Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 340, 2006 г.

А. С. Чухнов

УДАЛЕНИЕ ВЕРШИН ИЗ k-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ БЕЗ ПОТЕРИ k-СВЯЗНОСТИ

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению структуры k-связных графов. В статье мы будем рассматривать конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Граф называется *k-связным*, если в нем не менее $k+1$ вершины и после удаления любого набора из $k-1$ вершины получается связный граф.

Важную роль в изучении связных графов играют блоки (т.е. максимальные по включению двусвязные подграфы) и точки сочленения. Аналогом точек сочленения в k-связном графе являются k-разделяющие множества, то есть такие k-элементные множества вершин графа, при удалении которых теряется связность. Здесь будет использовано определение блока в k-связном графе, введенное в работе [3].

Легко доказать, что из связного графа можно удалить без потери связности любое множество внутренних, то есть не являющихся точками сочленения, вершин нескольких (не обязательно всех) различных блоков. Для k-связного графа напрашивающееся обобщение, вообще говоря, неверно: не всегда возможно удалить любой набор внутренних вершин различных блоков так, чтобы сохранилась k-связность. Однако при определенных условиях, наложенных на граф и на блоки, из которых берутся вершины, из этих блоков можно выбрать по одной вершине так, что при удалении любого подмножества этого множества вершин k-связность сохраняется. Иными словами, выбранное множество в каком-то смысле никак не влияет на k-связность графа.

Наилучших результатов удается достигнуть при изучении k-связных графов, степени всех вершин которых хотя бы $\frac{3k-1}{2}$. Впервые они появились в работе [1], где было доказано, что из любого такого графа можно удалить какую-нибудь вершину без потери k-связности. В работе [2] было доказано, что в любом k-связном графе, степень всех вершин которого хотя бы $2k$, можно выбрать по одной вершине из всех блоков, *внутренности* которых не меньше, чем их *границы*, так, чтобы удаление любого подмножества этого множества не лишало граф k-связности.

В настоящей работе доказаны аналогичные утверждения для графов, степени вершин которых не меньше $\frac{3k-1}{2}$ и внутренности которых хотя бы в два раза больше их границ, а также для графов, степени вершин которых хотя бы $\frac{3k}{2}$, а внутренности строго больше, чем границы (см. теоремы 1 и 2).

2. Основные понятия

Для произвольного графа G через $V(G)$ мы, как обычно, будем обозначать множество всех его вершин, а через $E(G)$ – множество всех его ребер. Степень вершины v в графе G будем обозначать через $\deg v$.

Для $W \subset V(G)$ через $G - W$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер.

Под *компонентой связности* графа G мы будем понимать максимальный по включению связный подграф графа G.

Количество элементов в любом множестве M будем обозначать через $|M|$. Для краткости обозначений количество вершин графа G, то есть мощность $V(G)$, будем обозначать также через $|G|$.

Определение 1. *Назовем множество R вершин графа G разделяющим, если граф $G - R$ несвязен. В случаях, когда необходимо указать количество элементов разделяющего множества, мы будем называть разделяющее множество из x вершин x-разделяющим.*

Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности. Множество всех k-разделяющих множеств графа G будем обозначать через $\mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 2. *Пусть G – k-связный граф, $R \in \mathfrak{R}_k(G)$, H – компонента связности графа $G - R$. Тогда назовем H компонентой графа G. Также будем говорить, что компонента H в графе G отделяется множеством R.*

Компоненту k-связного графа G будем называть минимальной, если она не содержит никакой другой компоненты, отделяемой *каким-нибудь k-разделяющим множеством.*

Определение 3. *Пусть $B \subset V(G)$ – максимальное по включению множество вершин в k-связном графе G, такое, что для разделения любых двух вершин $x, y \in B$ необходимо удалить хотя бы $k+1$ вершину. Тогда назовем B блоком.*

Множество вершин блока B, не входящих в k-разделяющие множества графа G, назовем внутренностью B и обозначим $I(B)$. Множество вершин, входящих в какие-либо k-разделяющие множества, обозначим $R(B)$ и будем называть границей блока B. Вершины из $I(B)$ и $R(B)$ будем называть внутренними и граничными, соответственно.

Если $I(B)$ пусто, будем называть блок B пустым. В противном случае будем называть его непустым.

Лемма 1. *Для любых двух пересекающихся блоков B_1 и B_2 k-связного графа G существует $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, целиком содержащее $B_1 \cap B_2$.*

Доказательство данной леммы содержится в работе [3].

Это означает, что используемое определение границ и внутренностей блоков удовлетворяет естественному условию: блоки могут пересекаться только по граничным вершинам.

3. Удаление вершин

В дальнейшем граф G будем всегда считать k-связным. Также будем считать, что степени всех его вершин не менее $\frac{3k-1}{2}$.

Из определения блока следует, что если удалить какую-нибудь внутреннюю вершину непустого блока k-связного графа G, то граф останется k-связным. Покажем, при каких условиях, наложенных на граф и на набор блоков, из всех блоков этого набора можно удалить по вершине без потери k-связности.

Легко доказать, что внутренности никаких двух различных блоков не пересекаются. Следовательно, можно говорить о множествах внутренних вершин различных блоков графа G.

Лемма 2. *Рассмотрим множество $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (где $n > 1$) вершин графа G, никакие две из которых не лежат в одной минимальной компоненте, обладающее следующими свойствами:*

1) *существует $S_1 \in \mathfrak{R}_k(G)$, которое разделяет множество M;*

2) при удалении вершин любого собственного подмножества множества M граф G сохраняет k-связность.

Пусть $S_1, S_2, \dots, S_m$ – все k-разделяющие множества графа G, которые разделяют M. Положим $S = \cap_{i=1}^{n} S_i$.

Тогда после удаления любой $k-1$ вершины из графа $G - M$ все вершины, не входящие в S, попадут в одну компоненту связности. Более того, количество не вошедших в эту компоненту связности вершин из множества S не превосходит $\frac{k-1}{2}$.

Данная лемма для чуть более широкого класса графов доказана в работе [2].

Определение 4. *Множество M внутренних вершин различных блоков графа G, содержащее не более чем по одной вершине каждого блока, назовем неудалимым, если при удалении какого-то подмножества множества M (возможно, самого M) граф G теряет k-связность. Если при удалении любого подмножества множества M граф не теряет k-связности, назовем M удалимым.*

Лемма 3. *Если M – минимальное по включению неудалимое множество графа G, то для него выполняются условия 1) и 2) леммы 2.*

Доказательство. В работе [3] доказано, что любая минимальная компонента является внутренностью какого-то блока. Значит, две внутренние вершины различных блоков не могут лежать в одной минимальной компоненте. Выполнение условия 1) леммы 2 следует из того, что два любых различных непустых блока, очевидно, должны разделяться каким-либо множеством из $\mathfrak{R}_k(G)$; условие 2) леммы 2 выполняется, поскольку M – минимальное по включению неудалимое множество. $\square$

Теорема 1. *Пусть G – k-связный граф, степени всех вершин которого хотя бы $\frac{3k-1}{2}$. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ – набор блоков в G, такой, что $|I(B_i)| > 2|R(B_i)|$. Тогда можно выбрать по одной вершине из внутренностей этих блоков так, чтобы эти вершины составили удалимое множество.*

Доказательство. Пусть $R(B_i) = \{d_1, \dots, d_q\}$. Рассмотрим вершину d_1 и отметим в $I(B_i)$ одну из смежных с ней вершин (если такие есть). Затем рассмотрим вершину d_2 и отметим в $I(B_i)$ одну из не отмеченных вершин, смежных с d_2 (если такая вершина есть). И так далее. На шаге с номером j мы отметим в $I(B_i)$ одну из еще неотмеченных вершин, смежных с d_j (если такие вершины есть). Назовем отмеченные в ходе этого процесса вершины отмеченными вершинами первого рода. Их не более $|R(B_i)|$.

Повторим этот процесс еще раз, на шаге с номером j отмечая в $I(B_i)$ одну из еще не отмеченных вершин, смежных с d_j (если такие вершины есть). Вершины, отмеченные в ходе этого процесса, назовем отмеченными вершинами второго рода. Их также не более $|R(B_i)|$. Следовательно, всего мы отметили не более $2|R(B_i)|$ вершин, и хотя бы одна вершина в $I(B_i)$ осталась неотмеченной. Выберем в блоке B_i любую неотмеченную внутреннюю вершину v_i.

Докажем, что множество $\{v_i\}_{i=1}^n$ удалимое. Предположим противное. Тогда в этом множестве есть какое-то минимальное по включению неудалимое подмножество. Не умаляя общности, можно считать, что это $M = \{v_i\}_{i=1}^l$. В графе $G - M$ есть $(k-1)$-разделяющее множество R. Применив лемму 3 и лемму 2, получим, что все компоненты графа $G - M$, отделяемые множеством R, кроме, возможно, одной, содержат в сумме не более $\frac{k-1}{2}$ вершин, и все их вершины лежат в пересечении всех множеств из $\mathfrak{R}_k(G)$, разделяющих M. Выберем среди этих компонент одну, назовем ее F_1. Это можно сделать, так как в противном случае множество R отделяет в графе $G - M$ всего одно компоненту. Итак, F_1 – компонента графа $G - M$, отделяемая множеством R, которая лежит в любом множестве из $\mathfrak{R}_k(G)$, разделяющем M. В частности, среди вершин F_1 нет внутренних вершин блоков. При этом $|F_1| \leqslant \frac{k-1}{2}$ (см. рис. 1).

Проведем подсчет суммы степеней вершин компоненты F_1. Рассмотрим блок B_i (где $1 \leqslant i \leqslant l$). Пусть в B_i содержатся t_i отмеченных вершин первого рода и s_i отмеченных вершин второго рода, смежных с вершинами из F_1. Отмеченные вершины не могут входить ни в F_1, поскольку являются внутренними вершинами блоков, ни в M. Значит, все эти вершины входят в R, Получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} (t_i + s_i) \leqslant k - 1.$$

В процессе выбора отмеченных вершин второго рода мы в некотором порядке рассмотрели все вершины множества F_1 и на каждом шаге отметили не более чем одну из еще не отмеченных

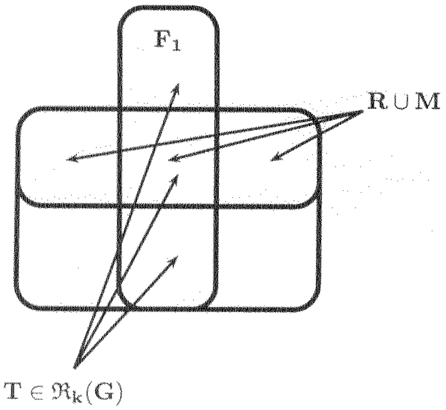

Рис. 1.

к этому моменту вершин, смежных с рассматриваемой вершиной из F_1. Поскольку в блоке B_i оказалось s_i отмеченных вершин второго рода, смежных с F_1, это означает, что, рассматривая B_i, мы отмечали вершины второго рода не более чем на s_i шагах, сделанных с вершинами из F_1. Если в F_1 есть более чем s_i вершин, смежных с v_i, то при рассмотрении одной из этих вершин мы не получили ни одной новой отмеченной вершины второго рода. Но это невозможно, поскольку в этот момент была неотмеченная вершина, смежная с рассматриваемой (вершина v_i). Поэтому v_i смежна не более чем с s_i вершинами из F_1.

Аналогично, v_i смежна не более чем с t_i вершинами из F_1. Следовательно, v_i смежна не более чем с $\frac{(t_i+s_i)}{2}$ вершинами из F_1. Сложив эти неравенства для всех i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ мы получим, что от вершин $M = \{v_i\}_{i=1}^{l}$ к вершинам множества F_1 выходило не более чем $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(t_i + s_i)$ ребер.

Вершина из множества F_1 может быть смежна в графе G только с вершинами множества $M = \{v_i\}_{i=1}^{l}$, вершинами $(k-1)$-разделяющего множества R и другими вершинами из F_1. Обозначим для удобства количество вершин в F_1 за p.

Учитывая, что степень каждой вершины множества F_1 должна быть не менее $\frac{3k-1}{2}$, и неравенства на сумму t_i и s_i, получаем неравенство на суммарную степень вершин F_1:

$$p\left(\frac{3k-1}{2}\right) \leqslant p(p-1)+p(k-1)+\frac{\sum_{i=1}^{l}(t_i+s_i)}{2} \leqslant$$
$$\leqslant p(p-1)+p(k-1)+\frac{k-1}{2},$$

откуда

$$0 \leqslant p^2 - p\left(\frac{k+3}{2}\right)+\frac{k-1}{2} = (p-1)\left(p-\frac{k+1}{2}\right)-1.$$

В правой части мы получили квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, принимающий при $p=1$ и $p=\frac{k+1}{2}$ значение -1. Но $1 \leqslant p \leqslant \frac{k-1}{2}$. Следовательно, при всех допустимых p значение этого трехчлена отрицательно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 2. *Пусть G – k-связный граф, степени всех вершин которого хотя бы $\frac{3k}{2}$, $\{B_i\}_{i=1}^n$ – набор блоков в графе G, такой, что $|I(B_i)| > |R(B_i)|+1$. Тогда можно выбрать по одной вершине из внутренностей этих блоков так, чтобы эти вершины составили удалимое множество.*

Доказательство. Поскольку доказательство данной теоремы весьма громоздко, изложим сначала его план.

В начале доказательства мы отметим несколько вершин во внутренности каждого блока так, чтобы неотмеченными остались хотя бы 2 вершины и при этом каждая вершина из границ блока оказалась смежна хотя бы с одной отмеченной вершиной. Будем искать удалимое множество среди оставшихся неотмеченными вершин. Для этого рассмотрим минимальное неудалимое множество и докажем, что после его удаления для любого $(k-1)$-разделяющего множества одна из компонент, которые оно отделяет, обязательно состоит ровно из одной вершины. Рассмотрим все вершины, которые отделяются таким образом, и докажем, что каждая из них должна быть смежна с очень большим количеством неотмеченных вершин (см. неравенство (1)), после чего построим множество неотмеченных вершин, такое, что для каждой такой отделяемой вершины эта оценка не выполняется. Значит, после удаления этого множества ни одна из этих вершин не отделяется $(k-1)$-разделяющим множеством. Таким образом, построенное множество не может быть неудалимым.

Теперь перейдем к детальному доказательству.

Будем говорить, что вершина w, лежащая в $R(B_i)$, *имеет степень m относительно блока B_i*, если она смежна ровно с m внутренними вершинами этого блока. Степень вершины w относительно блока B_i обозначим через $\deg(w, B_i)$. Множество вершин степени m относительно блока B_i будем обозначать $R(B_i, m)$. Напомним, что $R(B_i, 2) \subset R(B_i)$.

Для каждого блока B_i построим вспомогательный мультиграф (то есть граф, в котором, возможно, есть кратные ребра) D, такой, что $V(D) = I(B_i)$, $E(D) = R(B_i, 2)$, а вершины u и v соединены в графе D ребром w тогда и только тогда, когда вершина w смежна с вершинами u и v в графе G.

Рассмотрим все компоненты связности этого графа, содержащие больше одной вершины, то есть компоненты связности, в которых есть хотя бы одно ребро. Обозначим их через $D_1, \ldots, D_z$. Через $T(D_j)$ обозначим остовное дерево графа D_j, а через N_j – суммарное количество ребер в мультиграфах D_s с номерами $s < j$. Количество ребер всего мультиграфа D при этом для общности обозначим через N_{z+1}.

Возьмем какую-нибудь висячую вершину в $T(D_j)$ и назовем ее u_j. Теперь на шаге с номером r произвольно выберем какое-нибудь ребро графа $T(D_j)$, один конец которого уже как-то назван, а другой еще нет. Назовем это ребро d_{N_j+r}. Неназванный конец этого ребра назовем v_{N_j+r}. Эту операцию будем продолжать до тех пор, пока все вершины дерева $T(D_j)$ не окажутся как-то названными (а все ребра – обозначенными через d_s для каких-то s). Если в мультиграфе D_j вершина u_j не была висячей, рассмотрим какое-нибудь инцидентное ей ребро $d \in E(D_j)$, которого нет в $E(T(D_j))$. Назовем его $d_{N_j+|T(D_j)|}$, то есть присвоим ему следующий порядковый номер после номера последнего занумерованного ребра, а вершину u_j переобозначим через $v_{N_j+|T(D_j)|}$. Остальные ребра в произвольном порядке обозначим через d_s, где s меняется от $N_j + |T(D_j)|$ (если u_j висячая в D_j) или $N_j + |T(D_j)| + 1$ (если u_j не висячая в D_j) до N_{j+1}.

Таким образом, через $d_1, \ldots, d_{N_{z+1}}$ мы обозначили все ребра мультиграфа D. Так как при построении этого мультиграфа в качестве множества его ребер бралось $R(B_i, 2)$, то мы обозначили таким же образом и все вершины исходного графа, имеющие степень два относительно блока B_i.

Продолжим нумерацию вершин графа G. Вершины из $R(B_i)$, степень которых относительно B_i не равна двум, обозначим в произвольном порядке через d_s, где s меняется от $N_{z+1}+1$ до $|R(B_i)|$. Таким образом, все вершины степени 2 относительно блока B_i мы поместили в начало списка вершин в выбранном нами порядке, а вершины большей и меньшей степени – в конец списка в произвольном порядке.

Рассмотрим вершину d_1 и отметим в B_i смежную с ней внутреннюю вершину v_1 (выбранную в ходе описанного выше процесса нумерации), если $\deg\,(d_1, B_i) = 2$, и произвольную смежную с ней вершину в противном случае (если такая вершина есть).

Затем на шаге с номером s рассмотрим вершину d_s и отметим в B_i смежную с ней внутреннюю вершину следующим образом: если $\deg\,(d_s, B_i) = 2$ и в мультиграфе D есть вершина, обозначенная нами за v_s, то отметим эту вершину. Если $\deg\,(d_s, B_i) = 2$, а вершины v_s в мультиграфе D не существует, то по построению оба конца ребра d_s имеют номера меньше s. Следовательно, они отмечены ранее, то есть неотмеченных вершин, смежных с d_s, не осталось. Если же $\deg\,(d_s, B_i) \neq 2$, выберем произвольную смежную с d_s вершину (если такая вершина есть).

Таким образом, мы отметим во внутренности блока B_i не более $|R(B_i)|$ вершин.

Замечание 1. При этом, если на шаге с номером s вершина не отмечалась, то это означает, что неотмеченных вершин, смежных с d_s, нет.

Поскольку по условию $|I(B_i)| > |R(B_i)|+1$, в блоке B_i осталось как минимум две неотмеченные внутренние вершины. Выберем любые две такие вершины и назовем их w_{i1} и w_{i2}.

Так как для $r = 1$, 2 вершина w_{ir} не была отмечена, это означает, в частности, что при расмотрении мультиграфа D эта вершина не обозначалась через v_s ни для какого s, такого, что $\deg\,(d_s, B_i) = 2$ (в противном случае, она была бы отмечена при рассмотрении вершины d_s или ранее). Следовательно, w_{ir}, рассматриваемая как вершина мультиграфа D, – это либо вершина нулевой степени, не попавшая ни в один граф D_j, либо висячая вершина u_j для какого-то j.

Таким образом, каждая из этих вершин смежна не более чем с одной вершиной степени два относительно блока B_i.

Положим $W = \{w_{ir} | i = 1, \ldots, n;\ r = 1, 2\}$.

Пусть существует набор чисел $\{r_i | r_i \in \{1,2\}\}_{i=1}^n$, такой, что множество $\{w_{ir_i}\}_{i=1}^n \subset W$ неудалимое. Тогда в этом множестве вершин есть какое-то минимальное по включению неудалимое подмножество. Не умаляя общности, можно считать, что это $M = \{w_{ir_i}\}_{i=1}^l$. В графе $G - M$ есть $(k-1)$-разделяющее множество R. По лемме 3 существует компонента F_1 графа $G - M$, отделяемая множеством R, которая лежит в любом множестве из $\mathfrak{R}_k(G)$, разделяющем M. При этом $|F_1| \leqslant \frac{k-1}{2}$.

Проведем подсчет суммы степеней вершин множества F_1. Рассмотрим блок B_i (где $1 \leqslant i \leqslant l$). Пусть в B_i содержатся t_i отмеченных вершин, смежных с F_1. Все эти вершины входят в R. Получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} t_i \leqslant k - 1.$$

Поскольку в блоке B_i оказалось t_i отмеченных вершин, смежных с F_1, это означает, что мы отмечали вершины не более чем на t_i шагах, сделанных с вершинами из F_1. Как было сказано в замечании 1, если на шаге с номером s в блоке B_i вершина не отмечалась, то это означает, что неотмеченных вершин, смежных с d_s, нет. В частности, вершина w_{ir_i} не смежна с d_s. Следовательно, удаленная из B_i вершина w_{ir_i} была смежна не более чем с t_i вершинами из F_1.

Вершина из множества F_1 может быть смежна в графе G только с вершинами множества $M = \{w_{ir_i}\}_{i=1}^l$, вершинами из $R \in \mathfrak{R}_{k-1}(G - M)$ и другими вершинами из F_1. Обозначим для удобства $|F_1|$ через p.

Учитывая неравенства на сумму t_i и то, что степень каждой вершины множества F_1 должна быть не менее $\frac{3k}{2}$, получаем следующее неравенство на суммарную степень вершин множества F_1:

$$p\left(\frac{3k}{2}\right) \leqslant p(p-1) + p(k-1) + \sum_{i=1}^{l} t_i \leqslant p(p-1) + p(k-1) + k - 1,$$

откуда

$$0 \leqslant p^2 - p\left(\frac{k}{2} + 2\right) + k - 1 = (p-2)\left(p - \frac{k}{2}\right) - 1.$$

В правой части мы получили квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, принимающий при $p = 2$ и $p = \frac{k}{2}$ значение -1. Но $1 \leqslant p \leqslant \frac{k-1}{2}$. Следовательно, при всех допустимых p, кроме единицы, значение этого трехчлена отрицательно. Отсюда $p = 1$, то есть F_1 состоит из одной вершины. Обозначим эту вершину через x. Множество всех вершин x, для которых существуют минимальное неудалимое множество $M \subset W$, состоящее из внутренних вершин различных блоков и $R \in \mathfrak{R}_{k-1}(G - M)$, отделяющее x, обозначим через X.

Так как M – минимальное по включению, а R отделяет x в $G - M$, то вершина x должна быть смежна в G с $k - 1$ вершиной множества R, всеми l вершинами множества M и только с ними (см. рис. 2). Таким образом, $l + k - 1 = \deg v \geq \frac{3k}{2}$, откуда $l \geq \frac{k}{2} + 1$. Для всех $i = 1, \ldots, l$ вершины w_{ir_i} должны быть смежны с x, а количество вершин из $F_1 = \{x\}$, смежных с вершиной w_{ir_i}, не превосходит t_i. Следовательно, $t_i \geq 1$ для всех таких i. Так как x смежна с t_i отмеченными вершинами блока B_i и с вершиной w_{ir_i}, выполняется неравенство $\deg\,(x, B_i) \geq t_i + 1 \geq 2$. Следовательно, числа $h_i = \deg\,(x, B_i) - 2$ неотрицательны для всех $i = 1, \ldots, l$.

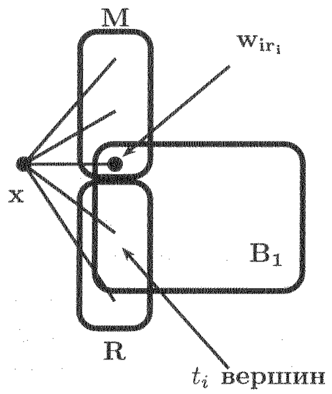

Рис. 2.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{l} h_i = \sum_{i=1}^{l} (\deg\,(x, B_i) - 2) \leq \deg x - 2l = l + k - 1 - 2l =$$

$$= 2\left(\frac{k}{2}+1\right) - l - 3 \le l - 3.$$

Следовательно, из неотрицательности h_i получаем, что хотя бы 3 из них равны нулю, то есть степени вершины x относительно как минимум трех блоков равны двум.

Вершины w_{ir_i}, смежные с x, такие, что $h_i = 0$, назовем выделенными вершинами для x. Не обязательно все эти вершины попали в множество M. Поскольку, как было сказано выше, каждая вершина w_{ir} смежна не более чем с одной вершиной степени два относительно блока B_i, она может быть выделенной только для одной вершины $x \in X$.

Пусть кроме выделенных вершин множества M вершина x смежна еще с a выделенными для x вершинами. Если вершины w_{i1} и w_{i2} обе смежны с x, то ни одна из них не может быть выделенной для x, поскольку в блоке B_i, с одной стороны, по определению выделенности, должно быть ровно две смежных с x вершины, с другой стороны, по построению отмеченных вершин, должна быть отмеченная смежная с x вершина, а обе вершины w_{i1} и w_{i2} не отмечены. Следовательно, так как все вершины из M смежны с x, а в каждом блоке B_i, где $1 \le i \le l$, есть вершина из M, то все a не лежащих в M выделенных для x вершин лежат в блоках с номерами большими l. Для каждого такого блока B_i имеем $\deg\,(x, B_i) = 2$, поэтому все блоки с номерами, большими l, в сумме содержат хотя бы $2a$ вершин, смежных с x. Тогда

$$\sum_{i=1}^{l} h_i = \sum_{i=1}^{l}(\deg\,(x, B_i) - 2) \le \deg x - 2a - 2l = l + k - 1 - 2l - 2a \le$$

$$\le 2\left(\frac{k}{2}+1\right) - l - 3 - 2a \le l - 3 - 2a.$$

То есть хотя бы $2a + 3$ вершины из M являются выделенными для x. Следовательно, если для вершины x выделено b вершин, то $b \ge 3a + 3$, то есть $a \le \frac{b}{3} - 1$. Поскольку a целое,

$$a \le \left[\frac{b}{3}\right] - 1. \tag{1}$$

Таким образом, если мы хотим построить удалимое множество вершин $Y = \{y_i | y_i \in I(B_i)\}_{i=1}^{n}$, то для каждой вершины $x \in X$ нам достаточно добиться, чтобы в Y не попало хотя бы $\left[\frac{b}{3}\right]$ выделенных для x вершин. Тогда в Y не будет минимального неудалимого подмножества M, такого, что после его удаления вершина x отделяется каким-то $(k-1)$-разделяющим множеством R.

То есть, если мы произвольным образом разобьем множество выделенных для x вершин на $\left[\frac{b}{2}\right]$ пар и, возможно, одно множество из одной вершины, то нам достаточно будет исключить из множества Y по одной вершине из каждой пары. Тогда в Y не попадет даже $\left[\frac{b}{2}\right]$ выделенных для x вершин.

Обозначим все получившиеся таким образом для всех вершин $x \in X$ пары за P_s для $s = 1, \ldots, m$. Напомним, что каждая вершина из W может быть выделенной не более чем для одной вершины $x \in X$ и поэтому может попасть не более чем в одну пару P_s.

Выберем в множестве $W = \{w_{ir} | i = 1, \ldots, n;\ r = 1, 2\}$ удалимое множество вершин $Y = \{y_i | y_i \in I(B_i)\}_{i=1}^{n}$ следующим образом: в качестве y_1 выберем вершину w_{11} – внутреннюю вершину блока B_1. Если y_1 не лежит ни в какой паре P_s, в качестве y_2 возьмем вершину w_{21}. Если y_1 лежит в какой-нибудь паре P_s, рассмотрим другую вершину из этой пары. Не умаляя общности, можно считать, что это вершина w_{22}. Тогда в качестве y_2 мы также возьмем вершину w_{21}.

Если выбранная на шаге с номером $j-1$ вершина y_{j-1}, принадлежащая множеству $I(B_{j-1})$, не лежала ни в какой паре P_s, то в качестве y_j выберем вершину w_{j1}. Если y_{j-1} лежала в какой-нибудь паре P_s, то посмотрим, в каком блоке лежит вторая вершина из этой пары, w_{tr}. Если $t > j-1$, то, не умаляя общности, можно считать, что w_{tr} – это w_{j2}. Тогда в качестве y_j мы также возьмем вершину w_{j1}. Как было сказано выше, вершины w_{t1} и w_{t2} не могут быть выделенными для одной вершины $x \in X$. Следовательно, лежать в одной паре они также не могут, поэтому возможность $t = j-1$ исключена. Если $t < j-1$, то вершина w_{tr} не могла попасть в Y, иначе на следующем шаге, согласно нашему алгоритму, вершина y_{j-1} должна была оказаться в $W \backslash Y$. Поэтому w_{tr} не попала в Y.

Следовательно, две вершины из одной пары P_s в Y одновременно оказаться не могут. Таким образом, мы построили множество внутренних вершин различных блоков, не содержащее ни одного минимального неудалимого подмножества, то есть удалимое множество. □

Автор благодарит Д. В. Карпова и А. В. Пастора за привлечение внимания к данной теме и бесценные советы.

Литература

1. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32**, No. 1. (1972), 63–68.
2. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
3. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.

Chukhnov A. S. Removing vertices from k-connected graphs without losing k-connectivity.

The problem of removing vertices from a k-connected graph without losing k-connectivity is studied. We prove that one can remove some inner vertices from k-blocks, provided the interior of each block is large enough with respect to its boundary and the degree of any vertex of the graph is greater than $\frac{3k-1}{2}$ or $\frac{3k}{2}$.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 19 декабря 2006 г.