Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ МОСТОВ СКАЧКООБРАЗНЫХ ДИФФУЗИЙ

1. Скачкообразная диффузия. Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1]. Нас интересуют методы вычисления распределений функционалов от мостов диффузионных скачкообразных процессов. Впервые метод вычисления распределений функционалов от броуновского моста был предложен М. Кацем в [2].

Пусть $N(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с параметром λ_1. Процесс $N(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,\infty)}\Big(t - \sum_{k=1}^{l} \tau_k\Big),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$.

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Наиболее интересной диффузией со скачками является *скачкообразное броуновское движение с линейным сносом*. Это – однородный процесс с независимыми приращениями, определяемый равенством

$$Z^{(\mu)}(t) := \mu t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad W(0) = x,$$

где $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса N и величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Этому процессу посвящено много работ. Интересные результаты о распределении супремума процесса $Z^{(\mu)}$ получены

Настоящая работа выполнена при поддержке грантами РФФИ 05-01-00911, НШ 4222.2006.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Э. Мордецким [3]. Детальное изучение методов вычисления распределений функционалов от процессов с независимыми приращениями дано в монографии А. В. Скорохода [4].

Рассмотрим однородную диффузию X, которая является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любых $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \qquad (1.1)$$

где $\mu(x)$, $\sigma(x)$ являются дифференцируемыми функциями с ограниченными производными. Пусть $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0)=x$.

Скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется следующим образом. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для $\tau_0 := 0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, а для $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$, $l = 1, 2, \ldots$, определяем J как решение стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\bigl(J\bigl(\textstyle\sum_{k=1}^{l}\tau_k-\bigr), Y_l\bigr) + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l}\tau_k}^{t} \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l}\tau_k}^{t} \sigma(J(u))\,dW(u), \quad (1.2)$$

где $\rho(x, y)$ – некоторая функция, которая является кусочно непрерывной по переменной x. В момент $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $\rho\bigl(J\bigl(\sum_{k=1}^{l} \tau_k -\bigr), Y_l\bigr)$. Здесь и далее полагаем $J(q-) = \lim\limits_{s\uparrow q} J(s)$.

Мостом из x в z на интервале $[0, t]$ случайного процесса $L(s)$, $s \geqslant 0$, $L(0) = x$, является такой процесс $L_{x,t,z}(s)$, $s \in [0, t]$, у которого конечномерные распределения совпадают с условными конечномерными распределениями процесса $L(s)$, $s \in [0, t]$, при условии, что $L(t) = z$, т. е., для любых $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$,

$$\mathbf{P}(L_{x,t,z}(t_1) < x_1,\, L_{x,t,z}(t_2) < x_2,\, \ldots, L_{x,t,z}(t_n) < x_n)$$
$$= \mathbf{P}(L(t_1) < x_1,\, L(t_2) < x_2,\, \ldots, L(t_n) < x_n | L(t) = z).$$

Если у одномерных распределений процесса L существует непрерывная плотность распределения, то правая часть этого равенства представима в виде

$$\frac{\frac{d}{dz}\mathbf{P}(L(t_1) < x_1,\, L(t_2) < x_2,\, \dots, L(t_n) < x_n, L(t) < z)}{\frac{d}{dz}\mathbf{P}(L(t) < z)}.$$

Пусть траектории процесса не имеют разрывов второго рода. Тогда справедливо следующее утверждение, которое, по существу, эквивалентно определению моста: для любого ограниченного измеримого функционала $\wp$ на пространстве функций без разрывов второго рода

$$\mathbf{E}\wp(L_{x,t,z}(s), 0 \leqslant s \leqslant t) = \mathbf{E}\{\wp(L(s), 0 \leqslant s \leqslant t) | L(t) = z\}.$$

При наличии у одномерного распредления плотности это равенство можно переписать в следующем виде

$$\mathbf{E}\wp(L_{x,t,z}(s), 0 \leqslant s \leqslant t) = \frac{\frac{d}{dz}\mathbf{E}\{\wp(L(s), 0 \leqslant s \leqslant t); L(t) < z\}}{\frac{d}{dz}\mathbf{P}(L(t) < z)}. \tag{1.5}$$

Здесь и далее используется обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

2. Распределения интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума. Рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A(t) := \int_0^t f(J_{x,t,z}(s))\, ds, \qquad f \geqslant 0, \tag{2.1}$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0 \le s \le t} J_{x,t,z}(s)$, $\sup\limits_{0 \le s \le t} J_{x,t,z}(s)$ для моста скачкообразной диффузии.

Опишем общий подход к проблеме вычисления распределений неотрицательных функционалов от мостов случайных процессов. Сделаем это на примере интегральных функционалов $\int\limits_0^t f(L_{x,t,z}(s))\, ds$ для некоторого процесса L с начальным значением $L(0) = x$.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу L при условии $L(0) = x$.

Для того, чтобы вычислить распределение неотрицательной случайной величины, достаточно вычислить преобразование Лапласа этого распределения. В нашем случае достаточно вычислить функцию

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^t f(L_{x,t,z}(s))\,ds\Big), \qquad \gamma > 0.$$

В силу (1.5), вместо нее можно вычислить функцию

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^t f(L(s))\,ds\Big); L(t) < z\Big\}. \tag{2.2}$$

Оказывается, чтобы избежать дифференциальных уравнений в частных производных, следует рассмотреть преобразование Лапласа функции (2.2) по переменной t, т. е. рассмотреть функцию

$$G_z(x) := \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^t f(L(s))\,ds\Big); L(t) < z\Big\}\,dt$$

$$= \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^\tau f(L(s))\,ds\Big);\ L(\tau) < z\Big\}.$$

Здесь τ – не зависящий от процесса $\{L(s),\ s \ge 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Если мы хотим найти распределение интегрального функционала $\int\limits_0^t f(L_{x,t,z}(s))\,ds$ в фиксированный момент времени t, то следует вычислить двойное обратное преобразование Лапласа от функции $G_z(x)$ по параметрам λ и γ, а затем, согласно (1.5), результат поделить на плотность распределения процесса L. Заметим, что сама плотность распределения вычисляется аналогичным образом по функции $G_z(x)$ при $f(x) \equiv 0$.

Рассмотрим далее вместо произвольного процесса L скачкообразную диффузию J. Вышеприведенные рассуждения показывают, что ключевым для вычисления совместных распределений интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума от моста диффузионного процесса со скачками является следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывная функция. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$G_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\le s\le\tau} J(s),$$

$$\sup_{0\le s\le\tau} J(s) \leqslant b, J(\tau) < y\Big\} \tag{2.3}$$

существует и является единственным ограниченным решением уравнения

$$G_y(x) = G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,\mathbf{E}G_y(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{2.4}$$

где $G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)$ – единственное непрерывное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}G''(x)+\mu(x)G'(x)-(\lambda+\lambda_1+f(x))G(x)=0, \quad x \in (a,b)\setminus\{y\}, \tag{2.5}$$

$$G'(y+0)-G'(y-0) = -2\lambda/\sigma^2(y), \tag{2.6}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.7}$$

Полагаем $G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$ или $y \notin (a,b)$.

Замечание 2.1. Функция $G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)$, $x \in (a,b)$, является функцией Грина задачи (4.2), (4.3), $g^\circ(x) \equiv 1$, из [1]. Эта функция имеет следующее вероятностное представление

$$G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^\tau (\lambda_1 + f(X(s)))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\le s\le\tau} X(s), \sup_{0\le s\le\tau} X(s) \leqslant b, X(\tau) < y\Big\}.$$

Функция $G_y^{\lambda_1,\lambda}(x)$, $x \in (a,b)$, имеет такое же представление с заменой λ_1 на λ и τ на τ_1.

Замечание 2.2. Функция $G_y(x)$, $x \in (a,b)$, является единственным непрерывным решением следующей задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))G(x) =$$

$$= -\lambda_1 \mathbf{E} G(\rho(x, Y_1)), \qquad x \neq y, \tag{2.8}$$

$$G'(y+0) - G'(y-0) = -2\lambda/\sigma^2(y), \tag{2.9}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.10}$$

Действительно, $G_y^{\lambda_1,\lambda}(x)$ – функция Грина соответствующей задачи, поэтому функция

$$U(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\, \mathbf{E}\{G_y(\rho(z, Y_1))\}\, dz$$

является при $x \in (a,b)$ единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))U(x) = -\lambda_1 \mathbf{E} G(\rho(x, Y_1)),$$

$$U(a) = 0, \qquad U(b) = 0.$$

В силу (2.4), мы имеем

$$G_y(x) = G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) + U(x),$$

а сумма функций G_y^{λ,λ_1} и U удовлетворяет задаче (2.8)–(2.10).

Доказательство теоремы 2.1. Мы выведем теорему 2.1, опираясь на теорему 4.1 из [1] при $g^\circ(x) \equiv 1$, $h(x,y) \equiv 0$. Положим

$$Q_\Delta(x) = \mathbf{E}_x \Big\{ \frac{\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(J(\tau))}{\Delta} \exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} J(s), \ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \leqslant b \Big\}.$$

Ясно, что $Q_\Delta(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$.

Согласно теореме 4.1 из [1] функция $Q_\Delta(x)$, $x \in (a,b)$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_\Delta(x) = M_\Delta(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\, \mathbf{E} Q_\Delta(\rho(z,Y_1))\, dz, \tag{2.11}$$

где

$$M_\Delta(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \frac{\mathbb{I}_{[y,y+\Delta)}(X(\tau))}{\Delta} \exp\Big(-\int_0^\tau (\lambda_1 + f(X(s)))\, ds \Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\le s\le\tau} X(s),\ \sup_{0\le s\le\tau} X(s) \leqslant b \Big\},$$

поскольку M_Δ является решением задачи (4.2), (4.3) из [1] при $g^\circ \equiv 1$. Несложно получить следующую оценку

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |M_\Delta(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x\big(X(\tau) < z\big) \leqslant K_z.$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 4.1 из [1] получим, что для всех x

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\, dz \leqslant \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{\tau_1} (\lambda + f(X(s)))\, ds \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E} e^{-\lambda\tau_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda} =: q < 1.$$

В ходе доказательства существования решения у интегрального уравнения (2.8) в [1] была получена оценка

$$|Q_\Delta(x)| \leqslant \frac{1}{1-q} \sup_{x\in\mathbf{R}} |M_\Delta(x)| = \frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda} K_z. \tag{2.12}$$

Интегральное уравнение (2.11) в силу определенной структуры ядра $G_z^{\lambda_1,\lambda}$ эквивалентно (см. формулу (4.7) из [1]) следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x) Q_\Delta''(x) + \mu(x) Q_\Delta'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x)) Q_\Delta(x) =$$

$$= -\frac{\lambda}{\Delta} \mathbb{I}_{[y,y+\Delta)}(x) - \lambda_1 \mathbf{E} Q_\Delta((\rho(x,Y_1)) \tag{2.13}$$

с граничными условиями

$$Q_\Delta(a) = 0, \qquad Q_\Delta(b) = 0. \tag{2.14}$$

Докажем, что предельный переход в данной задаче к пределу при $\Delta \downarrow 0$ приводит к задаче (2.8)–(2.10). Делая в (2.13) замену $V_\Delta(x) = \exp\Big(\int^x \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\Big) Q_\Delta(x)$, получаем

$$V''_\Delta(x) = \Big\{\frac{2(\lambda + \lambda_1 + f(x))}{\sigma^2(x)} + \Big(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\Big)^2 + \Big(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\Big)'\Big\} V_\Delta(x) -$$

$$-\frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\Big(\int^x \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\Big)\Big(\frac{\lambda}{\Delta}\mathbb{I}_{[y,y+\Delta)}(x) + \lambda_1 \mathbf{E} Q_\Delta(\rho(x, Y_1))\Big).$$

Обозначим $T_\Delta(x)$ правую часть этого уравнения. Интегрируя это равенство внутри интервала (a, b), получаем

$$V'_\Delta(x_2) - V'_\Delta(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} T_\Delta(x)\, dx. \tag{2.15}$$

Снова интегрируя полученное равенство по x_2 внутри интервала $(x_1, x_3) \subseteq (a, b)$, получаем

$$V_\Delta(x_3) - V_\Delta(x_1) - V'_\Delta(x_1)(x_3 - x_1) = \int_{x_1}^{x_3} dx_2 \int_{x_1}^{x_2} T_\Delta(x)\, dx. \tag{2.16}$$

В силу оценки (2.12), из (2.15) вытекает, что семейство функций $\{V'_\Delta(x)\}_{\Delta>0}$ равностепенно непрерывно на любом замкнутом подынтервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{y\}$. Выбирая значения величин x_3 в (2.16) за пределами $[\alpha, \beta]$, легко вывести, что семейство $\{V'_\Delta(x)\}_{\Delta>0}$ является равномерно ограниченным на $[\alpha, \beta]$. Более того, теперь с учетом (2.15) можно утверждать, что

$$\sup_{\Delta>0} \sup_{a<x<b} |V'_\Delta(x)| < \infty. \tag{2.17}$$

По теореме Арцела–Асколи семейство функций $\{V'_\Delta(x)\}_{\Delta>0}$, заданное на $[\alpha, \beta]$, является относительно компактным. Отсюда следует, что из любой последовательности Δ_n, стремящейся к нулю, можно извлечь такую подпоследовательность Δ_{n_k}, что $V'_{\Delta_{n_k}}(x)$ на

$[\alpha,\beta]$ равномерно сходится к производной $V'(x)$ некоторой дифференцируемой функции $V(x)$. Одновременно с этим имеет место равномерная сходимость $V_{\Delta_{n_k}}(x)$ к $V(x)$. Более того, из (2.16) и (2.17) вытекает, что семейство функций $\{V_\Delta(x)\}_{\Delta>0}$ равностепенно непрерывно на интервале $[a,b]$. В результате мы имеем, что сходимость $V_{\Delta_{n_k}}(x)$ к $V(x)$ является равномерной на всем $[a,b]$. Вообще говоря, эта функция может зависеть от выбора подпоследовательности Δ_{n_k}, однако будет установлено, что функция V удовлетворяет дифференциальной задаче, которая имеет единственное решение. Таким образом,

$$\sup_{x\in[a,b]}|V_\Delta(x)-V(x)|\to 0, \qquad \text{при } \Delta\downarrow 0. \tag{2.18}$$

В силу равномерной сходимости, $V(x)$, $x\in[a,b]$, является непрерывной функцией и, согласно (2.14), для нее выполняются граничные условия $V(a)=0$, $V(b)=0$. При $x\notin(a,b)$ полагаем $V(x)=0$.

Перейдем к пределу в (2.15) при $\Delta_{n_k}\downarrow 0$. Обозначим $R(x):=\mathbb{1}_{[y,\infty)}(x)$. Предельный переход в (2.15) приводит к равенству

$$V'(x_2)-V'(x_1)-\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big\{\frac{2(\lambda+\lambda_1+f(x))}{\sigma^2(x)}+\Big(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\Big)^2+\Big(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\Big)'\Big\}V(x)\,dx=$$

$$=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{2\lambda}{\sigma^2(x)}\exp\Big(\int\limits^{x}\frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\Big)\Big(dR(x)+\lambda_1\mathbf{E}G(\rho(x,Y_1))dx\Big),$$

где $G(x):=\exp\Big(-\int\limits^{x}\frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\Big)V(x)$. Это уравнение эквивалентно задаче (2.8), (2.9). Если $y\notin(x_1,x_2)$, то $R(x_2)-R(x_1)=0$ и для функции $G(x)$ выполняется уравнение (2.8). Если $y\in(x_1,x_2)$, то $R(x_2)-R(x_1)=1$. Устремляя $x_1\uparrow y$ и $x_2\downarrow y$, мы получаем, что

$$V'(y+0)-V'(y-0)=-\frac{2\lambda}{\sigma^2(y)}\exp\Big(\int\limits^{y}\frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\Big).$$

Следовательно, для функции $G(x)$ выполняется условие (2.9) на скачок производной.

В результате доказано, что у семейства функций $Q_\Delta(x)$ существует предел, и так как $\mathbb{I}_{[y,y+\Delta)}(x) = \mathbb{I}_{(-\infty,y+\Delta)}(x) - \mathbb{I}_{(-\infty,y)}(x)$, то он должен иметь вид (2.3). Одновременно с этим мы убедились, что предельная функция удовлетворяет задаче (2.8)–(2.10), которая эквивалентна (2.4)–(2.7).

3. Примеры применения теоремы 2.1.

1. Пусть $X = \sigma W$ – броуновское движение с дисперсией σ^2 в единичный момент времени. Рассмотрим процесс

$$Z^{(0)}(t) = \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

Вычислим переходную плотность

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(\tau) < y\big). \tag{3.1}$$

Пусть плотность распределения величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|}, \qquad \eta > 0.$$

В этом случае $Z^{(0)}(t)$ является симметричным случайным процессом: ($-Z^{(0)}(t)$ распределен так же как $Z^{(0)}(t)$). Для вычисления (3.1) воспользуемся теоремой 2.1 для процесса $J(t) = Z^{(0)}(t)$ при $f(x) \equiv 0$, $\sigma(x) \equiv \sigma$, $\mu(x) \equiv 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$ и $\rho(x, y) = x + y$.

Решение задачи (2.5), (2.6) имеет вид

$$G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\lambda + 2\lambda_1}} e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma}. \tag{3.2}$$

Ввиду экспоненциальной структуры данной функции, решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$G_y(x) = Ae^{-|x-y|\rho_1} + Be^{-|x-y|\rho_2} \tag{3.3}$$

при некоторых константах A, B и неотрицательных ρ_l, $l = 1, 2$.

Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-z|\mu} e^{-|z-y|\rho}\, dz = \frac{2}{\mu^2 - \rho^2}\Big(\mu e^{-|x-y|\rho} - \rho e^{-|x-y|\mu}\Big). \tag{3.4}$$

Используя эту формулу, несложно вычислить, что

$$\mathbf{E}G_y(z+Y_1) = \frac{A\eta}{\eta^2-\rho_1^2}\Big(\eta e^{-|z-y|\rho_1} - \rho_1 e^{-|z-y|\eta}\Big) + \\ + \frac{B\eta}{\eta^2-\rho_2^2}\Big(\eta e^{-|z-y|\rho_2} - \rho_2 e^{-|z-y|\eta}\Big).$$

Снова применяя формулу (3.4), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,\mathbf{E}G_y(z+Y_1)\,dz = -\Big(\frac{A\eta\rho_1}{(\eta^2-\rho_1^2)} + \frac{B\eta\rho_2}{(\eta^2-\rho_2^2)}\Big)\times$$

$$\times\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\sigma^2\eta^2)}\Big(e^{-|x-y|\eta} - \frac{\sigma\eta}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}}e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma}\Big)+$$

$$+\frac{A\eta^2}{(\eta^2-\rho_1^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\sigma^2\rho_1^2)}\Big(e^{-|x-y|\rho_1} - \frac{\sigma\rho_1}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}}e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma}\Big)+$$

$$+\frac{B\eta^2}{(\eta^2-\rho_2^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\sigma^2\rho_2^2)}\Big(e^{-|x-y|\rho_2} - \frac{\sigma\rho_2}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}}e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma}\Big)+$$

Подставляя это выражение, а также (3.2) и (3.3) в уравнение (2.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспоненциальных функциях, получаем следующие условия. Величины ρ_1 и ρ_2 должны быть решениями уравнения

$$\frac{\eta^2}{(\eta^2-\rho^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\sigma^2\rho^2)} = 1. \tag{3.5}$$

Корни уравнения выражаются формулами

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2} + \Big(\Big(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\Big)^2 - \frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\Big)^{1/2}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2} - \Big(\Big(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\Big)^2 - \frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\Big)^{1/2}},$$

причем $0 < \rho_2 < \eta < \rho_1$. Коэффициент при $e^{-|x-y|\eta}$ должен равняться нулю, поэтому

$$\frac{A\rho_1}{(\eta^2-\rho_1^2)} + \frac{B\rho_2}{(\eta^2-\rho_2^2)} = 0.$$

Кроме того, с учетом (3.5) должно выполняться равенство

$$\lambda = A\rho_1\sigma^2 + B\rho_2\sigma^2.$$

В силу этих требований, окончательно получаем

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(\tau)<y\big)=\frac{\lambda(\rho_1^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_1^2-\rho_2^2)\rho_1}e^{-|x-y|\rho_1}+\frac{\lambda(\eta^2-\rho_2^2)}{\sigma^2(\rho_1^2-\rho_2^2)\rho_2}e^{-|x-y|\rho_2}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим частный случай этой формулы, когда $\sigma\to 0$. Имеем $\rho_1\sim\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma$ и $\rho_2\sim\dfrac{\eta\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+\lambda_1}}$. Поэтому из (3.6) при $x=0$ и $\sigma\to 0$ следует, что

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(\tau)}Y_k<y\Big)=\frac{\eta\lambda_1\sqrt{\lambda}}{2(\lambda+\lambda_1)^{3/2}}e^{-|y|\eta\sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda+\lambda_1}}.$$

У распределения с такой плотностью есть нагрузка в нуле, т. е.

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{N(\tau)}Y_k=0\Big)=\mathbf{P}(\tau<\tau_1)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}.$$

2. Рассмотрим диффузию со скачками, которые не зависят от положения диффузии в момент предшествующий скачку. В данном случае $\rho(x,y)=y$, и уравнение (2.4) для функции $G_y(x)$, определяемой формулой (2.3), принимает следующий вид

$$G_y(x)=G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)+\mathbf{E}G_y(Y_1)\int_{-\infty}^{\infty}G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,dz. \tag{3.7}$$

Подставляя в это уравнение вместо x величину Y_1 и вычисляя от обеих частей равенства математическое ожидание, получаем

$$\mathbf{E}G_y(Y_1)=\mathbf{E}G_y^{\lambda,\lambda_1}(Y_1)\Big(1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}G_z^{\lambda_1,\lambda}(Y_1)\,dz\Big)^{-1}.$$

В результате решение уравнения (3.7) имеет вид

$$G_y(x)=G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)+\frac{\mathbf{E}G_y^{\lambda_1,\lambda}(Y_1)}{1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}G_z^{\lambda_1,\lambda}(Y_1)\,dz}\int_{-\infty}^{\infty}G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,dz, \tag{3.8}$$

где функция $G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)$ является единственным непрерывным решением задачи (2.5)–(2.7).

Пусть $X(s) := W^{(\mu)}(s) = \mu s + \sigma W(s)$ – броуновское движение с линейным сносом. Рассмотрим отвечающую этому процессу диффузию $J^{(\mu)}$ со скачками, не зависящими от положения диффузии.

Вычислим сначала переходную плотность

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(J^{(\mu)}(\tau) < y\big). \tag{3.9}$$

Решение задачи (2.5), (2.6) для $\sigma(x) \equiv \sigma$ и $\mu(x) \equiv \mu$, $f(x) \equiv 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$ имеет вид

$$G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2}} e^{(\mu(y-x)-|x-y|\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2})/\sigma^2}. \tag{3.10}$$

Поскольку в данном случае $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,dz = \dfrac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$, то

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(J^{(\mu)}(\tau) < y\big) = \frac{\lambda}{\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2}} e^{(\mu(y-x)-|x-y|\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2})/\sigma^2} +$$

$$+\frac{\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2}}\,\mathbf{E}e^{(\mu(y-Y_1)-|Y_1-y|\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)\sigma^2+\mu^2})/\sigma^2}. \tag{3.11}$$

Для того, чтобы вычислить переходную плотность в фиксированный момент времени t, поделим правую часть (3.11) на λ и найдем обратное преобразование Лапласа по λ. В результате получим

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(J^{(\mu)}(t) < y\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} e^{-\lambda_1 t-(y-x-\mu t)^2/2t\sigma^2} +$$

$$+\frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_0^t \frac{e^{-\lambda_1 s}}{\sqrt{s}}\mathbf{E}e^{-(y-Y_1-\mu s)^2/2s\sigma^2}\,ds. \tag{3.12}$$

Вычислим совместную функцию распределения

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{(\mu)}(s) \leqslant b,\, J^{(\mu)}(\tau) < y\Big) \tag{3.13}$$

в предположении единичной дисперсии у процесса броуновского движения. Решение задачи (2.5)–(2.7), $x, y \in \mathbf{R}$, для $\sigma(x) \equiv 1$ и $\mu(x) \equiv \mu$, $f(x) \equiv 0$, $a = -\infty$, имеет вид

$$G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = \frac{\lambda \mathbb{1}_{(-\infty,b)}(x)\mathbb{1}_{(-\infty,b)}(y)}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}\Big(e^{\mu(y-x)-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}} -$$

$$-e^{-(b-y)(\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}+\mu)}e^{-(b-x)(\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}-\mu)}\Big). \qquad (3.14)$$

Положим $v^+ = \max\{0, v\}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,dz = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\big(1-e^{-(b-x)^+(\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}-\mu)}\big).$$

и при $x, y \in (-\infty, b)$

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{(\mu)}(s)\leqslant b, J^{(\mu)}(\tau)<y\big) = \frac{\lambda\, e^{\mu(y-x)-|x-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}-$$

$$-\frac{\lambda\, e^{\mu(y-x)+(x+y-2b)\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}+\frac{\lambda_1\big(1-e^{-(b-x)^+(\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}-\mu)}\big)}{\lambda+\lambda_1\mathbf{E}e^{-(b-Y_1)^+(\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}-\mu)}}\times$$

$$\times\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}\Big(\mathbf{E}\big\{e^{\mu(y-Y_1)-|Y_1-y|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}\,\mathbb{I}_{(-\infty,b)}(Y_1)\big\}-$$

$$-\mathbf{E}\big\{e^{\mu(y-Y_1)+(Y_1+y-2b)\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}\,\mathbb{I}_{(-\infty,b)}(Y_1)\big\}\Big).$$

Литература

1. Бородин А. Н., *Распределение функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **339** (2006), 15–36.
2. Кас M., *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
3. Mordecki E., *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, № 1 (2003), 188–194.
4. Скороход А. В., *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., Наука, 1964.

Borodin A. N. Distributions of functionals of bridges of diffusions with jumps.

The paper deals with a methods of computations of distributions of functionals of bridges of a process which is a generalization of the diffusion with jumps. The approach to the computation of the distributions of integral functionals of bridges is the same as for diffusion itself. It is based on the computation of the Laplace transform of the distributions of integral functionals.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 9 апреля 2007 г.