение (16), получим

$$EZ_{n,p} \leq p/2 \max_{k\leq p/2} \frac{e^{k\epsilon}}{2^k}\frac{p!}{k!(p-2k)!}. \tag{17}$$

Обозначим

$$f_k = \frac{e^{k\epsilon}}{2^k}\frac{p!}{k!(p-2k)!}$$

Тогда

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{e^{\epsilon}(p-2k)(p-2k-1)}{k+1} \geq 1$$

тогда и только тогда, когда

$$4k^2 - 2(2p-1+e^{-\epsilon})k + p^2 - p - e^{-\epsilon} \geq 0.$$

Анализируя это квадратное неравенство, получим, что при $p \geq 3$ и при любом $\epsilon > 0$ значение f_k максимально при

$$k = K = \frac{p}{2} - \frac{1-e^{-\epsilon}}{4} - \frac{\sqrt{4pe^{-\epsilon}+1+e^{-2\epsilon}+8e^{-\epsilon}}}{4},$$

что можно для некоторого $\theta \in (0,1)$ записать в виде

$$k = K = \frac{p}{2}(1-\frac{\theta}{\sqrt{p}}).$$

Таким образом,

$$EZ_{n,p} \leq p/2\frac{e^{K\epsilon}}{2^K}\frac{p!}{K!(p-2K)!}.$$

Применяя к правой части этого неравенства формулу Стирлинга и полагая $p = 2m$, получим

$$EZ_{n,p} \leq C(\frac{p}{e^{(1-\epsilon)}})^{p/2}(\frac{m^{2\theta\sqrt{m}+3/2}\exp(\sqrt{m}(1-\epsilon))}{2^{\sqrt{m}\theta}\exp(-\sqrt{m}):\ \theta^{\theta\sqrt{m}}}).$$

Поэтому, после простых вычислений для всех достаточно больших m получим

$$EZ_{n,p} \leq Ce^{m\epsilon}(\frac{p}{e})^{p/2}\exp(\sqrt{m}\ln m)$$

равномерно по $\epsilon > 0$. Здесь $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Если $p > 2$ не является четным натуральным числом, то теорема следует из монотонности L^p–нормы: при $q > p$

$$||S_n||_p \leq ||S_n||_q \leq C(q)e^{\epsilon}\sqrt{\frac{pB_n}{e}}.$$

Остается взять в качестве q ближайшее к p четное число, большее p. В этом случае $C(q) \leq C^{1/p}C(p)$.

Следствие 3. *В условиях Теоремы* (3) *при* $x > 0$

$$P(S_n > x\sqrt{B_n}) < Cx^{x\sqrt{2}} \exp{(-\frac{x^2(1-2\epsilon)}{2})}. \tag{18}$$

Доказательство. Из неравенства Чебышева и Теоремы 3 следует

$$P(S_n > x\sqrt{B_n}) < \frac{E|S_n|^p}{x^p B_n^{p/2}} \leq C \exp\left(\sqrt{\frac{p}{2}} \ln p\right) \frac{p^{p/2}}{e^{p/2}x^p} e^{p\epsilon}.$$

Следствие получается из этого неравенства при $p = x^2$.

Замечание 1. Применив это неравенство при $x^2 = p = (1+\delta)^2 2lnlnB_n$ и при $\epsilon = \epsilon_n \to 0$, получим, что в условиях известной теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма для любого $\delta > 0$ при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$P(S_n > (1+\delta)\sqrt{2B_n lnlnB_n}) < C(lnB_n)^{(1+\delta/2)}.$$

Из этого неравенства по стандартной схеме выводятся верхние оценки в законе повторного логарифма. Таким образом, в этом случае наши оценки заменяют верхние показательные оценки Колмогорова, обычно используемые при доказательстве закона повторного логарифма,что указывает на их, в определенном смысле, оптимальность.

Замечание 2. Легко видеть, что все приведенные результаты, за исключением результатов для самонормированных сумм, останутся справедливы, если условие независимости исходных случайных величин заменить следующим условием.

$$X_n \perp \prod_1^K X_{j_k}$$

для любых n, K и для любых наборов индексов $j_1, \dots, j_k$, не содержащих n.

Замечание 3. Перенос результатов о самонормированных суммах, полученных для симметричных слагаемых, на общий случай независимых центрированных случайных величин и поиск разумных дополнительных условий, при которых этот перенос можно осуществить, остается пока открытой задачей.

Литература

1. A. N. Kolmogoroff, *Úeber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhángiger Gróssen.* — Math. Ann. **99** (1928), **102** (1929).
2. С. Н. Бернштейн, *Теория вероятностей.* Гостехиздат, М.-Л. (1946).
3. W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* — J. Amer. Statist. Assos. **58**, No. 301 (1963), 13–30.
4. G. Bennet, *Probability inequalities for the sum of independent random variables.* — J. Amer. Statist. Assos. **57**, No. 297 (1962), 33–45.
5. Д. Ф. Фук, С. В. Нагаев, *Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения **21**, No. 4 (1971), 660–675.
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М. (1987).
8. V. Egorov, *On the growth rate of moments of random sums.* — PUB. IRMA**44**, No. IV (1997), 1–8.
9. В. А. Егоров, *Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения **41**, No. 3 (1996), 643–650.
10. E. Gine, F. Götze, D. M. Mason, *When is the Student-Statistics asymptotically standard normal?.* — Ann. Probab. **25**, 1514-1531.
11. B. Y. Jing, Q. M. Shao, Q. Wang, *Self-normolized Cramer-type large deviations for independent random values.* — - Ann. Probab. **31**, No. 4 (2003), 2167–2215.
12. М. Лоэв, *Теория вероятностей.* ИЛ, М. (1962).

Egorov V. A. Estimation of constants for the right-hand inequalities of Marcinkiewicz and Rosenthal.

Some optimal asymptotic estimates of constants for the right-hand inequalities of Marcinkiewicz and Rosenthal are derived. This estimates imply some new inequalities for the rate of increasing of sums and optimal right-hand estimates for the law of the iterated logarithm. Similar estimates are derived for self-normolized sums.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

E-mail: eva@eva.usr.etu.spb.ru

Поступило 14 ноября 2006 г.