Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

А. Н. Фролов

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА

1. Введение

Исследованию предельного поведения вероятностей малых уклонений сумм независимых случайных величин и различных классов случайных процессов на протяжении многих лет уделяется значительное внимание. Наиболее важными исследованными классами случайных процессов являются процессы с независимыми приращениями и гауссовские процессы.

Асимптотика вероятностей малых уклонений процессов с независимыми приращениями была найдена в работах Могульского [1], Боровкова и Могульского [2] и в статьях из библиографий этих работ. В частности, было исследовано асимптотическое поведение малых уклонений сумм независимых случайных величин и однородных процессов с независимыми приращениями. Отметим, что к последнему классу относятся устойчивые, пуассоновские и обобщенные пуассоновские процессы.

С различными результатами для гауссовских процессов и литературой по этому вопросу можно познакомиться, например, в обзорах Леду [3], Ли и Шао [4] и Лифшица [5].

Представляет существенный интерес получение новых результатов об асимптотике вероятностей малых уклонений для других классов случайных процессов, приращения которых уже могут быть зависимыми. К таким классам относятся, в частности, различные процессы, построенные по суммам случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом число слагаемых само является случайным процессом, обычно не зависящим от слагаемых. Такие процессы мы далее будем называть обобщенными. Дадим теперь определение некоторых из них.

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одина-

Работа выполнена при поддержке гранта 05-01-00486 РФФИ.

ково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ для $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$.

Пусть $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$. Тогда случайный процесс $\eta(t) = S_{\nu(\lambda t)}$, $\lambda > 0$, называется обобщенным пуассоновским процессом.

Если $\delta(t)$ – процесс восстановления, не зависящий от $\{X_k\}$, то $\zeta(t) = S_{\delta(t)}$ называется обобщенным процессом восстановления. В том случае, когда времена восстановления имеют экспоненциальное распределение, обобщенный процесс восстановления превращается в обобщенный пуассоновский процесс.

Аналогично процессам $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ мы определим обобщенный процесс Кокса. Но сначала напомним определение самого процесса Кокса. Здесь мы следуем работе Эмбрехтса и Клюппельберг [6].

Пусть $\Lambda(t)$, $t > 0$, – случайная мера, т.е. п.н. (почти наверное) $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $\Lambda(t)$ имеет неубывающие траектории. Предположим, что $\Lambda(t)$ не зависит от стандартного пуассоновского процесса $\nu(t)$. Точечный процесс $N(t) = \nu(\Lambda(t))$ называется процессом Кокса. В частности, если траектории $\Lambda(t)$ п.н. непрерывны, то для любой реализации $\lambda(t)$ меры $\Lambda(t)$ процесс $N(t)$ является неоднородным пуассоновским процессом с мерой интенсивности $\lambda(t)$.

Пусть $N(t)$ – процесс Кокса, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$. Случайный процесс $S(t) = S_{N(t)}$ мы будем называть обобщенным процессом Кокса.

Интерес к процессам Кокса связан с тем, что они являются естественными точечными процессами для моделирования процесса выплат в страховой и финансовой математике. Прежде всего они выступают в качестве обобщений классической пуассоновской (однородной) модели, появляющейся в тех случаях, когда поток выплат ординарен и однороден во времени, а количества выплат за непересекающиеся интервалы времени независимы. Введение в модель неоднородности во времени продиктовано возникающим на практике изменением размеров страхового портфеля. Это приводит к неоднородному пуассоновскому процессу в качестве модели для числа выплат. Для того, чтобы учесть колебания риска, в классическую модель вводят дополнительную независимую случайную величину Λ, полагая, что число выплат является пуассоновским процессом с интенсивностью Λt. В этом случае процесс выплат называется смешанным пуассоновским процессом. Использование процессов Кокса позволяет обобщить классическую пуассоновскую модель одновременно в двух рассмотренных направлениях. Кроме того, процессы Кокса возникают в качестве предельных процессов в процедурах прореживания. Действительно, процесс выплат часто бывает результатом прореживания процесса происшествий, т.е. каждое происшествие независимо от остальных влечет за собой выплату с вероятностью p и отказ в выплате с вероятностью $1-p$. В частности, если процесс происшествий – пуассоновский процесс, то и процесс выплат также будет пуассоновским процессом. Более полно с применением прореживания в моделях риска можно познакомиться в [6].

Отметим, что при определенных условиях процессы Кокса являются процессами восстановления, которые также образуют важный класс процессов, используемых в различных приложениях и, в частности, в страховых моделях (см. [6]). Однако далее мы накладываем на $\Lambda(t)$ такие ограничения, при которых наш процесс Кокса будет процессом восстановления только в том случае, когда он пуассоновский.

В этой работе мы не обсуждаем процессы восстановления. Результаты о малых уклонениях для обобщенных процессов восстановления получены Мартикайненом, Фроловым и Штайнебахом [7].

За подробным обсуждением круга вопросов, связанных с различными моделями риска, мы отсылаем читателя к обзорной работе Эмбрехтса и Клюппельберг [6].

Настоящая работа посвящена описанию асимптотического поведения вероятностей малых уклонений обобщенного процесса Кокса $S(t)$, центрированного линейной функцией от $\Lambda(t)$, т.е. вероятностей

$$P_T = \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|S(t)-c\Lambda(t)\Big|\leqslant x_T\Big), \tag{1}$$

где $\{x_T\}$ – положительная вещественная функция такая, что $x_T\to\infty$ и $x_T^2=o(f(T))$ при $T\to\infty$, $f(T)$ – функция, определяемая свойствами меры $\Lambda(t)$, $c=\mathbf{E}X$ при $\mathbf{E}X<\infty$ и $c=0$ иначе. Отметим, что, если $\mathbf{E}X<\infty$, то мы центрируем процесс $S(t)$, вообще говоря, случайной функцией. Тем не менее, в случае простой пуассоновской модели $\Lambda(t) = \lambda t$ и наша центрировка совпадает с естественной центрирующей функцией $\mathbf{E}S(t)$. Аналогично обстоит дело и в неоднородной пуассоновской модели. Кроме того, подобное центрирование используется в соответствующих математических моделях процесса риска. Оказывается, что флуктуации размера риска в таких моделях должны компенсироваться страховыми взносами случайного размера, т.к. в противном случае вероятность разорения страховщика может быть отделена от нуля и не уменьшаться с ростом начального капитала (см. [6]). Поэтому мы рассматриваем именно такое центрирование.

Далее мы покажем, что при определенных условиях характер асимптотики $\log P_T$ такой же, как в случае сумм независимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями. При нарушении же этих условий поведение $\log P_T$ может быть совершенно иным.

2. Результаты

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ для $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$.

Пусть $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$.

Обозначим $\xi(t) = S_{\nu(t)}$. Заметим, что $\xi(t)$ – это обобщенный пуассоновский процесс и, следовательно, он является однородным процессом с независимыми приращениями.

Пусть $\Lambda(t)$, $t > 0$, – случайная мера, т.е. п.н. (почти наверное) $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $\Lambda(t)$ имеет неубывающие траектории. Пусть траектории $\Lambda(t)$ п.н. непрерывны и $\Lambda(\infty) = \infty$ п.н. Предположим, что $\Lambda(t)$ не зависит от процесса $\nu(t)$ и последовательности $\{X_k\}$.

Определим процесс Кокса $N(t)$ и обобщенный процесс Кокса $S(t)$ соотношениями $N(t) = \nu(\Lambda(t))$ и $S(t) = S_{N(t)}$.

Далее мы опишем поведение вероятностей малых уклонений P_T из (1).

Теорема 1. *Предположим, что существуют положительная возрастающая непрерывная функция $f(T)$, $f(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, и неотрицательная случайная величина Λ такие, что распределения $\Lambda(T)/f(T)$ слабо сходятся к распределению Λ при $T \to \infty$. Обозна-*

чим $a_T = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(T)/f(T)$, $a = \operatorname{ess\,inf} \Lambda$. *Пусть* $a_T \to a$ *при* $T \to \infty$ *и* $a > 0$.

Если $\mathbf{E}X < \infty$, *то положим* $c = \mathbf{E}X$. *Иначе положим* $c = 0$.

Пусть распределение случайной величины $\xi_1 = \xi(1) - c$ *принадлежит области притяжения строго устойчивого закона* F_α *с индексом* $\alpha \in (0, 2]$, *т.е. распределения* $(\xi(n) - cn)/B_n$ *слабо сходятся к* F_α *при* $n \to \infty$, *где* $\{B_n\}$ – *последовательность положительных постоянных. Предположим, что* F_α *не сосредоточено на полупрямой.*

Тогда для любой положительной функции x_T *такой, что* $x_T \to \infty$ *и* $x_T = o(B_{[f(T)]})$ *при* $T \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Big| S(t) - c\Lambda(t) \Big| \leqslant x_T \Big) \; = \; -Ca \frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T)\big(1 + o(1)\big) \quad (2)$$

при $T \to \infty$, *где* $L(x) = x^{\alpha-2}\mathbf{E}\xi_1^2 I\{|\xi_1| < x\}$ – *медленно меняющаяся на бесконечности функция,* C – *абсолютная положительная постоянная, зависящая только от распределения* F_α. *Если* $\alpha = 2$, *то* $C = \pi^2/8$. *Здесь и далее* $I\{B\}$ *обозначает индикатор события* B, $[x]$ *обозначает целую часть* x.

Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы распределение ξ_1 принадлежало области притяжения F_α, обычно формулируют в терминах поведения хвостов или усеченных моментов (см., например, Феллер [8, гл. XVII, §5]). Для проверки условий теоремы 1 удобнее использовать теорему 2.6.5, стр. 103 книги Ибрагимова и Линника [9]. Там необходимые и достаточные условия сформулированы в терминах асимптотического поведения в нуле характеристических функций. Так как $\mathbf{E}e^{it\xi_1} = \exp\big\{-itc + \mathbf{E}e^{itX} - 1\big\}$, то соответствующие условия легко проверяются, если известно распределение X. Нужно лишь проверить, что в окрестности нуля $\log \mathbf{E}e^{it\xi_1} = it\gamma + h(t)\log\psi_\alpha(t)$, где $\gamma = \mathrm{const}$, $h(t)$ – медленно меняющаяся в нуле функция, $\psi_\alpha(t)$ – характеристическая функция F_α. В случае $\alpha = 1$ здесь нужно дополнительно предположить, что параметр сдвига F_α равен нулю.

Наиболее простым примером $\Lambda(t)$ является $\Lambda(t) = \Lambda f(t)$, где случайная величина Λ и функция $f(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Однако можно построить и другие примеры. Так в качестве $\Lambda(t)$ мы можем выбирать, например, случайные процессы, удовлетворяющие закону больших чисел и имеющие подходящие траектории. Отметим, что в теореме 1 случайная величина Λ может быть вырожденной. При этом в простейшем случае $\Lambda(t) = \Lambda f(t)$ мы будем иметь дело с неоднородным пуассоновским процессом $N(t)$ и соответствующим процессом $S(t)$.

Теорема 1 показывает, что при $a > 0$ поведение P_T аналогично поведению соответствующих вероятностей малых уклонений сумм независимых одинаково распределенных величин и однородных процессов с независимыми приращениями (см., например, [1]). В том случае, когда $a = 0$, асимптотика $\log P_T$ может оказаться совсем иной. Это показывает следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *и* $a = 0$.

Тогда для любой положительной функции x_T *такой, что* $x_T \to \infty$ *и* $x_T = o(B_{[f(T)]})$ *при* $T \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|S(t) - c\Lambda(t)\Big| \leqslant x_T\Big) \;=\; o\left(\frac{f(T)}{x_T^\alpha}\,L(x_T)\right), \tag{3}$$

при $T \to \infty$, *где* $L(x)$ – *функция из теоремы* 1.

Теперь мы покажем, что в случае $a = 0$ скорость убывания $\log P_T$ может сильно отличаться от скорости убывания в (2) и, кроме того, может зависеть от скорости убывания в нуле функции распределения случайной величины Λ. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *и* $a_T = a = 0$ *для всех* T. *Пусть для всех* T *функции распределения* $F_T(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(T) < \lambda f(T))$ *и* $F(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda < \lambda)$ *непрерывны и положительны в невырожденном интервале* $[0, \lambda_0]$.

Для любой положительной функции x_T *такой, что* $x_T \to \infty$ *и* $x_T = o(B_{[f(T)]})$ *при* $T \to \infty$, *обозначим через* ε_T *решение уравнения*

$$\frac{\varepsilon_T}{-\log F_T(\varepsilon_T)} = \frac{x_T^\alpha}{f(T)L(x_T)},$$

где $L(x)$ – *функция из теоремы* 1.

Предположим, что для любого $\tau > 0$ *выполняется соотношение*

$$\log F_T(\tau\varepsilon_T) \sim \log F_T(\varepsilon_T) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4}$$

Тогда

$$\log \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|S(t) - c\Lambda(t)\Big| \leqslant x_T\Big) = \log F_T(\varepsilon_T)\big(1 + o(1)\big)$$

$$= -\varepsilon_T \frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T)\bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon_T \to 0$ *и* $F_T(\varepsilon_T) \to 0$ *при* $T \to \infty$.

Приведем некоторые примеры, показывающие, что скорость убывания $\log P_T$ в (5) и (2) могут существенно отличаться.

Пусть $F_T(x) \equiv F(x)$ для всех T. Если, например, $F(x) = x^p$ при $x \in [0, 1]$, где $p > 0$, то $\log F_T(\varepsilon_T) \sim -p \log(\frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T))$ при $T \to \infty$. Если $F(x) = (-\log x)^{-p}$ при $x \in (0, e^{-1}]$, где $p > 0$, то $\log F_T(\varepsilon_T) \sim -p \log\log(\frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T))$ при $T \to \infty$.

Следующий результат показывает, что условие (4) нельзя отбросить.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены все условия теоремы* 3 *кроме условия* (4). *Пусть для любого* $\tau > 0$ *выполняется соотношение* $\log F_T(\tau\varepsilon_T) \sim \tau^p \log F_T(\varepsilon_T)$ *при* $T \to \infty$, *где* $p > 0$.

Тогда

$$\log \mathbf{P}\Bigl(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Bigl|S(t) - c\Lambda(t)\Bigr| \leqslant x_T\Bigr) = o\left(\varepsilon_T \frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T)\right) \tag{6}$$

при $T \to \infty$.

3. Доказательства

Для доказательства наших теорем нам потребуется следующий результат о поведении вероятностей малых уклонений обобщенного пуассоновского процесса $\xi(t)$.

Лемма 1. *Пусть* $g(T)$ – *возрастающая непрерывная функция такая, что* $g(T) \to \infty$ *при* $T \to \infty$.

Если выполнены условия теоремы 1, *то для любой положительной функции* x_T *такой, что* $x_T \to \infty$ *и* $x_T = o(B_{[g(T)]})$ *при* $T \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Bigl(\sup_{0 \leqslant t \leqslant g(T)} \Bigl|\xi(t) - ct\Bigr| \leqslant x_T\Bigr) = -C \frac{g(T)}{x_T^\alpha} L(x_T)\bigl(1 + o(1)\bigr) \tag{7}$$

при $T \to \infty$, *где* $L(x)$ *и* C – *функция и постоянная из теоремы* 1.

Доказательство леммы 1. Положим $M_\lambda = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \lambda} \Bigl|\xi(t) - ct\Bigr|$.

Возьмем последовательность $\{T_k\}$ такую, что $T_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$. Так как $\xi(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями, то по теореме 4 из работы Могульского [1]

$$\mathbf{P}(M_{g(T_k)} \leqslant x_{T_k}) \leqslant \mathbf{P}(M_{[g(T_k)]} \leqslant x_{T_k}) =$$
$$= \exp\left\{-C\frac{[g(T_k)]}{x_{T_k}^{\alpha}}L(x_{T_k})(1+o(1))\right\},$$

при $k \to \infty$. Оценка снизу для $\mathbf{P}(M_{g(T_k)} \leqslant x_{T_k})$ получается аналогично. В силу произвольности выбора $\{T_k\}$ мы получаем (7).

Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Мы имеем

$$P_T = \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|S(t)-c\Lambda(t)\Big| \leqslant x_T\Big) = \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant \Lambda(T)}\Big|\xi(t)-ct\Big| \leqslant x_T\Big) =$$
$$= \int_0^{\infty}\mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big)dF_T(\lambda) = \int_{a_T}^{\infty}\mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big)dF_T(\lambda), \tag{8}$$

где $F_T(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(T) < \lambda f(T))$, $M_\lambda = \sup_{0\leqslant t\leqslant\lambda}\Big|\xi(t)-ct\Big|$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как функция $\mathbf{P}\big(M_\lambda \leqslant x_T\big)$ не возрастает по λ и $a_T \to a$ при $T \to \infty$, то из (8) следует

$$P_T \leqslant \mathbf{P}\big(M_{a_T f(T)} \leqslant x_T\big) \leqslant \mathbf{P}\big(M_{(a-\varepsilon)f(T)} \leqslant x_T\big) \tag{9}$$

для всех достаточно больших T.

Отметим, что нормирующие постоянные B_n можно выбрать так, что выполнено соотношение $B_n = n^{1/\alpha}L_1(n)$, где $L_1(x)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности (см., например, [9, стр. 48]). Отсюда следует, что условие $x_T = o\big(B_{[f(T)]}\big)$ при $T \to \infty$ эквивалентно условию $x_T = o\big(B_{[bf(T)]}\big)$ при $T \to \infty$, где b – произвольная фиксированная положительная постоянная.

По лемме 1

$$\log\mathbf{P}\big(M_{(a-\varepsilon)f(T)} \leqslant x_T\big) = -C(a-\varepsilon)\frac{f(T)}{x_T^{\alpha}}\,L(x_T)\big(1+o(1)\big).$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, из последнего соотношения и (9) вытекает, что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{x_T^{\alpha}}{f(T)}\frac{1}{L(x_T)}\log P_T \leqslant -Ca. \tag{10}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Снова используя монотонность по λ вероятности $\mathbf{P}\big(M_\lambda \leqslant x_T\big)$ и условие $a_T \to a$ при $T \to \infty$, из (8) мы получим

$$\begin{aligned} P_T &\geqslant \int\limits_{a_T}^{(1+\varepsilon)^2 a_T} \mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big)\, dF_T(\lambda) \\ &\geqslant \mathbf{P}\big(M_{(1+\varepsilon)^2 a_T f(T)} \leqslant x_T\big) F_T((1+\varepsilon)^2 a_T) \\ &\geqslant \mathbf{P}\big(M_{(1+\varepsilon)^3 a f(T)} \leqslant x_T\big) F_T((1+\varepsilon) a) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T. Выберем ε так, чтобы $(1+\varepsilon)a$ была точкой непрерывности $F(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda < \lambda)$. В силу слабой сходимости $F_T(\lambda)$ к $F(\lambda)$ мы имеем

$$P_T \geqslant \frac{1}{2} \mathbf{P}\big(M_{(1+\varepsilon)^3 a f(T)} \leqslant x_T\big) F((1+\varepsilon)a) \tag{11}$$

для всех достаточно больших T. Так как $x_T = o\big(B_{[(1+\varepsilon)^3 a f(T)]}\big)$ при $T \to \infty$, то по лемме 1

$$\log \mathbf{P}\big(M_{(1+\varepsilon)^3 a f(T)} \leqslant x_T\big) = -C(1+\varepsilon)^3 a \frac{f(T)}{x_T^\alpha}\, L(x_T)\big(1+o(1)\big)$$

при $T \to \infty$. Из последнего соотношения и (11) следует, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{x_T^\alpha}{f(T)} \frac{1}{L(x_T)} \log P_T \geqslant -Ca(1+\varepsilon)^3. \tag{12}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая (10), мы получим (2).

Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как $\log P_T \leqslant 0$, то нам достаточно доказать только соответствующую оценку снизу.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Используя (8) и монотонность по λ вероятности $\mathbf{P}\big(M_\lambda \leqslant x_T\big)$, мы имеем

$$P_T \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{(1+\varepsilon)^2 \varepsilon} \mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big)\, dF_T(\lambda)$$

$$\geqslant \mathbf{P}\big(M_{(1+\varepsilon)^2 \varepsilon f(T)} \leqslant x_T\big)\big(F_T((1+\varepsilon)^2\varepsilon) - F_T(\varepsilon)\big)$$

для всех достаточно больших T. Отсюда так же, как в доказательстве теоремы 1, мы получим (12) с заменой a на ε. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получим (3).

Теорема 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Положим $b_T = \frac{f(T)}{x_T^\alpha} L(x_T)$. Из условия $x_T = o(B_{[f(T)]})$ при $T \to \infty$ и вида нормирующих постоянных B_n, которые (см., например, [9, глава XVII, §5]) могут быть выбраны так, что

$$\frac{nL(B_n)}{B_n^\alpha} \to d \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

следует, что $b_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Покажем, что $\varepsilon_T \to 0$ и $F_T(\varepsilon_T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Предположим, что существует последовательность $\{T_k\}$ такая, что $T_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon_{T_k} > \varepsilon > 0$ для всех достаточно больших k. Тогда $-\log F_{T_k}(\varepsilon_{T_k}) \leqslant -\log F_{T_k}(\varepsilon) \leqslant -\log(F(\varepsilon)/2) < \infty$ для всех достаточно больших k в силу слабой сходимости $F_T(\lambda)$ к $F(\lambda)$. Поэтому $-\varepsilon_{T_k}/\log F_{T_k}(\varepsilon_{T_k}) = 1/b_{T_k}$ отделено от нуля, что противоречит тому, что $b_T \to \infty$ при $T \to \infty$. Следовательно, $\varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$. Далее, $F_T(\varepsilon_T) \leqslant \Delta + F(\varepsilon_T)$, где $\Delta = \sup_{0 \leqslant x \leqslant \lambda_0} |F_T(x) - F(x)| \to 0$ при $T \to \infty$ в силу слабой сходимости $F_T(\lambda)$ к $F(\lambda)$ и непрерывности предельной функции. Отсюда следует, что $F_T(\varepsilon_T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Из последнего соотношения и определения ε_T вытекает, что $1/b_T = o(\varepsilon_T)$ при $T \to \infty$. Следовательно, для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших T мы имеем

$$\tau(1+\tau) d B^\alpha_{[f(T)\varepsilon_T]} \geqslant \tau [f(T)\varepsilon_T] L(B_{[f(T)\varepsilon_T]}) \geqslant \frac{f(T)}{b_T} L(B_{[f(T)\varepsilon_T]})$$

$$= x_T^\alpha \frac{L(B_{[f(T)\varepsilon_T]})}{L(x_T)} = x_T^\alpha \frac{l(B_{[f(T)\varepsilon_T]})}{l(x_T)} \exp\left\{ \int\limits_{x_T}^{B_{[f(T)\varepsilon_T]}} \frac{\varrho(u)}{u} du \right\},$$

где $l(u) \to l < \infty$ и $\varrho(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Здесь мы воспользовались известным представлением медленно меняющейся функции (см., например, [8, глава VIII, §9]). Для всех достаточно больших T, при которых выполнено неравенство $x_T \leqslant B_{[f(T)\varepsilon_T]}$, мы имеем

$$\int\limits_{x_T}^{B_{[f(T)\varepsilon_T]}} \frac{\varrho(u)}{u} du \geqslant -\frac{\alpha}{2} \int\limits_{x_T}^{B_{[f(T)\varepsilon_T]}} \frac{du}{u} = -\frac{\alpha}{2} \log\left(\frac{B_{[f(T)\varepsilon_T]}}{x_T}\right). \tag{13}$$

Поэтому

$$\tau(1+\tau)dB^{\alpha}_{[f(T)\varepsilon_T]} \geqslant (1-\tau)x_T^{\alpha}\left(\frac{B_{[f(T)\varepsilon_T]}}{x_T}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

для всех достаточно больших T. Отсюда следует, что

$$x_T^{3\alpha/2} \leqslant \frac{\tau(1+\tau)d}{1-\tau} B^{3\alpha/2}_{[f(T)\varepsilon_T]}$$

для всех достаточно больших T.

В тех случаях, когда $x_T > B_{[f(T)\varepsilon_T]}$, интеграл в (13) для всех достаточно больших T оценивается снизу тем же выражением с обратным знаком. Это дает

$$x_T^{\alpha/2} \leqslant \frac{\tau(1+\tau)d}{1-\tau} B^{\alpha/2}_{[f(T)\varepsilon_T]}$$

для всех достаточно больших T.

Таким образом мы заключаем, что $x_T = o(B_{[f(T)\varepsilon_T]})$ при $T \to \infty$.

Используя монотонность по λ вероятности $\mathbf{P}\big(M_\lambda \leqslant x_T\big)$ и определение ε_T, из (8) мы получим

$$P_T = \int\limits_0^{\varepsilon_T} \mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big) dF_T(\lambda) + \int\limits_{\varepsilon_T}^{\infty} \mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big) dF_T(\lambda)$$

$$\leqslant F_T(\varepsilon_T) + \mathbf{P}\big(M_{\varepsilon_T f(T)} \leqslant x_T\big) = e^{-\varepsilon_T b_T} + \big(M_{\varepsilon_T f(T)} \leqslant x_T\big).$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает оценка сверху в (5).

Перейдем к оценке снизу. Возьмем $\tau > 0$. По лемме 1

$$P_T \geqslant \int\limits_0^{\tau\varepsilon_T} \mathbf{P}\big(M_{\lambda f(T)} \leqslant x_T\big) dF_T(\lambda) \geqslant \mathbf{P}\big(M_{\tau\varepsilon_T f(T)} \leqslant x_T\big) F_T(\tau\varepsilon_T)$$

$$= e^{-\tau\varepsilon_T b_T(1+o(1))} F_T(\tau\varepsilon_T) = e^{-(1+\tau)\varepsilon_T b_T(1+o(1))} \tag{14}$$

при $T \to \infty$. Так как τ может быть выбрано сколь угодно малым, мы приходим к нужной нижней оценке в (5).

Теорема 3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4. Как и в доказательстве теоремы 2 нам достаточно получить только соответствующую оценку снизу.

Действуя так же, как при доказательстве (14), мы получим

$$P_T \geqslant e^{-(\tau^p+\tau)\varepsilon_T b_T(1+o(1))}$$

при $T \to \infty$. Отсюда следует (6).

Теорема 4 доказана. $\square$

Литература

1. А. А. Могульский, *Малые уклонения в пространстве траекторий.* — Теория вероятн. и ее примен. **19** (1974), 726–736.
2. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях малых уклонений для случайных процессов.* — Труды Инст. матем. СОАН СССР **13** (1989), 147–168.
3. M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian analysis, Lectures on Probability Theory and Statistics.* — Lect. Notes Math. **1648**, Springer, Berlin (1996), 165–294.
4. W. V. Li, Q.-M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications.* — In: Stochastic Processes: Theory and Methods, Handbook of Statistics C. R. Rao, D. Shanbhag (eds.) **19**, North-Holland, Amsterdam (2001), pp. 533–597.
5. M. A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities.* — In: Proceedings of the Seventh Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics B. Grigelionis (ed.), VSP/TEV. Vilnius (1999), pp. 453–468.
6. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* — Теория вероятн. и ее примен. **30** (1993), 374–416.
7. А. И. Мартикайнен, А. Н. Фролов, Й Штайнебах, *О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов восстановления.* — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
8. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. Мир, М. (1967).
9. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* Наука, М. (1965).

Frolov A. N. On probabilities of small deviations for compound Cox processes.

We derive logarithmic asymtotics for probabilities of small deviations for compound Cox processes. We show that under appropriate conditions, these asymptotics are the same as those for sums of independent random

variables and processes with independent increments. When these conditions do not hold, the asymptotics of small deviations for compound Cox processes are quite different.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 11 ноября 2006 г.