Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Т. Андрощук

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ С ДРОБНЫМ ГАУССОВЫМ ШУМОМ. СХЕМА ЭЙЛЕРА С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

0. Введение

Настоящая работа состоит из двух принципиальных частей. Первая часть (пункты 1–4) посвящена асимптотическому поведению билинейной модели с дробным гауссовым шумом, для которой доказан вариант предельной теоремы Донскера–Прохорова; вторая (пункты 5–7) – сходимости схемы Эйлера с малыми возмущениями для стохастических дифференциальных уравнений с дробным броуновским движением (СДУ с ДБД). Если первая часть работы может быть интересна с точки зрения эконометрики, поскольку в ней рассматривается билинейная модель, обладающая свойством долгой памяти, то результат второй части относится к теории приближения решений СДУ. При этом, исследование асимптотического поведения билинейной модели в первой части опирается на результат о сходимости схемы Эйлера с малыми возмущениями во второй части.

1. Стандартная билинейная модель. Свойство долгой памяти

В общем виде дискретная билинейная модель, определяется рекуррентным уравнением

$$X_k = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{k-j} + \sum_{l_1=1}^{m} \sum_{l_2=1}^{k} b_{l_1, l_2} X_{k-l_1} \varepsilon_{k-l_2} + \sum_{j=0}^{r} c_j \varepsilon_{k-j}, \qquad (1.1)$$

где $\{\varepsilon_k\}$ является последовательностью белого шума. Модель (1.1), обозначаемая как $BL(p,r,m,k)$, обобщает линейную модель $ARMA(p,r) = BL(p,r,0,0)$ путем введения билинейных членов

Работа выполнена в рамках проекта ИНТАС No. 03-51-3714.

при $b_{l_1,l_2} \neq 0$. В эконометрических приложениях зачастую пользуются более узким классом процессов $BL(1,0,1,1)$, что упрощает анализ модели, но оставляет ее билинейную специфику. Также особого внимания заслуживает случай $a_1 = 1$, поскольку линейным аналогом модели $BL(1,0,1,1)$ в этом случае является обычное случайное блуждание, имеющее множество приложений, и выделяемое из общего случая $a_1 \neq 1$ с помощью несложных тестовых процедур. Модель $BL(1,0,1,1)$ с коэффициентами $a_1 = 1$, $c_0 = 1$ называется URB (от "*unit root bilinear*") моделью, благодаря определению в [1]. Для URB модели получены следующие аналитические результаты. В работе [1] был предложен тест, позволяющий обнаружить присутствие билинейного члена во временном ряде, что дает возможность различать URB модель и случайное блуждание. В работе [2] получена сходимость по распределению схемы URB серий к решению СДУ, имеющего билинейную форму. При этом показано, что для предельного непрерывного процесса также возможно тестирование на присутствие билинейной компоненты.

В настоящей работе рассмотривается URB модель с дробным гауссовым шумом вместо белого шума. Дробный гауссовый шум (термин взят из [3]) определяется как приращение процесса дробного броуновского движения и представляет собою пример стационарного процесса, обладающего свойством долгой памяти. Формальное определение этого свойства, согласно [3], следующее.

Определение 1. *Пусть ε_t – стационарный процесс, для которого существуют действительное число $\alpha \in (0,1)$ и постоянная $c > 0$ такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^{-2} \operatorname{cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k})/[c\, k^{-\alpha}] = 1.$$

Тогда ε_t называется стационарным процессом с долгой памятью.

Одним из аналитических аппаратов, позволяющих установить свойство долгой памяти, есть т. н. R/S статистика, дающая оценку параметра Херста H, который связан с числом α из Определения 1 соотношением $H = 1-\alpha/2$. В случае, если модель обладает свойством марковости или только "короткой" памятью (как, например, $ARMA(p,r)$ модель), значение параметра Херста будет равно $1/2$, если же данные обладают свойством долгой памяти, параметр H будет находиться в интервале $(1/2; 1)$. Анализ изменения логарифма цены акций, курсов валют и других эконометрических временных рядов обычно дает оценку параметра H между значениями $0,6$ и $0,7$ (например, см. работы [4–7] и ссылки в них), что указывает на присутствие свойства долгой памяти в этих рядах.

Другой метод, демонстрирующий присутствие долгой памяти в эконометрических временных рядах, состоит в анализе спектральной плотности эконометрических временных рядов (см. [8, 9]). Так, Гренгер установил, что типичной формой спектральной плотности для таких рядов является функция с полюсом в нуле, что остается верным даже после удаления из данных всех "известных" бизнес-циклов и трендов. Такую же форму спектральной плотности имеет и процесс с долгой памятью (см. [3]).

Примером теоретической модели, в которой сделаны попытки учесть эмпирически проявляемую долгую память, есть модель Блэка-Шоулса финансового рынка (см. работы [10–12] и ссылки в них). Ее "дробные" или "смешанные" варианты, в которых винеровский процесс заменен на ДБД или смесь этих двух процессов, были исследованы на предмет арбитражности рынка, возможности хеджирования платежных обязательств и определения оптимальной цены производных ценных бумаг.

2. Билинейная модель с дробным гауссовым шумом

Рассмотрим дискретный процесс Y, заданный рекуррентной формулой

$$Y_0 = x_0, \quad Y_k = Y_{k-1} + bY_{k-1}\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1, \tag{2.1}$$

где последовательность дробного гауссового шума $\{\varepsilon_k\}$ определяется как последовательность нормированных приращений дробного броуновского движения B_t:

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_k = \sigma \cdot (B_k - B_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad \sigma > 0.$$

Модель (2.1) будем называть билинейной моделью с дробным гауссовым шумом или дробной билинейной моделью.

Процесс дробного броуновского движения B_t (название благодаря работе [13]), по которому строится последовательность шума $\{\varepsilon_k\}$, по определению есть непрерывный стартующий с нуля центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями и ковариационной функцией

$$EB_sB_t = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \tag{2.2}$$

где параметр Херста $H \in (0,1)$. Несложно видеть, что при $H = 1/2$ ДБД совпадает с обычным винеровским процессом.

Известно, что ДБД обладает свойством автомодельности с коэффициентом H:

$$B_{c\,t} \simeq c^H B_t,$$

где знак $\simeq$ означает равенство по распределению. Более того (напр., см. [3, 14]), это свойство вместе со стационарностью приращений, центрированностью и конечностью вторых моментов процесса определяет с точностью до постоянного множителя корреляционную функцию (2.2), а также автокорреляционную функцию приращений

$$\rho(k) := \sigma^{-2}\operatorname{cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = \frac{1}{2}\left((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right).$$

Поскольку

$$\rho(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}, \quad k \to \infty,$$

то, согласно Определению 1, приращения ДБД $\{\varepsilon_k\}$ имеют свойство долгой памяти с коэффициентом $\alpha = 2 - 2H$, если только $H \in (1/2, 1)$. Так как нас интересует именно это свойство, в дальнейшем считаем, что $H \in (1/2, 1)$.

3. Построение предельной схемы

Мы будем исследовать асимптотическое поведение процесса Y, заданного формулой (2.1), при определенной нормировке пространственной и временной координат. Представляет интерес степенная нормировка координат, которая преобразует случайную последовательность $\{Z_k\}$ в процесс

$$Z^{(n)}(t) := n^{-\lambda} \cdot Z_{[n\,t]}, \tag{3.1}$$

где $\lambda > 0$ – параметр. При этом нужно подобрать параметр λ таким образом, чтобы нормированный процесс $Z^{(n)}$ слабо сходился в пространстве Скорохода $D[0,T]$ при $n \to \infty$.

Классический пример предельной схемы такого рода получается из принципа инвариантности Донскера–Прохорова. Согласно этому принципу (см. [17, Теорема 16.1]), случайное блуждание

$$X_0 = x_0, \quad X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1,$$

с $\mathrm{Var}\{\varepsilon_k\} = \sigma^2 < \infty$ имеет следующую асимптотику при степенной нормировке с $\lambda = 1/2$:

$$n^{-1/2} \cdot X_{[n\,\cdot]} \Rightarrow \sigma W(\cdot),$$

где W – винеровский процесс.

Как отмечается в работе [2], в случае URB модели с $b \neq 0$ нельзя подобрать степенную нормировку вида (3.1), которая давала бы нетривиальную асимптотику при $n \to \infty$. Поэтому в [2] предлагается заменить процесс X_k URB модели схемой серий процессов $\widetilde{X}_k^{(n)}$ с переменным "малым" коэффициентом $b = b_n$:

$$\widetilde{X}_0^{(n)} = x_0, \quad \widetilde{X}_k^{(n)} = \widetilde{X}_{k-1}^{(n)} + b_n \widetilde{X}_{k-1}^{(n)} \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \tag{3.2}$$

Для этой схемы там же доказано

Утверждение 1. *Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин, для которых $\mathbb{E}\varepsilon_k^2 = \sigma^2$, $\mathbb{E}\varepsilon_k^4 < \infty$. Пусть также $b_n = \beta \cdot n^{-1/2}$, где $\beta > 0$ – фиксировано. Тогда*

$$X^{(n)}(\cdot) := n^{-1/2} \cdot \widetilde{X}_{[n\,\cdot]}^{(n)} \Rightarrow X_\beta(\cdot),$$

где предельный процесс X_β является решением СДУ

$$dX(t) = \sigma\big(1 + \beta\, X(t)\big)\, dW_t + \beta\sigma^2\, dt, \quad X(0) = 0.$$

В случае билинейной модели с дробным гауссовым шумом (2.1) можно рассматривать две схемы, которые в пределе дадут результат, подобный Утверждению 1.

Первая схема строится по аналогии с (3.2) с помощью "малого" параметра b. А именно, положив

$$\widetilde{Y}_0^{(n)} = x_0, \quad \widetilde{Y}_k^{(n)} = \widetilde{Y}_{k-1}^{(n)} + b_n \widetilde{Y}_{k-1}^{(n)} \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1, \tag{3.3}$$

где $b_n := b \cdot n^{-H}$, можно рассматривать нормированный процесс

$$Y^{(n)}(t) := n^{-H} \cdot \widetilde{Y}_{[n\,t]}^{(n)}, \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Другую естественную предельную схему получим, если в определении величин ε_k сделаем "малым" шаг приращения процесса B_t. Для этого вместо (2.1) рассмотрим уравнение

$$\widetilde{Y}_0^{(n)} = x_0^{(n)}, \quad \widetilde{Y}_k^{(n)} = \widetilde{Y}_{k-1}^{(n)} + b\,\widetilde{Y}_{k-1}^{(n)}\varepsilon_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k \geq 1, \tag{3.5}$$

с

$$\varepsilon_0^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_k^{(n)} := \sigma \cdot \left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right), \quad k \geq 1,$$

и от последовательности $\{\widetilde{Y}_k^{(n)},\ k \geq 0\}$ перейдем к ступенчатому процессу

$$Y^{(n)}(t) := \widetilde{Y}_{[n\,t]}^{(n)}, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Заметим, что, в отличие от (3.4), в уравнении (3.6) $\lambda = 0$, то есть нормировку по пространственной координате проводить не нужно.

Перед тем как формулировать предельную теорему, покажем, что схема (3.3)–(3.4) в каком-то смысле является частным случаем схемы (3.5)–(3.6). Действительно, если нормирующий множитель n^{-H} применить в уравнении (3.3) вместо уравнения (3.4), схема (3.3)–(3.4) приобретает вид

$$\widehat{Y}_0^{(n)} = \frac{x_0}{n^H}, \quad \widehat{Y}_k^{(n)} = \widehat{Y}_{k-1}^{(n)} + b\,\widehat{Y}_{k-1}^{(n)}\frac{\varepsilon_{k-1}}{n^H} + \frac{\varepsilon_k}{n^H}, \quad k \geq 1,$$

$$Y^{(n)}(t) = \widehat{Y}_{[n\,t]}^{(n)}, \quad t \geq 0.$$

Но, благодаря свойству автомодельности ДБД,

$$\frac{\varepsilon_k}{n^H} \simeq \sigma \cdot \left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right) = \varepsilon_k^{(n)}, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, процесс $Y^{(n)}$, построенный по схеме (3.3)–(3.4), совпадает по распределению с процессом, построенным по схеме (3.5)–(3.6) для $x_0^{(n)} = x_0/n^H$.

4. Предельная теорема для дробной билинейной модели

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение схемы серий с уменьшающимся шагом приращения (3.5)–(3.6) для дробной билинейной модели. В отличии от Утверждения 1 для стандартной URB модели, она дает сходимость по вероятности, а не только по распределению. Это достигается за счет того, что все допредельные процессы $Y^{(n)}$ управляются одной и той же версией процесса ДБД.

Как следствие следующей теоремы и замечаний в конце предыдущего пункта, получаем сходимость по распределению предельной схемы (3.3)–(3.4) к тому же предельному процессу, что и для схемы (3.5)–(3.6). Сходимость по вероятности в данном случае невозможна, поскольку, за счет масштабирования по временной и пространственной координатах, процессами $Y^{(n)}$ при разных n управляют разные процессы $B^{(n)}_{\cdot} = n^{-H} B_{[n\,\cdot]}$, равные между собой лишь по распределению.

Доказательство теоремы основано на результате Теоремы 2 о сходимости приближений Эйлера с малыми возмущениями.

Теорема 1. *Пусть $\{B_t,\ t \geq 0\}$ есть дробное броуновское движение с параметром Херста $H \in (1/2, 1)$. Схему серий $\{\widetilde{Y}_k^{(n)}\}$ билинейной модели с дробным гауссовым шумом построим по правилу*

$$\widetilde{Y}_0^{(n)} = x_0 + \xi_0^{(n)}, \quad \widetilde{Y}_k^{(n)} = \widetilde{Y}_{k-1}^{(n)} + b\,\widetilde{Y}_{k-1}^{(n)} \varepsilon_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k \geq 1,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, случайные величины $\{\varepsilon_k^{(n)}\}$ заданы с помощью процесса $\{B_t\}$:

$$\varepsilon_0^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_k^{(n)} := \sigma \cdot \left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}} \right), \quad k \geq 1, \tag{4.1}$$

а случайные величины $\xi_0^{(n)}$ удовлетворяют оценке

$$|\xi_0^{(n)}| \leq L\, n^{-\eta} \tag{4.2}$$

для некоторого $\eta > 0$ и случайной величины $L = L(\omega)$, не зависящей от n.

Тогда для ступенчатого процесса $\left\{ Y^{(n)}(t) := \widetilde{Y}_{[n\,t]}^{(n)} \right\}$ имеет место сходимость по вероятности

$$\sup_{t \in [0,1]} |Y^{(n)}(t) - X(t)| \to^P 0, \quad n \to \infty, \tag{4.3}$$

где процесс X удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению с участием того же процесса $\{B_t\}$:

$$dX(t) = \sigma\big(1 + b \cdot X(t)\big)\, dB_t, \quad X_0 = x_0. \tag{4.4}$$

Замечание 1. Решение уравнения (3.4) может быть получено методом вариации постоянных и имеет вид

$$X(t) = x_0 \exp\{\sigma\beta B_t\} + \sigma \int_0^t \exp\{\sigma\beta\big(B_t - B_s\big)\}\, dB_s.$$

Доказательство Теоремы 1. Определим последовательность $\{\widetilde{V}_k^{(n)},\ k \ge 0\}$ как

$$\widetilde{V}_k^{(n)} := \Big(1 + b\,\varepsilon_k^{(n)}\Big)\,\widetilde{Y}_k^{(n)} = \widetilde{Y}_{k+1}^{(n)} - \varepsilon_{k+1}^{(n)}. \tag{4.5}$$

Очевидно, для величин $\widetilde{V}_k^{(n)}$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_0^{(n)} = x_0 + \xi_0^{(n)}, \quad \widetilde{V}_k^{(n)} - \widetilde{V}_{k-1}^{(n)} &= \Big(1 + b\,\varepsilon_k^{(n)}\Big)\Big(\widetilde{V}_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}\Big) - \widetilde{V}_{k-1}^{(n)}\\ &= \sigma\Big(1 + b\,\widetilde{V}_{k-1}^{(n)}\Big)\cdot\Big(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\Big) + \xi_k^{(n)}, \quad k \ge 1,\end{aligned} \tag{4.6}$$

где введено обозначение

$$\xi_k^{(n)} := b\,\big(\varepsilon_k^{(n)}\big)^2, \quad k \ge 1. \tag{4.7}$$

Ступенчатый процесс $\Big\{V^{(n)}(t) := \widetilde{V}_{[n\,t]}^{(n)}\Big\}$ представляет собою определенное в пункте 6 приближение Эйлера с возмущениями для уравнения (4.4). Покажем, что слагаемые $\xi_k^{(n)}$, удовлетворяют условию (6.4) Теоремы 2.

Действительно, согласно формулам (4.1), (4.7) и Утверждению 2 для $\rho = (2H-1)/3$ справедлива оценка

$$\varepsilon_k^{(n)} \le (\sigma K)\,(1/n)^{H-\rho}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.8}$$

где $K = K(\omega;\rho)$. Из последнего неравенства и условия (4.2) теоремы получаем оценки

$$\begin{aligned}|\xi_0^{(n)}| \le L\,\frac{1}{n^\eta}, \quad \sup_{k=\overline{1,n}} |\xi_k^{(n)}| \le b(\sigma K)^2\,\frac{1}{n^{1+\rho}},\\ \sum_{k=0}^n |\xi_k^{(n)}| \le L\,\frac{1}{n^\eta} + b(\sigma K)^2\,\frac{1}{n^\rho},\end{aligned} \tag{4.9}$$

откуда следует выполнение условия (6.4) с $\delta = 1/n$, $D = \max\big(L, b(\sigma K)^2\big)$, $\gamma = \min(\eta,\rho)$.

Теперь мы можем воспользоваться Теоремой 2, из которой следует сходимость по вероятности

$$s_n := \sup_{t\in[0,1]} |V^{(n)}(t) - X(t)| \to^P 0, \quad n \to \infty.$$

Заметим, что, благодаря соотношениям (4.5), (4.6), имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned}|Y^{(n)}(t) - X(t)| &\le |Y^{(n)}(t) - V^{(n)}(t)| + |V^{(n)}(t) - X(t)| \\ &\le |\widetilde{V}^{(n)}_{[nt]-1} + \varepsilon^{(n)}_{[nt]} - \widetilde{V}^{(n)}_{[nt]}| + s_n \\ &\le |b\,\widetilde{V}^{(n)}_{[nt]-1}| \cdot |\varepsilon^{(n)}_{[nt]}| + |\xi^{(n)}_{[nt]}| + s_n.\end{aligned}$$

Из (4.9) имеем

$$\sup_{t\in[0,1]} |\xi^{(n)}_{[nt]}| \to^P 0, \quad n \to \infty.$$

Потому для доказательства сходимости (4.3) осталось показать, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |b\,\widetilde{V}^{(n)}_{[nt]-1}| \cdot |\varepsilon^{(n)}_{[nt]}| \to^P 0, \quad n \to \infty. \tag{4.10}$$

Пусть $\Delta > 0$ – произвольное. Фиксируем некоторое $\lambda \in \big(0, \min(H - 1/2, \gamma)\big)$. Согласно Лемме 1, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $n_0 = n_0(\varepsilon/2) > 0$ и $\Omega_{\varepsilon/2, n_0} \subset \Omega$ такие, что $P(\Omega_{\varepsilon/2, n_0}) > 1 - \varepsilon/2$ и для любых $\omega \in \Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}$, $n > n_0$ выполняется условие

$$\sup_{t\in[0,1]} |\widetilde{V}^{(n)}_{[nt]-1}| \le C_0(\omega).$$

Поскольку C_0 не зависит от n, то имеет место сходимость

$$C_0(\omega)\,(1/n)^{H-\rho} \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{\Omega_{\varepsilon/2,\,n_0}}(\omega) \to^P 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому с учетом (4.8) для достаточно больших $n > n_0$ имеем

$$\begin{aligned}P\left(\sup_{t\in[0,1]} |b\,\widetilde{V}^{(n)}_{[nt]-1}| \cdot |\varepsilon^{(n)}_{[nt]}| \ge \Delta\right) &\le P\left(C\,(1/n)^{H-\rho} \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{\Omega_{\varepsilon/2,\,n_0}} > \Delta\right) \\ &\quad + P\left(\Omega \backslash \Omega_{\varepsilon/2,\,n_0}\right) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

что доказывает (4.10) в силу произвольности $\Delta > 0$. □

5. Стандартное приближение Эйлера для решений СДУ с ДБД

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с ДБД

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(u, X_u)du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dB_u, \quad t \in [0, T], \tag{5.1}$$

где интеграл по ДБД понимается как потраекторно определенный дробный интеграл (см. [15]). При таком определении интеграла и выполнении некоторых условий непрерывности на функции $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ в [16] доказано существование и единственность решения уравнения (5.1), причем решение X с вероятностью 1 принадлежит классу $X \in C^{H-\rho}([0, T])$ при $\rho > 0$.

Стандартная схема приближения Эйлера для уравнения (5.1) определяется процессом

$$X_0^\pi = x_0; \quad X_{t_{n+1}}^\pi = X_{t_n}^\pi + b(t_n, X_{t_n}^\pi)\Delta t_n + \sigma(t_n, X_{t_n}^\pi)\Delta B_{t_n},$$
$$X_t^\pi = X_{t_n}^\pi, \ t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{5.2}$$

для разбиения $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T\}$ отрезка $[0, T]$.

Насколько автору известно, исследование сходимости схемы Эйлера $X^\pi \to X$ при $|\pi| \to 0$ для уравнений с ДБД проводилось в относительно небольшом количестве работ. Так, в [18] установлена такая сходимость по вероятности в равномерной норме для случая $\sigma(t, x) = \sigma(t)$. В статье [19] для однородного случая $b(t, x) = b(x)$, $\sigma(t, x) = \sigma(x)$, где $b(x)$ и $\sigma(x)$ – ограниченные и достаточно гладкие функции, при $H > 1/2$ получена точная скорость сходимости X^π к X как в равномерной норме, так и для фиксированного $t \in [0, T]$. Наконец, в работе [20] при $H > 1/2$ и достаточно общих условиях на функции $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$, совпадающих с условиями существования и единственности решения уравнения (5.1), доказана сходимость к решению X в равномерной норме по вероятности, а при дополнительном условии ограниченности функций $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ – сходимость в равномерной норме с вероятностью 1.

6. Сходимость схемы Эйлера с малыми возмущениями

Мы не можем использовать известные результаты о сходимости приближений Эйлера, перечисленные в предыдущем пункте, для исследования асимптотики билинейной модели, поскольку нормированный процесс, возникающий в этой модели, не может быть представлен формулой (5.2). Так процесс $V^{(n)}$ из доказательства Теоремы 1 отличается от процесса вида (5.2) только наличием слагаемых $\xi_k^{(n)}$ в формуле (4.6). Но слагаемые $\xi_k^{(n)}$ равномерно по $k = \overline{1,n}$ стремятся к нулю со скоростью $n^{-2H+\varepsilon}$. Поэтому возникает естественный вопрос: насколько малым должно быть отклонение от стандартной схемы Эйлера (5.2), чтобы асимптотическое поведение такой схемы совпадало с поведением стандартной схемы. Исследованию этого вопроса посвящен настоящий пункт.

С целью упрощения выкладок, ограничимся рассмотрением билинейного уравнения вида

$$X_t = x_0 + \int_0^t (1 + bX_u)\,dB_u, \quad t \in [0,T]. \tag{6.1}$$

Также как и в (5.1), интеграл в уравнении (6.1) понимается как потраекторно определенный дробный интеграл.

Замечание 2. Результат Теоремы 2 для уравнения общего вида (5.1) можно получить, комбинируя доказательство результата о сходимости схемы Эйлера в работе [20] с частями доказательства Теоремы 2, в которых проводится оценивание отклоняющих членов.

Для $N > 0$ положим

$$\delta = \delta(N) = T/N; \qquad \tau_n = n\delta,\ n = \overline{0,N};$$
$$k(t) = \max\{n : \tau_n \le t\},\ t \in [0,T].$$

Пусть задана некоторая схема серий случайных величин $\xi^\delta = \{\xi_n^\delta, n = \overline{0,N}\}$. Определим процесс Y^δ в точках $\{\tau_n, n = \overline{0,N}\}$ исходя из рекуррентного правила

$$Y^\delta_{\tau_0} = x_0 + \xi^\delta_0, \quad Y^\delta_{\tau_n} = Y^\delta_{\tau_{n-1}} + (1 + bY^\delta_{\tau_{n-1}})\Delta B_{\tau_{n-1}} + \xi^\delta_n,\ n = \overline{1,N}, \tag{6.2}$$

где $\Delta B_{\tau_n} = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}$, и продолжим его на точки $t \in [0,T] \setminus \{\tau_n\}$ ступенчато:

$$Y^\delta_t = Y^\delta_{\tau_{k(t)}}, \quad t \in [0,T]. \tag{6.3}$$

В доказательстве следующей теоремы в значительной мере используется техника, примененная при доказательстве Теорем 2.2 и 3.1 работы [20].

Теорема 2. *Пусть $H \in (1/2, 1)$. Предположим, что при некотором $\gamma > 0$ существует случайная величина $D = D(\omega;\gamma)$, не зависящая от δ, такая что для всякого $\delta > 0$ выполняется*

$$|\xi_0^\delta| \le D\,\delta^\gamma, \quad \sup_{i=\overline{1,N}} |\xi_i^\delta| \le D\,\delta^{1+\gamma}, \quad \Xi_{0,N}^{\,\delta} := \sum_{i=0}^{N} |\xi_i^\delta| \le 2D\,\delta^\gamma. \qquad (6.4)$$

Тогда для процесса Y^δ, заданного формулами (6.2) и (6.3) выполняется

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^\delta - X_t| \to^P 0, \quad \delta \to 0.$$

Доказательство. Пусть процесс $\widetilde{Y}^\delta$ задается интегральным уравнением

$$\widetilde{Y}_t^\delta = x_0 + \xi_0^\delta + \int_0^t (1 + b\widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta) dB_u + \int_0^t \delta^{-1}\xi_{k(u)+1}^\delta du. \qquad (6.5)$$

Несложно видеть, что процесс $\widetilde{Y}^\delta$ непрерывен на отрезке $t = [0,T]$, а в точках $t = \tau_n$ совпадает с процессом Y^δ:

$$\widetilde{Y}_{\tau_n}^\delta = Y_{\tau_n}^\delta, \quad n = \overline{0,N}.$$

Мы докажем теорему, установив следующие две сходимости

$$\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{Y}_t^\delta - X_t| \to^P 0, \quad \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^\delta - \widetilde{Y}_t^\delta| \to^P 0, \quad \delta \to 0. \qquad (6.6)$$

Сначала докажем лемму об ограничености процесса $\widetilde{Y}^\delta$.

Лемма 1. *Существует случайная величина $C_0 = C_0(\omega;\gamma, X_o, b, T)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $0 < \delta_0(\varepsilon) < 1$ и множество элементарных событий $\Omega_{\varepsilon,\delta_0} \subset \Omega$, для которого $P(\Omega_{\varepsilon,\delta_0}) > 1 - \varepsilon$, такие, что для любых $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ выполняется*

$$\sup_{u\in[0,T]} |\widetilde{Y}_u^\delta| \le C_0.$$

Доказательство. Фиксируем постоянные α и ρ такие, что $1-H < \alpha < 1/2$, $0 < \rho < H-\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta < 1$.

Из определения процесса $\widetilde{Y}^\delta$ (6.5) и Утверждения 3 получаем оценку

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{Y}_t^\delta| &\le |x_0| + \Big|\int_0^t (1 + b\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}) dB_u\Big| + \sum_{i=0}^{k(t)+1} |\xi_i^\delta| \\
&\le |x_0| + |B_t| + \Xi^{\,\delta}_{0,N} + G\Bigg(\int_0^t b|\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}|u^{-\alpha} du \\
&\quad + \int_0^t\int_0^r b\big|\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(r)}} - \widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr\Bigg) \\
\le C\Bigg(1 + \int_0^t &\big|\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}\big|u^{-\alpha} du + \int_0^t\int_0^{\tau_{k(r)}} |\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(r)}} - \widetilde{Y}^\delta_u|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{\tau_{k(r)}} \big|\widetilde{Y}^\delta_u - \widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}\big|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr\Bigg),
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

где $C = C(\omega; \alpha, \gamma, x_0, b, T) = |x_0| + |B_t| + 2D + b\, G(\alpha, T)$.

Пользуясь определением $\widetilde{Y}^\delta$ и Утверждением 2, устанавливаем следующее:

$$
\begin{aligned}
\big|\widetilde{Y}^\delta_u - \widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}\big| &\le \big|1 + b\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}\big|\big|B_u - B_{\tau_{k(u)}}\big| + \delta^{-1}\big|\xi^\delta_{k(u)+1}\big|(u - \tau_{k(u)}) \\
&\le K|1 + b\widetilde{Y}^{\delta,*}_u|(u - \tau_{k(u)})^{H-\rho} + D\,\delta^\gamma(u - \tau_{k(u)}) \\
&\le C\,\delta^{H-\rho}\left(1 + \big|\widetilde{Y}^{\delta,*}_u\big|\right),
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

где $C = C(\omega; \gamma, \rho, b, T)$ и введено обозначение

$$
\widetilde{Y}^{\delta,*}_t := \sup_{u\in[o,t]} |\widetilde{Y}^\delta_u|.
$$

Очевидно следующее неравенство:

$$\int_0^t \int_0^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1} du\, dr \le \alpha^{-1} \int_0^t (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha} dr$$

$$\le \alpha^{-1}(T/\delta) \int_0^\delta r^{-\alpha} dr \le C(\alpha, T)\, \delta^{-\alpha}. \tag{6.9}$$

Используя (6.8) и (6.9), можем оценить слагаемое

$$\int_0^t \int_0^{\tau_{k(r)}} |\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr \le C\left(1 + |\widetilde{Y}_t^{\delta,*}|\right)\delta^\lambda, \tag{6.10}$$

где $\lambda = H - \rho - \alpha > 0$ благодаря выбору постоянных α и ρ.

Обозначив для $0 \le u < r \le T$

$$\phi^\delta_{u,r} := |\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(r)}} - \widetilde{Y}^\delta_u|(r-u)^{-\alpha-1},$$

из (6.7) и (6.10) получаем неравенство

$$|\widetilde{Y}_t^\delta| \le C\left(1 + \delta^\lambda |\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^t |\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}| u^{-\alpha} du + \int_0^t \int_0^{\tau_{k(r)}} \phi^\delta_{u,r}\, du\, dr\right)$$

с $C = C(\omega; \alpha, \gamma, \rho, x_0, b, T)$, откуда сразу следует

$$|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| \le C\left(1 + \delta^\lambda |\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^t |\widetilde{Y}^{\delta,*}_u| u^{-\alpha} du + \int_0^t \int_0^{\tau_{k(r)}} \phi^\delta_{u,r}\, du\, dr\right). \tag{6.11}$$

Теперь оценим интеграл $\int\limits_0^{\tau_{k(t)}} \phi^\delta_{s,t}\, ds$. Аналогично оценке (6.7), получаем

$$|\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(t)}} - \widetilde{Y}^\delta_s| \le \left|\int_s^{\tau_{k(t)}} (1 + b\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}) dB_u\right| + \left|\int_s^{\tau_{k(t)}} \delta^{-1}\xi^\delta_{k(u)+1} du\right|$$

$$\le |B_{\tau_{k(t)}} - B_s| + G\Bigg(\int_s^{\tau_{k(t)}} b|\widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}|(u-s)^{-\alpha} du$$

$$+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}\int\limits_s^{r} b|\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(r)}}-\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(r-u)^{-\alpha-1}du\,dr\Bigg)+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}\delta^{-1}|\xi^{\delta}_{k(u)+1}|du$$

$$\le C\Bigg((\tau_{k(t)}-s)^{H-\rho}+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}|\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(u-s)^{-\alpha}du$$

$$+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}\int\limits_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}}\phi^{\delta}_{u,r}\,du\,dr+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}\int\limits_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}}|\widetilde{Y}^{\delta}_u-\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(r-u)^{-\alpha-1}du\,dr$$

$$+\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}\delta^{-1}|\xi^{\delta}_{k(u)+1}|du\Bigg)=:C\sum_{i=1}^{5}q^{(i)}_{s,t},$$

где $C=C(\omega;\alpha,\rho,b,T)=1+K(\rho,T)+b\,G(\alpha,T)$.

В следующем неравенстве

$$\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}\phi^{\delta}_{s,t}\,ds\le C\sum_{i=1}^{5}\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}q^{(i)}_{s,t}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds=:C\sum_{i=1}^{5}Q^{(i)}_t \qquad (6.12)$$

нам необходимо оценить слагаемые $Q^{(i)}_t$, $i=\overline{1,5}$ в его правой части. Получаем:

$$Q^{(1)}_t=\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}(\tau_{k(t)}-s)^{H-\rho}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds\le\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}(t-s)^{H-\rho-\alpha-1}\,ds\le C\,T^{H-\rho-\alpha},$$

где $C=(H-\rho-\alpha)^{-1}$;

$$Q^{(2)}_t=\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}\int\limits_s^{\tau_{k(t)}}|\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(u-s)^{-\alpha}du\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds$$

$$=\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}|\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|\int\limits_0^{u}(u-s)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds\,du$$

$$\le C(\alpha)\int\limits_0^{\tau_{k(t)}}|\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(t-u)^{-2\alpha}\,du,$$

где последнее неравенство получено из следующего соотношения для $u<t$:

$$\int_0^u (u-s)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds = u^{-2\alpha}\int_0^1 (1-s)^{-\alpha}(t/u-s)^{-\alpha-1}\,ds$$
$$\le (t-u)^{-2\alpha}\int_0^\infty s^{-\alpha}(1-s)^{-\alpha-1}\,ds =: (t-u)^{-2\alpha}C(\alpha).$$

Далее,

$$\begin{aligned} Q_t^{(3)} &= \int_0^{\tau_{k(t)}}\int_s^{\tau_{k(t)}}\int_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}} \phi_{u,r}^\delta\,du\,dr\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds \\ &= \int_0^{\tau_{k(t)}}\int_0^{\tau_{k(r)}}\int_0^u \phi_{u,r}^\delta\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds\,du\,dr \\ &\le \alpha^{-1}\int_0^{\tau_{k(t)}}\int_0^{\tau_{k(r)}} \phi_{u,r}^\delta\,du\,(t-r)^{-\alpha}dr. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (6.8), получаем

$$Q_t^{(4)} = \int_0^{\tau_{k(t)}}\int_s^{\tau_{k(t)}}\int_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}} |\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta|(r-u)^{-\alpha-1}\,du\,dr\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds$$
$$\le C\,\delta^{H-\rho}\left(1+|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}|\right)\int_0^{\tau_{k(t)}}\int_s^{\tau_{k(t)}}\int_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1}\,du\,dr\,ds.$$

Повторный интеграл в последнем выражении оценим как

$$\int_0^{\tau_{k(t)}}\int_s^{\tau_{k(t)}}\int_{s\wedge\tau_{k(r)}}^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1}\,du\,dr\,ds$$
$$= \int_0^{\tau_{k(t)}}\int_0^{\tau_{k(r)}}\int_0^u (r-u)^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds\,du\,dr$$

$$\leq \alpha^{-1} \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} \int\limits_0^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1}(t-u)^{-\alpha}\, du\, dr$$

$$\leq \alpha^{-2} \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha}(t-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\, dr$$

$$= \alpha^{-2} \sum_{n=0}^{k(t)-1} (t-\tau_n)^{-\alpha} \int\limits_{\tau_n}^{\tau_n+1} (r-\tau_n)^{-\alpha}\, dr$$

$$= \alpha^{-2}(1-\alpha)^{-1} \sum_{n=0}^{k(t)-1} (t-\tau_n)^{-\alpha}\, \delta^{1-\alpha}$$

$$\leq \alpha^{-2}(1-\alpha)^{-1}\delta^{-\alpha} \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} (t-r)^{-\alpha}\, dr \leq C(\alpha,T)\, \delta^{-\alpha}. \tag{6.13}$$

Откуда получаем

$$Q_t^{(4)} \leq C\, \delta^{\lambda} \left(1 + |\widetilde{Y}_t^{\delta,*}|\right).$$

И, наконец,

$$Q_t^{(5)} = \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} \int\limits_s^{\tau_{k(t)}} \delta^{-1}|\xi^{\delta}_{k(u)+1}|du\,(t-s)^{-\alpha-1}\, ds$$

$$= \delta^{-1} \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} |\xi^{\delta}_{k(u)+1}| \int\limits_0^{u} (t-s)^{-\alpha-1}\, ds\, du \leq \left(\alpha^{-1} D_1\right)\, \delta^{\beta-1} \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} (t-u)^{-\alpha}\, du$$

$$\leq \left(\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1} D_1\right)\, \delta^{\beta-1}\, t^{1-\alpha} = C\, \delta^{\gamma}.$$

Возвращаясь к неравенству (6.12), получаем

$$\int\limits_0^{\tau_{k(t)}} \phi^{\delta}_{s,t}\, ds \leq C \sum_{i=1}^{5} Q_t^{(i)} \leq C\Bigg(1 + \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} |\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(t-u)^{-2\alpha}\, du$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_{k(t)}} \int\limits_0^{\tau_{k(r)}} \phi^{\delta}_{u,r}\, du\,(t-r)^{-\alpha} dr + \delta^{\lambda}|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}|\Bigg).$$

Вместе с (6.11) это дает оценку

$$|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(t)}} \phi_{s,t}^{\delta}\, ds \le C\Bigg(1 + \delta^{\lambda}|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^t \Bigg(|\widetilde{Y}_r^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(r)}} \phi_{u,r}^{\delta}\, du\Bigg)$$
$$\times\Big(1 + r^{-\alpha} + (t-r)^{-\alpha} + (t-r)^{-2\alpha}\Big)\, du\Bigg).$$

Поскольку постоянная $C = C(\omega)$ не зависит от параметра δ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta_0 > 0$ и $\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0} \subset \Omega$, что $P(\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}) > 1 - \varepsilon$ и для любых $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ выполняется

$$C\,\delta^{\lambda}|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| \le \frac{1}{2}\left(|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(t)}} \phi_{s,t}^{\delta}\, ds\right). \tag{6.15}$$

Кроме того, мы можем применить следующую оценку к подынтегральному ядру:

$$\begin{aligned} &1 + r^{-\alpha} + (t-r)^{-\alpha} + (t-r)^{-2\alpha} \\ &\le 1 + t^{-\alpha}(r/t)^{-\alpha} + t^{-\alpha}(1-r/t)^{-\alpha} + t^{-2\alpha}(1-r/t)^{-2\alpha} \\ &\le \big(1 + t^{-\alpha}\big)(r/t)^{-2\alpha} + \big(t^{-\alpha} + t^{-2\alpha}\big)(1-r/t)^{-2\alpha} \\ &\le t^{4\alpha}\big(1 + 2t^{-\alpha} + t^{-2\alpha}\big)r^{-2\alpha}(t-r)^{-2\alpha} \\ &\le C(\alpha,T)\, t^{2\alpha} r^{-2\alpha}(t-r)^{-2\alpha}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Учитывая (6.15) и (6.16), из (6.14) получаем, что для $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ выполняется неравенство

$$|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(t)}} \phi_{s,t}^{\delta}\, ds \le C + C\,t^{2\alpha}\int_0^t \left(|\widetilde{Y}_r^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(r)}} \phi_{u,r}^{\delta}\, du\right)\cdot r^{-2\alpha}(t-r)^{-2\alpha} du.$$

Из леммы Гронуолла (Утверждение 4) следует искомая оценка

$$|\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| \le |\widetilde{Y}_t^{\delta,*}| + \int_0^{\tau_{k(t)}} \phi_{s,t}^{\delta}\, ds \le C\,c_1(\alpha)\exp\Big\{c_2(\alpha)\, C^{1/(1-\alpha)} T\Big\} =: C_0$$

при $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$ и $\delta < \delta_0$, причем $C_0 = C_0(\omega; \alpha, \gamma, \rho, x_0, b, T)$ не зависит от δ, δ_0 или ε.

Лемма 2. *Для* $0 < \lambda < \min(H-1/2, \gamma)$ *существует случайная величина* $C_1 = C_1(\omega; \lambda, \gamma, X_o, b, T)$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $0 < \delta_0 < 1$ *и множество элементарных событий* $\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0} \subset \Omega$, *для которого* $P(\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}) > 1 - \varepsilon$, *такие, что для любых* $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ *выполняется*

$$\sup_{u \in [0,T]} |X_u - \widetilde{Y}_u^{\delta}| \le C_1\, \delta^{\lambda}.$$

Доказательство. Выберем постоянные α и ρ такие, что $1 - H < \alpha < 1/2$, $0 < \rho < H - \alpha - \lambda$, и будем считать их зафиксированными на протяжении всего доказательства. Кроме того, воспользуемся Леммой 1 и для $\varepsilon > 0$ найдем $\widetilde{\delta}_0 \in (0,1)$ и $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0} \subset \Omega$ такие, что $P(\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0}) > 1 - \varepsilon$ и для любых $\omega \in \widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \widetilde{\delta}_0$ выполняется

$$\sup_{u \in [0,T]} |\widetilde{Y}_u^{\delta}| \le C_0. \tag{6.17}$$

В последующих выкладках будем предполагать, что $\omega \in \widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \widetilde{\delta}_0$.

Введем обозначение

$$Z_t^{\delta} := \sup_{s \in [o,t]} |X_s - \widetilde{Y}_s^{\delta}|,$$

а также для двух процессов V, W построим отображение

$$\Phi_{s,t}(V, W) := |V_t - W_t - V_s + W_s|(t-s)^{-\alpha-1}, \quad s < t.$$

Так же, как и в предыдущей лемме, мы будем оценивать сумму $Z_t^{\delta} + \int\limits_0^t \Phi_{s,t}(X, \widetilde{Y}^{\delta})\, ds$ с помощью леммы Гронуолла.

Из определения процессов X и $\widetilde{Y}^{\delta}$ имеем:

$$Z_t^{\delta} \le \sup_{s \in [o,t]} b \Big| \int\limits_0^s (X_u - \widetilde{Y}_u^{\delta})\, dB_u \Big| + \sup_{s \in [o,t]} b \Big| \int\limits_0^s (\widetilde{Y}_u^{\delta} - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^{\delta})\, dB_u \Big|$$
$$+ \Xi_{0,N}^{\,\delta} \le I_1 + I_2 + 2D\, \delta^{\gamma}.$$

С помощью Утверждения 3 оценим первые два слагаемые в полученном выражении:

$$I_1 = \sup_{s\in[o,t]} b|\int_0^s (X_u - \widetilde{Y}_u^\delta)\, dB_u|$$
$$\le C\left(\int_0^t Z_u^\delta\, u^{-\alpha}\, du + \int_0^t\int_0^r \Phi_{u,r}(X, \widetilde{Y}^\delta)\, du\, dr\right);$$

$$I_2 = \sup_{s\in[o,t]} b|\int_0^s (\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta)\, dB_u|$$
$$\le C\left(\int_0^t |\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta|\, u^{-\alpha}\, du + \int_0^t\int_0^r \Phi_{u,r}(\widetilde{Y}^\delta, \widetilde{Y}_{\tau_{k(\cdot)}}^\delta)\, du\, dr\right)$$
$$=: C(I_3 + I_4).$$

Из неравенств (6.8) и (6.17) получаем оценку

$$|\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta| \le C\,\delta^{H-\rho}, \quad u\in[0,T]. \tag{6.18}$$

Но, аналогично (6.8) и с учетом (6.17), не сложно получить и более общую оценку

$$|\widetilde{Y}_r^\delta - \widetilde{Y}_u^\delta| \le C\,\left((r-u)^{H-\rho} + \delta^\gamma(r-u)\right), \quad u\in[\tau_{k(r)}, r]. \tag{6.19}$$

Из (6.18) и (6.19) следует неравенство:

$$I_3 = \int_0^t |\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta|\, u^{-\alpha}\, du \le C\,\delta^{H-\rho},$$

а также

$$I_4 = \int_0^t\int_0^r \Phi_{u,r}(\widetilde{Y}^\delta, \widetilde{Y}_{\tau_{k(\cdot)}}^\delta)\, du\, dr$$
$$= \int_0^t\int_0^{\tau_{k(r)}} |\widetilde{Y}_r^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(r)}}^\delta - \widetilde{Y}_u^\delta + \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr$$

$$+\int_0^t \int_{\tau_{k(r)}}^r |\widetilde{Y}_r^\delta - \widetilde{Y}_u^\delta|(r-u)^{-\alpha-1} du\, dr$$

$$\le C\,\delta^{H-\rho} \int_0^t \int_0^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1} du\, dr$$

$$+C \int_0^t \int_{\tau_{k(r)}}^r \left((r-u)^{H-\rho-\alpha-1} + \delta^\gamma (r-u)^{-\alpha}\right) du\, dr$$

$$\le C\,\delta^{H-\rho} \int_0^t (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha} dr$$

$$+C \int_0^t \left((r-\tau_{k(r)})^{H-\rho-\alpha} + \delta^\gamma (r-\tau_{k(r)})^{1-\alpha}\right) dr \le C\,\delta^\lambda.$$

Объединяя полученные оценки членов $I_1 - I_4$ в выражении для Z_t^δ, получаем

$$Z_t^\delta \le C \left(\delta^\lambda + \int_0^t Z_u^\delta\, u^{-\alpha}\, du + \int_0^t \int_0^r \Phi_{u,r}(X, \widetilde{Y}^\delta)\, du\, dr \right). \qquad (6.20)$$

Теперь нужно оценить интеграл $\int_0^t \Phi_{s,t}(X, \widetilde{Y}^\delta)\, ds$. Из определений процессов X, $\widetilde{Y}^\delta$ получаем следующее неравенство:

$$|X_t - \widetilde{Y}_t^\delta - X_s + \widetilde{Y}_s^\delta|$$

$$\le b\Big|\int_s^t (X_u - \widetilde{Y}_u^\delta)\, dB_u\Big| + b\Big|\int_s^t (\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta)\, dB_u\Big| + \Big|\int_s^t \delta^{-1} \xi_{k(u)+1}^\delta du\Big|$$

$$\le C\Big(\int_s^t Z_u^\delta\, (u-s)^{-\alpha}\, du + \int_s^t \int_s^r \Phi_{u,r}(X, \widetilde{Y}^\delta)\, du\, dr$$

$$+\int_s^t |\widetilde{Y}_u^\delta - \widetilde{Y}_{\tau_{k(u)}}^\delta|\, (u-s)^{-\alpha}\, du + \int_s^t \int_s^r \Phi_{u,r}(\widetilde{Y}^\delta, \widetilde{Y}_{\tau_{k(\cdot)}}^\delta)\, du\, dr\Big)$$

$$+\int_s^t \delta^{-1}|\xi^\delta_{k(u)+1}|du = C\sum_{i=1}^5 v^{(i)}_{s,t}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \Phi_{s,t}(X,\widetilde{Y}^\delta)\,ds \le C\sum_{i=1}^5\int_0^t v^{(i)}_{s,t}(t-s)^{-\alpha-1}\,ds =: C\sum_{i=1}^5 V^{(i)}_t.$$

Слагаемые $V^{(1)}_t$, $V^{(2)}_t$ оцениваются аналогично соответствующим членам $Q^{(i)}_t$ в доказательстве предыдущей леммы. А именно, неравенство

$$V^{(1)}_t = \int_0^t\int_s^t Z^\delta_u\,(u-s)^{-\alpha}\,du\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds \le C\int_0^t Z^\delta_u(t-u)^{-2\alpha}\,du$$

получается аналогично оценке члена $Q^{(2)}_t$, а неравенство

$$\begin{aligned} V^{(2)}_t &= \int_0^t\int_s^t\int_s^r \Phi_{u,r}(X,\widetilde{Y}^\delta)\,du\,dr\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds \\ &\le C\int_0^t\int_0^r \Phi_{u,r}(X,\widetilde{Y}^\delta)\,du\,(t-r)^{-\alpha}dr \end{aligned}$$

эквивалентно оценке члена $Q^{(3)}_t$.

Оценка сверху слагаемого $V^{(3)}_t$ легко получается благодаря неравенству (6.18):

$$\begin{aligned} V^{(3)}_t &= \int_0^t\int_s^t |\widetilde{Y}^\delta_u - \widetilde{Y}^\delta_{\tau_{k(u)}}|(u-s)^{-\alpha}\,du\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds \\ &\le C\,\delta^{H-\rho}\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\,ds = C\,\delta^{H-\rho}. \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить слагаемое $V^{(4)}_t$, нам понадобится неравенство

$$\int_0^t (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,(t-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,dr \le C\,\delta^{-\alpha}. \qquad (6.21)$$

Частично, это неравенство уже было доказано в формуле (6.13) для области интегрирования от 0 до $\tau_{k(t)}$. Потому, чтобы убедиться в правильности (6.21), заметим, что

$$\int_{\tau_{k(t)}}^t (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,(t-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,dr$$

$$=(t-\tau_{k(t)})^{-\alpha}\int_{\tau_{k(t)}}^t (r-\tau_{k(t)})^{-\alpha}\,dr \le C\,\delta^{1-2\alpha}\le C\,\delta^{-\alpha}.$$

Используя неравенства (6.18), (6.19) и (6.21), получаем:

$$V_t^{(4)}=\int_0^t\int_s^t\int_s^r \Phi_{u,r}(\widetilde{Y}^{\delta},\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(\cdot)}})\,du\,dr\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds$$

$$=\int_0^t\int_0^r \Phi_{u,r}(\widetilde{Y}^{\delta},\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(\cdot)}})\int_0^u (t-s)^{-\alpha-1}\,ds\,du\,dr$$

$$\le \alpha^{-1}\int_0^t\int_0^{\tau_{k(r)}} |\widetilde{Y}^{\delta}_r-\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(r)}}-\widetilde{Y}^{\delta}_u+\widetilde{Y}^{\delta}_{\tau_{k(u)}}|(r-u)^{-\alpha-1}\,(t-u)^{-\alpha}\,du\,dr$$

$$+\alpha^{-1}\int_0^t\int_{\tau_{k(r)}}^r |\widetilde{Y}^{\delta}_r-\widetilde{Y}^{\delta}_u|(r-u)^{-\alpha-1}\,(t-u)^{-\alpha}\,du\,dr$$

$$\le C\,\delta^{H-\rho}\int_0^t\int_0^{\tau_{k(r)}} (r-u)^{-\alpha-1}\,(t-u)^{-\alpha}\,du\,dr$$

$$+C\int_0^t\int_{\tau_{k(r)}}^r \left((r-u)^{H-\rho-\alpha-1}+\delta^{\gamma}(r-u)^{-\alpha}\right)(t-u)^{-\alpha}\,du\,dr$$

$$\leq C\,\delta^{H-\rho}\int\limits_0^t (r-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,(t-\tau_{k(r)})^{-\alpha}\,dr$$

$$+C\int\limits_0^t \left((r-\tau_{k(r)})^{H-\rho-\alpha}+\delta^{\gamma}(r-\tau_{k(r)})^{1-\alpha}\right)(t-r)^{-\alpha}\,dr$$

$$\leq C\,\left(\delta^{H-\rho-\alpha}+\delta^{\gamma+1-\alpha}\right)\leq C\,\delta^{\lambda}.$$

Оценка слагаемого $V_t^{(5)}$ получается аналогично оценке слагаемого $Q_t^{(5)}$ в доказательстве предыдущей леммы:

$$V_t^{(5)}=\int\limits_0^t\int\limits_s^t \delta^{-1}|\xi^{\delta}_{k(u)+1}|du\,(t-s)^{-\alpha-1}\,ds\leq C\,\delta^{\gamma}.$$

Складывая полученные неравенства для слагаемых $V_t^{(1)}$ – $V_t^{(5)}$, получаем оценку

$$\int\limits_0^t \Phi_{s,t}(X,\widetilde{Y}^{\delta})\,ds\leq C\Bigg(\int\limits_0^t Z_u^{\delta}\,(t-u)^{-2\alpha}\,du$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^r \Phi_{u,r}(X,\widetilde{Y}^{\delta})\,du\,(t-r)^{-\alpha}dr+\delta^{\lambda}\Bigg). \tag{6.22}$$

Неравенства (6.20) и (6.22) с применением неравенства (6.16) приводят к оценке

$$Z_t^{\delta}+\int\limits_0^t \Phi_{s,t}(X,\widetilde{Y}^{\delta})\,ds\leq C\,\delta^{\lambda}$$

$$+C\,t^{2\alpha}\int\limits_0^t\left(Z_r^{\delta}+\int\limits_0^r \Phi_{u,r}(X,\widetilde{Y}^{\delta})\,du\right)\cdot r^{-2\alpha}(t-r)^{-2\alpha}du,$$

которая справедлива для всех $\omega\in\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0}$ и $\delta<\widetilde{\delta}_0$. Утверждение леммы с $\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}:=\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta_0:=\widetilde{\delta}_0$ и $C_1:=C\,c_1(\alpha)\exp\left\{c_2(\alpha)\,C^{1/(1-\alpha)}T\right\}$ теперь следует из леммы Гроноулла (Утверждение 4). □

Лемма 3. *Пусть $\lambda < H$. Тогда найдется случайная величина $C_2 = C_2(\omega; \lambda, \gamma, X_o, b, T)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $0 < \delta_0 < 1$ и множество $\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0} \subset \Omega$, $P(\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}) > 1 - \varepsilon$, такие, что для любых $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ имеет место неравенство*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{Y}_t^\delta - Y_t^\delta| \le C_2\, \delta^\lambda.$$

Доказательство. Выберем произвольное $1-H < \lambda < H$, и зафиксируем некоторое $0 < \rho < H - \lambda$. Воспользуемся Леммой 1 и для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta_0 \in (0,1)$ и $\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, такие что $P(\Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}) > 1-\varepsilon$ и для $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ выполняется

$$\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{Y}_t^\delta| \le C_0. \tag{6.23}$$

Утверждение леммы получаем с помощью неравенства (6.23), Утверждения 2 и условия (6.4):

$$\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{Y}_t^\delta - Y_t^\delta| = \sup_{t\in[0,T]} \left|(1 + b\widetilde{Y}_t^\delta)\,(B_t - B_{\tau_{k(t)}}) + \delta^{-1}\xi^\delta_{k(t)+1}(t - \tau_{k(t)})\right|$$

$$\le \sup_{t\in[0,T]} \Big((1 + bC_0)\, K(t - \tau_{k(t)})^{H-\rho} + |\xi^\delta_{k(t)+1}|\Big) \le C\left(\delta^{H-\rho} + \delta^{1+\gamma}\right). \square$$

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что из Лемм 2, 3 следуют сходимости (6.6). Продемонстрируем это на примере первой сходимости

$$Z_t^\delta := \sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{Y}_t^\delta - X_t| \to^P 0, \quad \delta \to 0, \tag{6.24}$$

которая получается из результата Леммы 2.

Пусть некоторое число $\Delta > 0$ фиксировано. Докажем, что имеет место сходимость

$$P(Z_t^\delta \ge \Delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{6.25}$$

Для этого фиксируем λ, удовлетворяющее условию $0 < \lambda < \min(H - 1/2, \gamma)$. Исходя из Леммы 2, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon/2) > 0$ и $\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0} \subset \Omega$ такие, что $P(\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}) > 1 - \varepsilon/2$ и для любых $\omega \in \Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}$, $\delta < \delta_0$ выполняется условие

$$Z_t^\delta \le C_1\, \delta^\lambda.$$

Поскольку $C_1 = C_1(\omega)$ не зависит от δ, то случайная величина

$$C_1(\omega)\,\delta^\lambda \cdot \mathbb{I}_{\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}}(\omega) \to^P 0, \quad \delta \to 0.$$

Это значит, что существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$P(C_1\,\delta^\lambda \cdot \mathbb{I}_{\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}} > \Delta) < \varepsilon/2, \quad \delta < \delta_1.$$

Следовательно, для любого $\delta < \min(\delta_0, \delta_1)$ выполняется неравенство

$$P(Z_t^\delta \geq \Delta) \leq P(C_1\,\delta^\lambda \cdot \mathbb{I}_{\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}} > \Delta) + P(\Omega\backslash\Omega_{\varepsilon/2,\,\delta_0}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что доказывает (6.25) и (6.24) в силу произвольности $\Delta > 0$.

Сходимость $\sup\limits_{t\in[0,T]} |Y_t^\delta - \widetilde{Y}_t^\delta| \to^P 0$ в (6.6) доказывается аналогично. □

7. Вспомогательные утверждения

Приведем без доказательств известные утверждения, использованные в ходе доказательства Теоремы 2.

Утверждение 2. *Пусть $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ есть ДБД с параметром Херста $H \in (0,1)$. Тогда для любого $0 < \rho < H$ существует случайная величина $K = K(\omega; \rho, T)$ такая, что почти наверное для любых $0 \leq s, t \leq T$ справедлива оценка*

$$|B_t - B_s| \leq K|t-s|^{H-\rho}.$$

Доказательство. См. Лемму 7.4 [16].

Для функции $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1)$ определим норму

$$\|f\|_{\alpha,1;(0,T)} := \int\limits_0^T \frac{|f(u)|}{u^\alpha} du + \int\limits_0^T \int\limits_0^y \frac{|f(y)-f(u)|}{(y-u)^{\alpha+1}} du\,dy.$$

Множество функций f таких, что $\|f\|_{\alpha,1;(0,T)} < \infty$ есть обобщение соболевского пространства на случай дробных производных и обозначается $W_0^{\alpha,1}(0,T)$.

Для сужения функции f на $[s,t] \subset [0,T]$ также введем норму

$$\|f\|_{\alpha,1;(s,t)} := \int\limits_s^t \frac{|f(u)|}{(u-s)^\alpha} du + \int\limits_s^t \int\limits_s^y \frac{|f(y)-f(u)|}{(y-u)^{\alpha+1}} du\,dy.$$

Утверждение 3. *Пусть для случайного процесса* $Z = \{Z_t, t \in [0,T]\}$ *и* $\alpha \in (1-H, 1/2)$ *с вероятностью* 1 *выполняется* $\|Z\|_{\alpha,1;(s,t)} < \infty$. *Тогда для интеграла* $\int\limits_s^t Z_u dB_u$ *справедлива оценка*

$$\Big|\int\limits_s^t Z_u dB_u\Big| \le G\|Z\|_{\alpha,1;(s,t)},$$

где случайная величина $G = G(w;\alpha,T)$ *конечна с вероятностью* 1 *и не зависит от выбора* s, t *и процесса* Z.

Доказательство. Следствие Предложения 4.1 [16] и Леммы 7.4 [16]. $\square$

Также мы пользовались следующим вариантом леммы Гронуолла.

Утверждение 4. *Фиксируем* $0 \le \alpha < 1$, $a, b > 0$. *Пусть* $x : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – *непрерывная функция, для которой выполняется*

$$x_t \le a + b\,t^\alpha \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\alpha} x_s ds.$$

Тогда

$$x_t \le a\,c_1 \exp\left\{c_2\, b^{1/(1-\alpha)} t\right\},$$

где $c_1 = c_1(\alpha)$, $c_2 = c_2(\alpha)$ – *положительные постоянные, зависящие только от* α.

Доказательство. См. Лемму 7.6 [16]. $\square$

В заключение автор высказывает искреннюю благодарность Михаилу Анатолиевичу Лифшицу и Юлии Степановне Мишуре за полезные советы и внимание к данной работе.

Литература

1. W. W. Charemza, M. A. Lifshits, and S. B. Makarova, *Conditional testing for unit-root bilienarity in financial time series: some theoretical and empirical results.* — Journal of Economic Dynamics and Control **29** (2005), 63–96.
2. М. А. Лифшиц, *Принцип инвариантности в билинейной модели со слабой нелинейностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **320** (2004), 97–105.

3. J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes.* Chapman and Hall, New York (1994).
4. A. W. Lo and A. C. MacKinlay, *Stock Market Prices do not follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test.* — Rev. of Financial Studies **1** (1988), 41–66.
5. E. E. Peters, *Fractal market analysis.* Wiley, New York (1994).
6. W. Willinger, M. S. Taqqu, and V. Teverovsky, *Stock Market Prices and Long-Range Dependence.* — Finance and Stochastics **3** (1999), 1–13.
7. A. N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance.* Word Scientific, Singapore (1999).
8. I. Adelman, *Long cycles – fact or artifact?.* — Amer. Economic Rev. **60** (1965), 444–463.
9. C. W. J. Granger, *The typical spectral shape of an economic variable.* — Econometrica **34** (1966), 150–161.
10. A. N. Shiryaev, *On arbitrage and replication for fractal models.* Proc. Workshop on Mathematical Finance, Paris, INRIA (1998), 1–7.
11. T. Sottinen and E. Valkeila, *On arbitrage and replication in the fractional Black-Scholes pricing model.* — Statistics and Decisions **21** (2003), 93–107.
12. T. Androshchuk and Yu. Mishura, *Mixed Brownian - Fractional Brownian Model: absence of arbitrage and related topics.* — Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes **78**, no. 5 (2006), 281–300.
13. B. Mandelbrot and J. Van Ness, *Fractional Brownian motion, fractional noises and applications.* — SIAM Review **10**, no. 4 (1968), 422–437.
14. T. Sottinen and E. Valkeila, *Fractional Brownian motion as a model in Finance.* — Preprint-302 (2001), 16 p.
15. M. Zähle, *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. Part* I. — Probability Theory and Related Fields **111** (1998), 33–372.
16. D. Nualart and A. Răscanu, *Differential equations driven by fractional Brownian motion.* — Collect. Math. **53**, no. 1 (2002), 55–81.
17. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* “Наука”, М. (1977), 352 с.
18. S. J. Lin, *Stochastic analysis of fractional Brownian motion.* — Stochastics and stochastic reports collect **55** (1995), 121–140.
19. A. Neuenkirch and I. Nourdin, *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion.* In preparation (2006).
20. Yu. Mishura and G. Shevchenko, *The rate of convergence for Euler approximation of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion.* — Submitted in: Stochastics: An Internationa Journal of Probability and Stochastics Processes (2006).

Androshchuk T. Asymptotic behavior of the Unit Root Bilinear model with fractional Gaussian noise. Euler's scheme with small perturbations.

We consider the Unit Root Bilinear model with a sequence of innovations given by the fractional Gaussian noise (increases of the fractional

Brownian motion). For such a model we prove a variant of the Donsker–Prohorov limit theorem and obtain convergence of the model in probability to solution of a proper stochastic differential equation with fBm. The proof is based on the result about convergence of the Euler's scheme with 'small perturbations' for SDE with fBm, which is also proved.

Киевский Национальный Университет
им. Тараса Шевченка,
механико-математический факультет

E-mail: nutaras@univ.kiev.ua

Поступило 20 ноября 2006 г.