Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

В. В. Высоцкий

ПЛОЩАДЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ И ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

1. Введение

Рассмотрим случайное блуждание S_i с положительными приращениями. Величину $\sum_{i=1}^k S_i$ назовем его *k-шаговой площадью*. Мы изучаем k-шаговые площади экспоненциального блуждания S_i, то есть случайного блуждания со стандартными экспоненциальными приращениями.

Для нормировки естественно каждую из k-шаговых площадей разделить на ее ожидание $\mathbb{E}\sum_{i=1}^k S_i = \frac{k(k+1)}{2}$. Рассмотрим величину $\inf\limits_{k\geqslant 1} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k S_i$, изучению которой и посвящена данная работа. Нашей целью является нахождение вероятностей

$$G(t) := \mathbb{P}\left\{\inf_{k\geqslant 1} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k S_i \geqslant t\right\}.$$

Правую часть можно переписать в более приятном виде

$$G(t) = \mathbb{P}\left\{\inf_{k\geqslant 1} \sum_{i=1}^k \bigl(S_i - it\bigr) \geqslant 0\right\},$$

в котором она становится похожа на вероятность разорения.

Функция $G(t)$ возникает при изучении так называемой модели *слипающихся частиц*. Дадим краткое описание этой модели. Мы рассматриваем систему из n одинаковых частиц, с весом n^{-1} каждая. В начальный момент неподвижные частицы случайно разбросаны по прямой. Затем они начинают двигаться под действием сил взаимного притяжения. При столкновениях частицы *слипаются*, образуя новую частицу – “*кластер*”, характеристики которого определяются законами сохранения массы и импульса.

Работа частично поддержана грантом НШ-4222.2006.1.

Между столкновениями частицы движутся в соответствии с законами классической механики.

Мы предполагаем, что сила притяжения не зависит от расстояния и равняется произведению масс, что естественно для всех одномерных моделей. Таким образом, ускорение каждой частицы равно разности суммарных масс частиц, находящихся справа и слева от указанной частицы.

Существуют две естественные и часто используемые модели случайных начальных положений. В *равномерной модели* n частиц равномерно и независимо располагаются на отрезке $[0,1]$. В *пуассоновской модели* частицы находятся в точках первых n скачков пуассоновского процесса интенсивности n (то есть стандартного пуассоновского процесса, умноженного на n^{-1}).

Более подробно о системах слипающихся частиц можно узнать из работ [1, 3, 4] и [5].

Условимся термин "частица" употреблять только по отношению к исходным частицам, а "кластером" будем называть не только продукт столкновения, но также и любую исходную частицу, не испытавшую столкновений. Таким образом, в любой момент времени $t > 0$ рассматриваемая система состоит из кластеров, а каждый кластер содержит одну или более частицу. С ходом времени кластеры слипаются друг с другом, размер кластеров увеличивается, а число их уменьшается. Затем наступает момент, когда все кластеры слипаются в один большой кластер, содержащий все (исходные) частицы.

Обозначим $K_n(t)$ число кластеров в момент времени t в системе из n частиц. Как мы уже объяснили, это случайная ступенчатая функция, убывающая (по t) от своего начального значения n до 1. Задачей, которая и приводит к рассмотрению функции $G(t)$, является нахождение асимптотики $K_n(t)$ при $n \to \infty$. Этот вопрос был впервые изучен в работе [1], в которой автор доказал следующее утверждение. В равномерной и пуассоновской моделях начальных положений, для любого $t \geqslant 0$ выполняется

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} K(t), \quad n \to \infty,$$

где $K(t)$ – это неслучайная функция, удовлетворяющая соотношению $K(t) = e^{t^2}\big(G(t^2)\big)^2$. Основываясь на компьютерном моделировании, автор предположил, что $K(t) = 1 - t^2$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Формула

$$G(t) = \mathbb{P}\left\{\inf_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\bigl(S_i - it\bigr) \geqslant 0\right\} = \sqrt{1-t}\,e^{-t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (1)$$

являющаяся основным результатом данной статьи, убеждает нас в справедливости высказанного предположения. Изучение этого вопроса было вызвано не только желанием доказать загадочную формулу (1), но и необходимостью проверить различные свойства $K(t)$, понадобившиеся автору при дальнейшем изучении $K_n(t)$. Новые результаты о числе кластеров будут вскоре опубликованы.

Заметим, что в силу хорошо известного соотношения между экспоненциальным случайным блужданием и порядковыми статистиками, $G(t)$ представимо в виде

$$G(t) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{2n}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}U_{i,n} \geqslant t\right\},$$

где $U_{i,n}$ означают порядковые статистики n независимых равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин. Строго это утверждение будет доказано в конце §4. Таким образом, функция $G(t)$ тесно связана с частичными суммами порядковых статистик.

Наше доказательство формулы (1) устроено следующим образом. В §2 и §3 мы изучим свойства функций

$$G_n(t) := \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{2}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}S_i \geqslant t\right\},$$

сходящихся к $G(t)$. Мы докажем, что $G_n(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $G_n'(t)$ равномерно сходятся. Следовательно, $G(t)$ тоже непрерывно дифференцируема. Кроме того, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $G(t)$, но правая часть этого уравнения будет представлена в виде суммы ряда с неизвестными коэффициентами. В §4 мы найдем эти коэффициенты, решим дифференциальное уравнение и получим (1).

2. “Частичные плотности” и непрерывность $G(t)$

Для записи многомерных величин будем использовать **жирный шрифт**. Размерность этих величин указывается при помощи индекса (например, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$), который мы будем по возможности опускать. Координаты величины $\mathbf{x}_n$ всегда обозначаются как $x_1, \ldots, x_n$. Наконец, за $\mathbf{0} = \mathbf{0}_n$ и $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ обозначим $(0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ и $(1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ соответственно.

Пусть X_i – это приращения экспоненциального случайного блуждания $S_i = X_1 + \cdots + X_i$, то есть независимые случайные величины, имеющие стандартное экспоненциальное распределение. Поскольку для $Y_k := \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k S_i$ имеем $Y_k = \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k (k - i + 1) X_i$, величины $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ получаются из $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ линейным преобразованием $\mathbf{Y}_n = A_n \mathbf{X}_n$, где

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & \ldots & 0 \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{2n}{n(n+1)} & \frac{2(n-1)}{n(n+1)} & \frac{2(n-2)}{n(n+1)} & \ldots & \frac{2}{n(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Матрица A_n невырождена и имеет обратную матрицу $L_n := A_n^{-1}$. А так как для $k \geqslant 3$

$$\begin{aligned} X_k = S_k - S_{k-1} &= \left(\sum_{i=1}^k S_i - \sum_{i=1}^{k-1} S_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} S_i - \sum_{i=1}^{k-2} S_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k S_i - 2 \sum_{i=1}^{k-1} S_i + \sum_{i=1}^{k-2} S_i \\ &= \frac{k(k+1)}{2} Y_k - (k-1)k\, Y_{k-1} + \frac{(k-2)(k-1)}{2} Y_{k-2}, \end{aligned}$$

то, обозначая

$$l_k := \frac{k(k+1)}{2},$$

получаем

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 10 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2l_{n-2} & l_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{n-2} & -2l_{n-1} & l_n \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы три ненулевые диагонали, сумма элементов в каждой строке равна единице, а сумма элементов в каждом столбце, за исключением двух последних, равна нулю.

Так как $L\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n \geqslant \mathbf{0}$ (где $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ означает покоординатные неравенства), распределение $\mathbf{Y}_n = A\mathbf{X}_n$ сосредоточено на n-мерном конусе $\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_n \colon L\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n_+$. Поэтому, обозначив за $p(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{y})$ плотность случайного вектора $\mathbf{Y}_n$, находим

$$p_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}) = |\det A^{-1}| p_{\mathbf{X}_n}(A^{-1}\mathbf{y}) = \frac{n!(n+1)!}{2^n} \exp\{-(L\mathbf{y}, \mathbf{1})\}\, \mathbb{I}_{\{L\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\}}.$$

Теперь, учитывая что сумма элементов во всех столбцах L, кроме двух последних, равна нулю, а суммы элементов в последнем и предпоследнем столбцах равны $l_n = \frac{n(n+1)}{2}$ и $-l_{n-1} = -\frac{(n-1)n}{2}$ соответственно, получаем

$$p(\mathbf{y}_n) = \frac{n!(n+1)!}{2^n} e^{-\frac{n(n+1)}{2} y_n + \frac{(n-1)n}{2} y_{n-1}} \cdot \mathbb{I}_{\{L\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\}}. \tag{2}$$

Нет ничего удивительного в том, что плотность $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ зависит только от Y_{n-1} и Y_n. В самом деле, ведь $\frac{n(n+1)}{2} Y_n - \frac{(n-1)n}{2} Y_{n-1} = S_n$, а плотность независимых экспоненциально распределенных величин $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)^\top$ зависит только от S_n.

Теперь запишем

$$G_n(t) = \mathbb{P}\Big\{\min_{1 \leqslant k \leqslant n} Y_k \geqslant t\Big\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big\{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i = Y_k, Y_k \geqslant t\Big\}, \tag{3}$$

а для $1 \leqslant k \leqslant n$ определим

$$g_n^{(k)}(t) := \int\limits_{\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_n : \mathbf{y} \geqslant t\mathbf{1},\, y_k = t\}} p(\mathbf{y})\, d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}), \tag{4}$$

где λ_{n-1} означает меру Лебега на $(n-1)$-мерном множестве $\big\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_n : \mathbf{y} \geqslant t\mathbf{1},\ y_k = t\big\}$. По теореме Лебега, для п.в. t имеем

$$g_n^{(k)}(t) = -\mathbb{P}\Big\{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i = Y_k, Y_k \geqslant t\Big\}', \tag{5}$$

в котором правая часть определена п.в. Следовательно, $G_n(t)$ дифференцируемы п.в., и

$$G_n'(t) = -\sum_{k=1}^{n} g_n^{(k)}(t) \tag{6}$$

для п.в. t.

Величину $g_n^{(k)}(t)$ назовем k-ой *частичной плотностью* случайной величины $\min_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k$. В следующем параграфе мы покажем, что частичные плотности непрерывны, из чего вытекает, что (5) и (6) справедливы для *любого* t, а $G_n(t)$ дифференцируемы.

Чтобы получить более удобное представление для частичных плотностей, произведем замену переменных $\mathbf{y} = t(\mathbf{z}+\mathbf{1})$ в (4). Используя (2), получаем

$$g_n^{(k)}(t) = \frac{n!(n+1)!}{2^n} t^{n-1} e^{-nt} \int\limits_{\substack{\{\mathbf{z}=\mathbf{z}_n : L\mathbf{z}\geqslant -\mathbf{1},\\ \mathbf{z}\geqslant \mathbf{0},\, z_k=0\}}} e^{-\frac{n(n+1)}{2}tz_n + \frac{(n-1)n}{2}tz_{n-1}} d\lambda_{n-1}(\mathbf{z}). \quad (7)$$

Неравенство $L\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ преобразовалось в $L\mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1}$, поскольку у матрицы L сумма элементов в каждом ряду равна единице.

Завершим параграф следующим утверждением.

Предложение 1. *Для любого $\varepsilon \in (0,1)$, $G_n(t)$ сходятся к $G(t)$ равномерно на $[0, 1-\varepsilon]$. Предельная функция $G(t)$ непрерывна на $[0,1)$.*

Доказательство. Так как

$$G_n(t) = \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{i=1}^{k} (S_i - it) \geqslant 0\right\},$$

имеем

$$\begin{aligned} G_n(t) - G(t) &= \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{i=1}^{k}(S_i - it) \geqslant 0, \inf_{k>n} \sum_{i=1}^{k}(S_i - it) < 0\right\} \\ &< \mathbb{P}\left\{\inf_{k>n} \sum_{i=n+1}^{k} (S_i - it) < 0\right\} \\ &< \mathbb{P}\left\{\exists\, i > n : S_i - it < 0\right\}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon} \left|G_n(t) - G(t)\right| < \sup_{0\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon} \mathbb{P}\left\{\inf_{i>n} \frac{S_i}{i} < t\right\} = \mathbb{P}\left\{\inf_{i>n} \frac{S_i}{i} < 1-\varepsilon\right\},$$

правая часть которого стремится к нулю по усиленному закону больших чисел.

Из (4) и (6) видно, что $G_n(t)$ (абсолютно) непрерывны, поэтому и $G(t)$ непрерывна на $[0,1)$ как равномерный предел непрерывных. □

3. Свойства "частичных плотностей" и дифференцируемость $G(t)$

В этом параграфе мы докажем несколько важных свойств частичных плотностей $g_n^{(k)}(t)$. Сперва сформулируем вспомогательные леммы 1, 2 и 3, а затем докажем дифференцируемость $G(t)$ в предложении 2. Леммы будут доказаны ниже.

Лемма 1. *Для любого $n \geqslant 1$,*

$$g_{n+1}^{(1)}(t) = G_n(t)e^{-t}.$$

Лемма 2. *Для любых $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$g_n^{(k)}(t) = c_k \big(te^{-t}\big)^{k-1} g_{n-k+1}^{(1)}(t),$$

где $\{c_k\}_{k\geqslant 1}$ – некоторые положительные константы, удовлетворяющие $c_k = O\big(\sqrt{k}\, e^k\big)$.

Лемма 3. *Функции $g_n^{(n)}(t)$ непрерывны. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$, $g_n^{(n)}(t)$ сходятся к 0 равномерно на $[0, 1-\varepsilon]$.*

Предложение 2. *Функции $G_n(t)$ непрерывно дифференцируемы. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$, $G_n'(t)$ сходятся к $-G(t)e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(te^{-t}\big)^{k-1}$ равномерно на $[0, 1-\varepsilon]$. Функция $G(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1)$ и*

$$G'(t) = -G(t)e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \big(te^{-t}\big)^{k-1}, \quad t \in [0,1).$$

Доказательство предложения 2. С учетом (3), (4) и (5), непрерывная дифференцируемость $G_n(t)$ вытекает из непрерывности частичных плотностей. Последняя частичная плотность $g_n^{(n)}(t)$ непрерывна по лемме 3. Используя леммы 1 и 2, получаем

$$g_n^{(k)}(t) = c_k \big(te^{-t}\big)^{k-1} G_{n-k}(t)e^{-t}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{8}$$

в котором $G_{n-k}(t)$ непрерывны по предложению 1, и поэтому $g_n^{(k)}(t)$ также непрерывны. Теперь мы знаем, что (5) и (6) справедливы для *всех* t.

Далее, $\left(te^{-t}\right)' = (1-t)e^{-t} \geqslant 0$ на $[0,1]$, и значит $te^{-t} < 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$ при $t \in [0,1)$. Сопоставляя последнее неравенство с оценкой роста c_k из леммы 2, мы видим, что $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1}$ сходится на $[0,1)$. Разумеется, эта сходимость равномерна на $[0,1-\varepsilon]$.

Напомним, что $1 \geqslant G_n(t) \searrow G(t) \geqslant 0$ для любого t. Теперь из (6) (которое выполняется для всех t) и (8) получаем

$$
\begin{aligned}
&\left|-G(t)e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1} - G_n'(t)\right| \\
&\leqslant e^{-t} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1} \left(G_{n-k}(t) - G(t)\right) \\
&\qquad + e^{-t} G(t) \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1} + g_n^{(n)}(t) \\
&\leqslant \left(G_{n/2}(t) - G(t)\right) \sum_{k=1}^{n/2} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1} + \sum_{k=n/2+1}^{\infty} c_k \left(te^{-t}\right)^{k-1} + g_n^{(n)}(t).
\end{aligned}
$$

Последнее стремится к нулю равномерно по $t \in [0,1-\varepsilon]$: третье слагаемое – по лемме 3, второе является остатком равномерно сходящегося ряда, а первое – по предложению 1. □

Доказательство леммы 1. Величина $Y_1 = X_1$ имеет стандартное экспоненциальное распределение, поэтому

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}^{(1)}(t) &= -\mathbb{P}\Big\{\min_{1 \leqslant k \leqslant n+1} Y_k = Y_1, Y_1 \geqslant t\Big\}' \\
&= -\mathbb{P}\Big\{\min_{2 \leqslant k \leqslant n+1} Y_k \geqslant Y_1, Y_1 \geqslant t\Big\}' \\
&= -\left(\int_t^{\infty} \mathbb{E}\Big\{\min_{2 \leqslant k \leqslant n+1} Y_k \geqslant Y_1 \Big| Y_1 = s\Big\}\, d\mathbb{P}\{Y_1 < s\}\right)' \\
&= \mathbb{E}\Big\{\min_{2 \leqslant k \leqslant n+1} Y_k \geqslant Y_1 \Big| Y_1 = t\Big\}\, e^{-t}
\end{aligned}
$$

для п.в. t. После несложных преобразований

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\{\min_{2\leqslant k\leqslant n+1} Y_k \geqslant Y_1 \Big| Y_1 = t\Big\}\\
&= \mathbb{E}\Big\{\forall\, 2\leqslant k\leqslant n+1,\ \frac{2}{k(k+1)}\\
&\qquad \times \Big(kX_1 + (k-1)X_2 + \dots + X_k\Big) \geqslant X_1 \Big| X_1 = t\Big\}\\
&= \mathbb{E}\Big\{\forall\, 2\leqslant k\leqslant n+1,\ \frac{2}{k(k+1)}\\
&\qquad \times \Big((k-1)X_2 + \dots + X_k\Big) \geqslant \Big(1-\frac{2}{k+1}\Big)X_1 \Big| X_1 = t\Big\},
\end{aligned}$$

воспользуемся независимостью X_i и получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\{\min_{2\leqslant k\leqslant n+1} Y_k \geqslant Y_1 \Big| Y_1 = t\Big\}\\
&\qquad = \mathbb{P}\Big\{\forall\, 2\leqslant k\leqslant n+1,\ \frac{2}{(k-1)k}\Big((k-1)X_2 + \dots + X_k\Big) \geqslant t\Big\}.
\end{aligned}$$

Правая часть этого выражения равна $G_n(t)$. Наконец, поскольку $G_n(t)$ непрерывна (по предложению 1), условное математическое ожидание также непрерывно, откуда следует, что все приведенные рассуждения справедливы для *всех* t. $\square$

Доказательство леммы 2. Случай $k = 1$ тривиален, положим $c_1 := 1$. Будем теперь считать, что $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Пусть M – произвольная матрица размера $l \times m$. Через $M^{\{i_1,\dots,i_r;j_1,\dots,j_s\}}$ (где $r \leqslant l$, $s \leqslant m$ и $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant l$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_s \leqslant m$) обозначим матрицу размера $(l-r)\times(m-s)$, которая получается из M стиранием строк $i_1,\dots,i_r$ и столбцов $j_1,\dots,j_s$. Для многомерных величин мы будем использовать аналогичные обозначения.

Рассмотрим множество $\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_n : L\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0},\ y_k = 0\}$, по которому ведется интегрирование в формуле (7). Мы покажем, что первые $k-1$ координат и последние $n-k$ координат любого элемента из этого множества удовлетворяют независимым неравенствам. Более точно, для любого $2 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_n : L\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0},\ y_k = 0\}\\
&= \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{k-1} : L_k^{\{\varnothing;k\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{k-1},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{k-1}\} \times \{0\}\\
&\times \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-k} : L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{n-k}\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $L_k^{\{\varnothing;k\}}$ – это матрица размера $k\times(k-1)$, состоящая из элементов левого верхнего "угла" L_n, а $L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}}$ – матрица размера $(n-k-1)\times(n-k)$, которая состоит из элементов правого нижнего "угла" L_n.

Для любого $\mathbf{y}\in\{\mathbf{y}=\mathbf{y}_n : L\mathbf{y}\geqslant -\mathbf{1},\,\mathbf{y}\geqslant \mathbf{0},\,y_k=0\}$, величина $\mathbf{y}^{\{k\}}$ удовлетворяет неравенствам $L_n^{\{\varnothing;k\}}\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant -\mathbf{1}_{n-1}$ и $\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant \mathbf{0}_{n-1}$. Но из $\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant \mathbf{0}_{n-1}$ вытекает, что $(k+1)$-е из неравенств $L_n^{\{\varnothing;k\}}\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant -\mathbf{1}_{n-1}$, то есть $\frac{(k-1)k}{2}y_{k-1}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}y_{k+1}\geqslant -1$, выполняется автоматически. Поэтому, стирая в матрице $L_n^{\{\varnothing;k\}}$ строку $k+1$,

$$\begin{aligned}&\left\{L_n^{\{\varnothing;k\}}\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant -\mathbf{1}_{n-1},\,\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant \mathbf{0}_{n-1}\right\}\\ =&\left\{L_n^{\{k+1;k\}}\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant -\mathbf{1}_{n-1},\,\mathbf{y}^{\{k\}}\geqslant \mathbf{0}_{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

У L_n три ненулевые диагонали, отсюда матрица

$$L_n^{\{k+1;k\}}=\begin{pmatrix}L_k^{\{\varnothing;k\}} & 0\\ 0 & L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}}\end{pmatrix}$$

– блочная. Последнее означает, что ограничения на $y_1,\dots,y_{k-1}$ и $y_{k+1},\dots,y_n$ независимы, что равносильно (9).

Теперь, определив

$$\begin{aligned}P_m&:=\left\{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{m-1}:L_m^{\{\varnothing;m\}}\mathbf{y}\geqslant -\mathbf{1}_{m-1},\,\mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}_{m-1}\right\},\quad m\geqslant 2\\ v_m&:=\lambda_{m-1}(P_m),\\ c_m&:=2^{-m}m!(m+1)!v_m,\end{aligned}\tag{10}$$

воспользуемся (9) и теоремой Фубини, чтобы переписать (7) в более простой форме. Для $k=n-1$ мы получим

$$g_n^{(n-1)}(t)=\frac{n!(n+1)!}{2^n}t^{n-1}e^{-nt}v_{n-1}\int\limits_{\{y\geqslant 0\}}e^{-\frac{n(n+1)}{2}ty}\,d\lambda_1(y),\tag{11}$$

а для $2\leqslant k\leqslant n-2$ получим

$$\begin{aligned}g_n^{(k)}(t)&=\frac{n!(n+1)!}{2^n}t^{n-1}e^{-nt}v_k\\ &\times\int\limits_{\substack{\{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n-k}:L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}}\mathbf{y}\geqslant -\mathbf{1}_{n-k},\\ \mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}_{n-k}\}}}e^{-\frac{n(n+1)}{2}ty_{n-k}+\frac{(n-1)n}{2}ty_{n-k-1}}\,d\lambda_{n-k}(\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{12}$$

В более простом случае $k = n-1$, проинтегрировав равенство (11), найдем

$$g_n^{(n-1)}(t) = c_{n-1} t^{n-2} e^{-nt}. \tag{13}$$

Но по лемме 1 $g_2^{(1)}(t) = e^{-2t}$, и доказательство завершено.

В более сложном случае $2 \leqslant k \leqslant n-2$ мы воспользуемся (7) и запишем

$$g_{n-k+1}^{(1)}(t) = \frac{(n-k+1)!(n-k+2)!}{2^{n-k+1}} t^{n-k} e^{-(n-k+1)t}$$
$$\times \int\limits_{\substack{\{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{n-k+1}: L\mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1},\\ \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0},\, z_1=0\}}} e^{-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} t z_{n-k+1} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} t z_{n-k}} \, d\lambda_{n-k}(\mathbf{z}). \tag{14}$$

Пусть $\mathbf{z}$ – произвольный элемент множества, по которому ведется интегрирование. Тогда $\mathbf{z}^{\{1\}}$ удовлетворяет неравенствам $L_{n-k+1}^{\{\varnothing;1\}} \mathbf{z}^{\{1\}} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k}$ и $\mathbf{z}^{\{1\}} \geqslant \mathbf{0}_{n-k}$. Но первое из неравенств $L_{n-k+1}^{\{\varnothing;1\}} \mathbf{z}^{\{1\}} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k}$, то есть $0 \geqslant -1$, выполняется всегда, а второе, $3z_2 \geqslant -1$, следует из $\mathbf{z}^{\{1\}} \geqslant \mathbf{0}_{n-k}$. Значит,

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{z} = \mathbf{z}_{n-k+1} : L_{n-k+1}\mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1},\, \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0},\, z_1 = 0\} \\ &= \{0\} \times \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_{n-k} : L_{n-k+1}^{\{1,2;1\}} \mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k},\, \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_{n-k}\}, \end{aligned}$$

и преобразовав интеграл в (14), мы получаем

$$g_{n-k+1}^{(1)}(t) = \frac{(n-k+1)!(n-k+2)!}{2^{n-k+1}} t^{n-k} e^{-(n-k+1)t} \tag{15}$$
$$\times \int\limits_{\{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{n-k}: L_{n-k+1}^{\{1,2;1\}} \mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k}, \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_{n-k}\}} e^{-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} t z_{n-k} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} t z_{n-k-1}} \, d\lambda_{n-k}(\mathbf{z}).$$

Сравним теперь (12) и (15). Конечно, интегралы в этих формулах выглядят громоздко, но на самом деле они получаются друг из друга при помощи очень простой замены переменных. Напомним, что

$$L_{n-k+1}^{\{1,2;1\}} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & -12 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2l_{n-k} & l_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

и

$$L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}} = \begin{pmatrix} -2l_{k+1} & l_{k+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{k+1} & -2l_{k+2} & l_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2l_{n-1} & l_n \end{pmatrix}.$$

Через $J_m^{s\mapsto i}$, где $i, s, m \geqslant 1$, обозначим диагональную матрицу размера $m \times m$, на диагонали которой стоят числа $\frac{l_i}{l_s}, \frac{l_{i+1}}{l_{s+1}}, \dots, \frac{l_{i+m-1}}{l_{s+m-1}}$ (начиная с левого верхнего угла). Тогда

$$L_{n-k+1}^{\{1,2;1\}} = L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}} J_{n-k}^{k+1\mapsto 2}, \tag{16}$$

поскольку умножение справа на $J_{n-k}^{k+1\mapsto 2}$ умножает первый столбец $L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k\}}$ на $\frac{l_2}{l_{k+1}} = \frac{3}{l_{k+1}}$, второй – на $\frac{l_3}{l_{k+2}} = \frac{6}{l_{k+2}}$, и т.д.

Теперь легко видеть, что замена $\mathbf{z} = \left(J_{n-k}^{k+1\mapsto 2}\right)^{-1}\mathbf{y}$ преобразует интеграл из (15) в интеграл из (12), домноженный на $\left|\det\left(J_{n-k}^{k+1\mapsto 2}\right)^{-1}\right|$. Но

$$\det J_m^{s\mapsto i} = \frac{(s-1)!s!(i+m-1)!(i+m)!}{(i-1)!i!(s+m-1)!(s+m)!}, \tag{17}$$

и из равенств (12) и (15),

$$\frac{g_n^{(k)}(t)}{g_{n-k+1}^{(1)}(t)} = \frac{\frac{n!(n+1)!}{2^n} t^{n-1} e^{-nt} v_k}{\det\left(J_{n-k}^{k+1\mapsto 2}\right)^{-1} \cdot \frac{(n-k+1)!(n-k+2)!}{2^{n-k+1}} t^{n-k} e^{-(n-k+1)t}}$$

$$= \frac{k!(k+1)!v_k}{2^k} t^{k-1} e^{-(k-1)t}.$$

Чтобы завершить доказательство леммы, нам осталось проверить, что $c_k = O\left(\sqrt{k}\, e^k\right)$. Из (13) мы находим $g_{k+1}^{(k)}(t) = c_k t^{k-1} e^{-(k+1)t}$, и интегрируя от 0 до ∞, получаем

$$\mathbb{P}\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_i = Y_k\Big\} = c_k \frac{(k-1)!}{(k+1)^k}.$$

Отсюда $c_k < \frac{(k+1)^k}{(k-1)!}$, и применив формулу Стирлинга,

$$\begin{aligned} c_k &\leqslant C\,\frac{(k+1)^k e^{k-1}}{(k-1)^{k-1}\sqrt{2\pi(k-1)}} \\ &= C\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{k-1}\frac{k+1}{\sqrt{2\pi(k-1)}}e^{k-1} = O\big(\sqrt{k}\,e^k\big). \end{aligned}$$

□

Доказательство леммы 3. В обозначениях (10) формула (7) примет вид

$$g_n^{(n)}(t) = \frac{n!(n+1)!}{2^n}t^{n-1}e^{-nt}\int\limits_{P_n} e^{\frac{(n-1)n}{2}ty_{n-1}}d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}_{n-1}). \tag{18}$$

Напомним что, во-первых, $\mathbf{y}_{n-1} \in P_n$ влечет $\mathbf{y}_{n-1} \geqslant \mathbf{0}$, а во-вторых, из доказательства леммы 2 мы знаем, что $P_n \subset \mathbb{R}^{n-1}$ имеет конечный объем. Значит, P_n ограничено, поскольку это множество является пересечением полупространств; другое доказательство ограниченности P_n будет получено при доказательстве леммы 4 из следующего параграфа.

Теперь ясно, что $g_n^{(n)}(t)$ непрерывны. Далее, так как $y_{n-1} \geqslant 0$ для $\mathbf{y}_{n-1} \in P_n$, интеграл в (18) возрастает по t. А из $\big(t^{n-1}e^{-nt}\big)' = t^{n-2}e^{-nt}\big((n-1)-nt\big)$ мы заключаем, что $g_n^{(n)}(t)$ возрастает (по t) на отрезке $[0, \frac{n-1}{n}]$ как минимум. Теперь предположим, что n таково, что $\frac{n-1}{n} \geqslant 1-\varepsilon/2$. Тогда $g_n^{(n)}$ возрастает на $[0, 1-\varepsilon/2]$, и по (5) (которое выполнено для всех t),

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon} g_n^{(n)}(t) = g_n^{(n)}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{1-\varepsilon}^{1-\varepsilon/2} g_n^{(n)}(s)ds \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\,\mathbb{P}\Big\{Y_n \leqslant 1-\varepsilon/2\Big\}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, $Y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n S_i \longrightarrow 1$ п.н., так как $S_n \longrightarrow 1$ п.н. по усиленному закону больших чисел. □

4. Дифференциальное уравнение для $G(t)$

Из предложения 2 мы знаем, что $G(t)$ является решением

$$\begin{cases} G'(t) = -G(t)t^{-1}f\big(te^{-t}\big), & t \in [0,1) \\ G(0) = 1, \end{cases} \tag{19}$$

где через $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ обозначена производящая функция c_k. По лемме 2, указанный ряд сходится при $|x| < e^{-1}$. Сейчас мы сформулируем лемму 4, которая незаменима при нахождении $f(x)$, а затем найдем $G(t)$ в предложении 3.

Лемма 4. *Для любого $n \geqslant 2$,*

$$c_n = \frac{n(n+1)}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k c_{n-k}}{(k+1)(n-k+1)},$$

а $c_1 = 1$.

Предложение 3. *Функция $G(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\begin{cases} G'(t) = \frac{t-2}{2(1-t)} G(t), \quad t \in [0,1) \\ G(0) = 1, \end{cases} \tag{20}$$

единственное решение которого на отрезке $[0,1)$ есть $\sqrt{1-t}e^{-t/2}$.

Доказательство предложения 3. Рассмотрим величины $b_n := \frac{c_n}{n+1}$. Их производящая функция $h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ удовлетворяет соотношениям

$$\big(xh(x)\big)' = f(x), \quad |x| < e^{-1} \tag{21}$$

и $h(0) = 0$. Напоминаем, что сумму степенного ряда можно дифференцировать почленно внутри радиуса сходимости.

При помощи леммы 4 мы заключаем, что $b_n = \frac{n}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$ при $n \geqslant 2$, а $b_1 = 1/2$. Отсюда при $|x| < e^{-1}$,

$$h^2(x) = \big(b_1 x + b_2 x^2 + \dots\big)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} x^n,$$

и, дифференцируя, находим:

$$2h(x)h'(x) = h'(x) - \frac{h(x)}{x}, \quad |x| < e^{-1}.$$

Теперь

$$\begin{cases} \frac{2h-1}{h} h' = -\frac{1}{x}, \qquad |x| < e^{-1} \\ h'(0) = b_1 = 1/2, \end{cases}$$

и приняв во внимание положительность h при $x>0$, мы получаем

$$2h-\ln h=-\ln x+C,\quad 0\leqslant x<e^{-1}.$$

Отсюда

$$\ln 2h-2h=\ln x+C',\quad 0\leqslant x<e^{-1},$$

$$2he^{-2h}=C''x,\quad 0\leqslant x<e^{-1},$$

а учитывая что $h'(0)=1/2$, имеем $C''=1$. Поскольку функция $q(x):=xe^{-x}$ обратима на $[0,1]$, мы находим

$$h(x)=\frac{q^{-1}(x)}{2},\quad 0\leqslant x<e^{-1}.$$

Наконец, вспоминая (21), заключаем

$$f(te^{-t})=f(q(t))=h(q(t))+q(t)h'(q(t))=h(q(t))+q(t)\frac{h(q(t))'}{q'(t)}$$

$$=\frac{t}{2}+te^{-t}\frac{1/2}{(1-t)e^{-t}}=\frac{2-t}{2(1-t)}t,\quad t\in[0,1).$$

Осталось лишь учесть (19), из которого следует, что $G(t)$ является решением (20).

Решим теперь дифференциальное уравнение (20). В силу равенства $\frac{t-2}{2(1-t)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1-t)}$ мы получаем

$$\begin{cases}\ln G(t)=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(1-t)+C,\quad t\in[0,1)\\ G(0)=1.\end{cases}$$

Но $C=0$, и поэтому $G(t)=\sqrt{1-t}\,e^{-t/2}$ на $[0,1)$. Конечно же, это равенство справедливо и на всем $[0,1]$. $\square$

Доказательство леммы 4. Напомним, что $c_n=2^{-n}n!(n+1)!v_n$ при $n\geqslant 2$, где v_n – объем множества

$$P_n=\{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n-1}:L_n^{\{\varnothing;n\}}\mathbf{y}\geqslant-\mathbf{1}_{n-1},\,\mathbf{y}\geqslant\mathbf{0}_{n-1}\},$$

см. (10). Таким образом нам требуется найти v_n. Поскольку $c_1=1$, положим $v_1:=1$, чтобы $c_1=2^{-1}1!(1+1)!v_1$.

Займемся изучением множества P_n. Временно забудем о нашей геометрической интуиции и будем использовать лишь алгебраические рассуждения. Легко видеть, что

$$P_n=\{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n-1}:L_n^{\{1;n\}}\mathbf{y}\geqslant-\mathbf{1}_{n-1},\,\mathbf{y}\geqslant\mathbf{0}_{n-1}\},$$

поскольку первое из неравенств $L_n^{\{\varnothing;n\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{n-1}$, то есть, $y_1 \geqslant -1$, следует из $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{n-1}$.

Покажем, что (для любого $n \geqslant 2$) матрица $L_n^{\{1;n\}}$ невырождена. Обозначим за $I_k^{\vartriangle}$ верхнетреугольную матрицу размера $k \times k$, у которой все $\frac{k(k+1)}{2}$ ненулевых элементов равны 1. Кроме того, обозначим $I_k^{\triangledown} := (I_k^{\vartriangle})^{\top}$. Сумма элементов каждого столбца матрицы $L_n^{\{1;n\}}$, за исключением первого и последнего, равна нулю. Сумма элементов каждого столбца матрицы $I_{n-1}^{\triangledown} L_n^{\{1;n\}}$, за исключением первого, равна нулю. Поэтому мы легко получаем

$$I_{n-1}^{\vartriangle} I_{n-1}^{\triangledown} L_n^{\{1;n\}} = \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n+2 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n+3 & 0 & -6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & -l_{n-2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

и $\det L_n^{\{1;n\}} = \det(I_{n-1}^{\vartriangle} I_{n-1}^{\triangledown} L_n^{\{1;n\}}) \neq 0$.

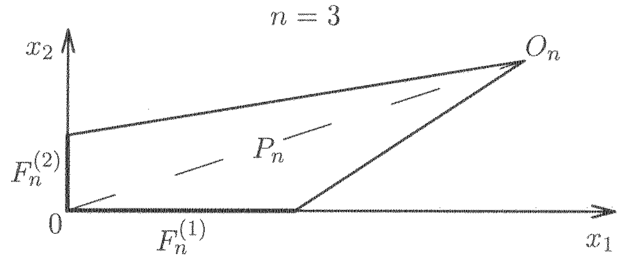
Теперь мы докажем, что $L_n^{\{1;n\}}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ влечет $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{0}$. Доказательство будет осуществлено по индукции. База индукции $n = 2$ очевидна. Предполагая, что наше утверждение верно для $n \geqslant 2$, проверим, что оно выполняется и для $n+1$. Поскольку у матрицы $I_n^{\vartriangle} I_n^{\triangledown}$ все элементы положительны, $L_{n+1}^{\{1;n+1\}}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ влечет $I_n^{\vartriangle} I_n^{\triangledown} L_{n+1}^{\{1;n+1\}}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, и по (22) мы заключаем, что $y_1 \leqslant 0$. Далее, из $L_{n+1}^{\{1;n+1\}}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ вытекает $L_{n+1}^{\{1,2;1,n+1\}}\mathbf{y}^{\{1\}} \geqslant \mathbf{0}_{n-1}$. В самом деле, мы всего лишь избавились от первого из неравенств $L_{n+1}^{\{1;n+1\}}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, а второе из них, $y_1 - 6y_2 + 6y_3 \geqslant 0$, заменили на менее ограничительное $-6y_2 + 6y_3 \geqslant 0$ (ведь $y_1 \leqslant 0$!). Теперь $L_{n+1}^{\{1,2;1,n+1\}} = L_n^{\{1;n\}} J_{n-1}^{1\mapsto 2}$ (см. комментарий к аналогичному утверждению 16 и определение $J_m^{s\mapsto i}$), и отсюда $L_{n+1}^{\{1,2;1,n+1\}}\mathbf{y}^{\{1\}} \geqslant \mathbf{0}_{n-1}$ равносильно неравенству $L_n^{\{1;n\}}\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_{n-1}$, в котором мы положили $\mathbf{z} := J_{n-1}^{1\mapsto 2}\mathbf{y}^{\{1\}}$. Но по индукционному предположению, $\mathbf{z} \leqslant \mathbf{0}_{n-1}$, и значит, $\mathbf{y}^{\{1\}} \leqslant \mathbf{0}_{n-1}$, поскольку $\mathbf{z}$ получается из $\mathbf{y}^{\{1\}}$ растяжением с положительными коэффициентами. Наконец, $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{0}_n$.

Используя (22), легко находим единственное решение системы

$L_n^{\{1;n\}}\mathbf{y} = -\mathbf{1}$, которым является

$$\mathbf{y}^*_{n-1} := \Big(\frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}\Big)^\top. \tag{23}$$

Мы видим $\mathbf{y}^* \in P_n$, а так как для любого $\mathbf{y} \in P_n$ выполняется $L_n^{\{1;n\}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) \geqslant \mathbf{0}_{n-1}$, то $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}^*$.



Теперь нам совершенно ясно, что P_n – это $(n-1)$-мерный выпуклый многогранник с $2(n-1)$ гранями. Обозначим за O_n точку пресечения $n-1$ гиперплоскости (грани) $L_n^{\{1;n\}}\mathbf{y} = -\mathbf{1}_{n-1}$. Положим также $F_n^{(k)} := P_n \cap \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-1} : y_k = 0\}$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, см. рисунок. Конечно же, $O_n = \mathbf{y}^*_{n-1}$, а из $\mathbf{y}_{n-1} \in P_n \Longrightarrow \mathbf{y}_{n-1} \leqslant \mathbf{y}^*_{n-1}$ сразу следует, что P_n является дизъюнктным объединением $n-1$ симплекса с общей вершиной O_n и основаниями $F_n^{(k)}$ (более педантично, дизъюнктны не сами симплексы, а их внутренности). Поэтому, вспоминая (23), мы получаем

$$v_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k+1}\cdot\lambda_{n-2}(F_n^{(k)}). \tag{24}$$

Таким образом, задача нахождения объема P_n сведена к нахождению объемов $F_n^{(k)}$.

При $2 \leqslant k \leqslant n-2$ справедливо

$$\begin{aligned} F_n^{(k)} = {} & \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-1} : L_n^{\{1;n\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{n-1}, \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{n-1}, y_k = 0\} \\ = {} & \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{k-1} : L_k^{\{1;k\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{k-1}, \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{k-1}\} \times \{0\} \\ & \times \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-k-1} : L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k,n\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k-1}, \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{n-k-1}\}, \end{aligned}$$

которое очень сильно напоминает (9). Единственное различие состоит в том, что в данном утверждении речь идет о $L_n^{\{1;n\}}$, в то время как в (9) фигурирует L_n. Поэтому доказательство дословно повторяет доказательство (9). Теперь

$$F_n^{(k)} = P_k \times \{0\} \\ \times \{\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-k-1} : L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k,n\}}\mathbf{y} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k-1},\, \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}_{n-k-1}\},$$

и с учетом $L_{n-k}^{\{1;n-k\}} = L_n^{\{1,\dots,k+1;1,\dots,k,n\}} J_{n-k-1}^{k+1\mapsto 1}$ (см. комментарий к аналогичному утверждению (16) и определение $J_m^{s\mapsto i}$), замена переменных $\mathbf{y} = J_{n-k-1}^{k+1\mapsto 1}\mathbf{z}$ приводит к

$$F_n^{(k)} = P_k \times \{0\} \\ \times J_{n-k-1}^{k+1\mapsto 1}\{\mathbf{z} = \mathbf{z}_{n-k-1} : L_{n-k}^{\{1;n-k\}}\mathbf{z} \geqslant -\mathbf{1}_{n-k-1},\, \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_{n-k-1}\}.$$

Наконец, $F_n^{(k)} = P_k \times \{0\} \times J_{n-k-1}^{k+1\mapsto 1} P_{n-k}$, и по (17),

$$\lambda_{n-2}(F_n^{(k)}) = \frac{k!(k+1)!(n-k-1)!(n-k)!}{(n-1)!n!} v_k v_{n-k}. \tag{25}$$

Для $k = 1$ можно дословно повторить все рассуждения, проведенные для $2 \leqslant k \leqslant n-2$. В итоге мы получим $F_n^{(1)} = \{0\} \times J_{n-2}^{2\mapsto 1} P_{n-1}$, а так как $v_1 = 1$, то (25) справедливо и для $k = 1$.

А при $k = n-1$, заметив, что $F_n^{(n-1)} = P_{n-1} \times \{0\}$, получаем справедливость (25) и для $k = n-1$.

Таким образом, (25) верно для $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Осталось лишь рассмотреть (24) и (25), чтобы получить

$$v_n = \frac{1}{(n-1)(n-1)!n!} \sum_{k=1}^{n-1} \big((n-k)!k!\big)^2 v_k v_{n-k}.$$

Применение равенства $v_n = \frac{2^n}{n!(n+1)!} c_n$ завершает доказательство леммы. □

Закончим статью, доказав соотношение

$$G(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2n}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} U_{i,n} \geqslant t\right\},$$

в котором $U_{i,n}$ обозначают порядковые статистики n независимых равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин.

Хорошо известно (см., например, [2, Гл. 9, §1]), что для любого $n \geqslant 1$,

$$\left(U_{1,n}, U_{2,n}, \ldots, U_{n,n}\right) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right),$$

откуда

$$\mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2n}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} U_{i,n} \geqslant t\right\} = \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} S_i \geqslant \frac{S_{n+1}}{n}\, t\right\}.$$

Поэтому из закона больших чисел и поточечной сходимости G_n к G для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем

$$G\big((1+\varepsilon)t\big) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2n}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} U_{i,n} \geqslant t\right\}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2n}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} U_{i,n} \geqslant t\right\} \leqslant G\big((1-\varepsilon)t\big).$$

Функция $G(t)$ непрерывна, и предельный переход по $\varepsilon \searrow 0$ завершает доказательство.

Автор признателен М. А. Лифшицу за интерес к данной работе.

Литература

1. В. В. Высоцкий, *Энергия и количество кластеров в стохастических системах неупругих притягивающихся частиц.* — Теория вероятн. и ее примен. **50** (2005), 241–265.
2. С. Карлин, *Основы теории случайных процессов.* “Мир”, М. (1971).
3. C. Giraud, *Clustering in a self-gravitating one-dimensional gas at zero temperature.* — J. Stat. Phys. **105** (2001), 585–604.
4. M. Lifshits and Z. Shi, *Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation.* — Ann. Probab. **33** (2005), 53–81.
5. Ph. A. Martin and J. Piasecki, *Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas.* — J. Stat. Phys. **84** (1996), 837–857.

Vysotsky V. V. The area of exponential random walk and partial sums of uniform order statistics.

Let S_i be a random walk with standard exponential increments. We denote by $\sum_{i=1}^{k} S_i$ its *k-step area*. The random variable $\inf\limits_{k\geqslant 1} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} S_i$

plays important role in the study of so-called one-dimensional sticky particles model. We find the distribution of this variable and prove that for $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left\{\inf_{k\geqslant 1} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} S_i \geqslant t\right\} = \mathbb{P}\left\{\inf_{k\geqslant 1} \sum_{i=1}^{k} (S_i - it) \geqslant 0\right\} = \sqrt{1-t}\, e^{-t/2}.$$

We also show that for $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2n}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} U_{i,n} \geqslant t\right\} = \sqrt{1-t}\, e^{-t/2},$$

where $U_{i,n}$ are the order statistics of n i.i.d. random variables uniformly distributed on $[0,1]$.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: vysotsky@vv9034.spb.edu

Поступило 8 декабря 2006 г.