Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

Н. В. Смородина

ИНВАРИАНТНЫЕ И КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕР, ОТВЕЧАЮЩИХ УСТОЙЧИВЫМ ПРОЦЕССАМ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0,1]$ – строго устойчивый однородный случайный процесс с независимыми приращениями и показателем устойчивости $\alpha \in (0,2)$. Напомним, что процесс называется строго устойчивым, если для любых положительных констант a, b процесс $a\xi_1 + b\xi_2$ (здесь ξ_1, ξ_2 – независимые копии исходного процесса) имеет тоже распределение, что и $c\xi$. Числа a, b, c при этом связаны соотношением $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$ Известно ([5, 9]), что траектории этих процессов с вероятностью единица принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке.

Для описания устойчивых процессов мы будем использовать представление Леви–Хинчина ([5, 3]). Именно, для $\alpha < 1$

$$\xi(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx), \tag{1}$$

а для $\alpha \in [1,2)$

$$\xi(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\widetilde{\nu}(ds, dx). \tag{2}$$

В этом представлении $\nu(ds, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,1] \times \mathbb{R}$ с интенсивностью вида

$$dt \frac{\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}(C_1 \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + C_2 \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)), \quad C_1, C_2 \geqslant 0 \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке гранта DFG 436 RUS 113/823.

(Здесь и далее через $\mathbf{1}_A$ обозначается индикаторная функция множества A), $\widetilde{\nu}(dt,dx)=\nu(dt,dx)-\mathbb{E}\nu(dt,dx)$ – соответствующая центрированная мера. Первое слагаемое в (3) определяет положительные скачки, второе – отрицательные. Одномерные распределения процесса ξ суть строго устойчивые распределения, C_1, C_2 – параметры спектральной функции случайной величины $\xi(1)$ ([10]).

Отметим, что в случае $\alpha=1$ формула (2) задает строго устойчивый процесс только если $C_1=C_2$ Условимся считать, что при $\alpha=1$ процесс $\xi(t)$ просто определяется формулой (2).

В качестве вероятностного пространства для пуассоновской случайной меры мы выберем пространство ее реализаций, т.е. пространство конфигураций на множестве $S\times(0,\infty)$, где $S=[0,1]\times\{-1,1\}$ (вторым сомножителем мы параметризуем знак скачка). На этом пространстве конфигураций мы рассмотрим пуассоновскую меру с интенсивностью вида

$$\alpha dt\big(C_1\mathbf{1}_{\{+1\}}(x)+C_2\mathbf{1}_{\{-1\}}(x)\big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{4}$$

Распределение процесса ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ можно рассматривать как образ пуассоновской меры на пространстве конфигураций под действием отображения, задаваемого (1), (2). Поэтому, вместо того, чтобы строить отображения пространства $\mathbb{D}[0,1]$ в себя, мы сначала решим более общую задачу нахождения квазиинвариантных преобразований пуассоновской меры, заданной на пространстве конфигураций $\mathcal{X}(G)$, где множество G имеет вид прямого произведения $G=S\times(0,\infty)$, S – полное сепарабельное метрическое пространство. Про интенсивность Π пуассоновской меры мы предполагаем, что она имеет вид $\Pi(d\theta,dx)=\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$, где π – конечная мера на S. Всюду далее число $\alpha\in(0,2)$ будет предполагаться фиксированным.

Мы будем рассматривать преобразования F пространства конфигураций, порожденные преобразованиями $f: G\to G$, так что конфигурация X состоящая из точек вида $\overline{x}$, $\overline{x}=(\theta,x)$, $\overline{x}\in X$ под действием этого преобразования переходит в конфигурацию $Y=F(X)$, состоящую из точек вида $f(\overline{x})$, $\overline{x}\in X$, т.е.

$$F(X)=\{f(\overline{x})\}_{\overline{x}\in X}. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что под действием преобразования (5)

пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую же меру с интенсивностью Πf^{-1}.

Первый результат об абсолютной непрерывности пуассоновских мер в пространстве конфигураций (в $\mathbb{R}^n$) принадлежит А. В. Скороходу [4] (см. также [7, 1]).

Далее, в работе [8] Вершика и Цилевич рассматривались трансформации гамма меры, представляющей из себя пуассоновскую меру с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\frac{e^{-x}}{x}dx.$$

В этой работе было показано, что гамма мера обладает свойством квазиинвариантности относительно всех преобразований подобия, т.е. преобразований вида (5) с функцией $f(\theta, x) = (\theta, k(\theta)x)$ (конфигурация $X = \{(\theta, x)\}$ под действием этого отображения переходит в конфигурацию $Y = \{(\theta, k(\theta)x)\}$), где измеримая функция $k(\theta)$ предполагается положительной и удовлетворяющей условию

$$\int\limits_S |\log k(\theta)|\pi(d\theta) < \infty.$$

Результаты настоящей работы в определенном смысле аналогичны результатам Вершика и Цилевич, но вместо гамма меры мы здесь рассматриваем пуассоновские меры с с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$.

Статья организована следующим образом. В §2 содержатся все необходимые определения и обозначения, относящиеся к пространству конфигураций. В §3 строится полугруппа квазиинвариантных преобразований пуассоновской меры с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$. В §4 в случае, когда точки пространства S дополнительно снабжены знаком (плюс или минус) строится группа квазиинвариантных (в симметричном случае – инвариантных) преобразований. Наконец, в §5 построены группы и полугруппы преобразований траекторий устойчивых процессов.

2. Пространство конфигураций

Пусть G – метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – его борелевская σ-алгебра, $\mathcal{B}_0$ – кольцо ограниченных борелевских подмножеств G

Далее, пусть Π – σ-конечная мера на $(G, \mathcal{B})$, причем $\Pi(V) < \infty$ для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Через $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G)$ мы обозначим пространства конфигураций на G По определению

$$\mathcal{X}(G) = \{X \subset G : |X \cap V| < \infty \quad \text{для любого} \quad V \subset \mathcal{B}_0\},$$

где через $|A|$ обозначено число точек в множестве A На пространстве $\mathcal{X}$ мы будем рассматривать топологию $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, – слабейшую топологию, такую, что все функционалы $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$X \mapsto \sum_{x \in X} f(x)$$

непрерывны для любых непрерывных функций $f : G \to \mathbb{R}$ с ограниченным носителем. Борелевскую σ-алгебру, порожденную $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ мы будем обозначать через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ Это наименьшая σ-алгебра для которой отображения

$$X \mapsto |X \cap V|$$

измеримы для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Далее, мы говорим, что вероятностная мера P на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ есть пуассоновская мера с интенсивностью Π, если для каждого $V \in \mathcal{B}_0$

$$P(X : |X \cap V| = k) = e^{-\Pi(V)} \frac{\Pi(V)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и для непересекающихся множеств V_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ случайные величины ν_j, где $\nu_j(X) = |X \cap V_j|$ независимы. Подробнее см. [2, 6].

Нас будут интересовать только пуассоновские меры, удовлетворяющие условию $\Pi(G) = \infty$ Лишь в этом случае с вероятностью 1 конфигурация содержит бесконечное число точек.

Всюду далее мы предполагаем, что пространство G имеет вид прямого произведения $G = S \times (0, \infty)$, где S – полное сепарабельное метрическое пространство, а мера Π имеет вид

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}, \quad \theta \in S, \quad x \in (0, \infty),$$

где π – конечная мера на S, а $\alpha \in (0, 2)$.

3. Квазиинвариантные преобразования

Обозначим через $L^+(S)$ множество всех измеримых неотрицательных функций на S, а через $L_1^+(S,\pi)$, $L_1^+(S,\pi) \subset L^+(S)$ обозначим его подмножество, состоящее из всех интегрируемых по мере π функций. Отметим, что $L^+(S)$ и $L_1^+(S,\pi)$ образуют полугруппы по сложению.

Для $t \geqslant 0$ обозначим через T_t отображение $[0,\infty)$ в $[0,\infty)$ вида

$$T_t(x) = \frac{x}{(1+\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}. \tag{6}$$

Заметим, что T_0 – тождественное отображение. Покажем, что для любых $s,t \in [0,\infty)$

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s. \tag{7}$$

Действительно,

$$T_t \circ T_s(x) = T_t\left(\frac{x}{(1+\alpha s x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) =$$

$$= \frac{x}{(1+\alpha s x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{(1+\alpha t \frac{x^\alpha}{1+\alpha s x^\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}} = T_{t+s}.$$

Для $f \in L^+(S)$ определим преобразование $\tau_f : G \to G$ пространства G в себя, полагая

$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x)). \tag{8}$$

Заметим, что если $f \equiv 0$, то τ_f тождественное преобразование, а из (7) немедленно вытекает, что для любых $f, g \in L^+(S)$

$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g. \tag{9}$$

Теперь, используя полугруппу преобразований τ_f, $f \in L^+(S)$, построим порожденную ею полутруппу преобразований Φ_f, $f \in L^+(S)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(S \times (0,\infty))$ в себя. В соответствии с (5), всякая конфигурация X, состоящая из точек вида (θ, x), $\theta \in S$, $x \in (0,\infty)$ под действием преобразования Φ_f переходит в конфигурацию Y, состоящую из точек вида $\tau_f(\theta,x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x))$, т.е.

$$\Phi_f(X) = Y = \{(\theta, T_{f(\theta)}(x))\}. \tag{10}$$

Из (7) и (8) следует, что для всех $f, g \in L^+(S)$

$$\Phi_{f+g} = \Phi_f \circ \Phi_g. \tag{11}$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. 1. *Для любого* $f \in L_1^+(S,\pi)$ *мера* $P\Phi_f^{-1}$ *абсолютно непрерывна относительно* P, *причем*

$$P\Phi_f^{-1} = e^{\int\limits_S f d\pi} \cdot P\Big|_{A_f},$$

где A_f *– подмножество пространства конфигураций положительной меры (зависящее от* f*), т.е. преобразование* Φ_f *переводит меру* P *в ее сужение* $P\Big|_{A_f}$ *на некоторое подмножество (*$e^{\int\limits_S f d\pi} = \frac{1}{P(A_f)}$ *– естественный нормирующий коэффициент).*

2. *Для любой функции* $f \in L^+(S)$ *такой, что* $\int\limits_S f d\pi = \infty$ *меры* $P\Phi_f^{-1}$ *и* P *взаимно сингулярны.*

Доказательство. Прежде всего посмотрим, как выглядит при фиксированном $t > 0$ образ меры $\gamma(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ под действием отображения $T_t : (0,\infty) \to (0,\infty)$.

Функция $T_t(x)$ строго возрастает, так как ее производная

$$T_t'(x) = \frac{1}{(1+\alpha t x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}}$$

положительна. Далее, $T_t(+\infty) = \frac{1}{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}$, и, следовательно, образ меры γ будет иметь своим носителем интервал $(0, \frac{1}{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}})$. Покажем, что на этом интервале мера γT_t^{-1} совпадает с мерой γ, т.е.

$$\gamma T_t^{-1} = \gamma\Big|_{(0,\frac{1}{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}})}. \tag{12}$$

Действительно, пусть $y \in (0, \frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}})$, тогда

$$T_t^{-1}(y) = \frac{y}{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Плотность меры γT_t^{-1} в точке y будет равна

$$\frac{1}{(T_t^{-1}(y))^{1+\alpha}} \cdot (T_t^{-1}(y))' = \frac{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{y^{1+\alpha}} \cdot \left(\frac{y}{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)' =$$

$$= \frac{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{y^{1+\alpha}} \cdot \left(\frac{1}{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{\alpha t y^\alpha}{(1-\alpha t y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}}\right) = \frac{1}{y^{1+\alpha}}.$$

Формула (12) таким образом доказана. Далее, из (12) немедленно вытекает, что образ меры $\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ под действием отображения τ_f есть мера, абсолютно непрерывная относительно Π вида

$$\Pi\tau_f^{-1}(d\theta, dx) = \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{(\alpha f(\theta))^{1/\alpha}})}(x)\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь подмножество G_f множества $G = S \times (0, \infty)$, на котором плотность $\frac{d\Pi\tau_f^{-1}}{d\Pi}$ равна единице, т.е.

$$G_f = \{(\theta, x) \in G : 0 < x < \frac{1}{(\alpha f(\theta))^{1/\alpha}}\}. \tag{14}$$

Из (13) вытекает, что мера $P\Phi^{-1}$ сосредоточена на множестве A_f вида

$$A_f = \{X \in \mathcal{X}(G) : X \cap (G \setminus G_f) = \emptyset\},$$

т.е. на множестве конфигураций, не имеющих точек в множестве $G \setminus G_f$. С другой стороны, A_f совпадает с пространством $\mathcal{X}(G_f)$ конфигураций на множестве G_f, причем в силу (13) на множестве G_f интенсивность пуассоновской меры $P\Phi_f^{-1}$ есть $\pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$.

Из всего вышесказанного немедленно следует, что мера PT_f^{-1} абсолютно непрерывна относительно P если $P(A_f) > 0$ и ортогональна P если $P(A_f) = 0$. Для завершения доказательства осталось только сосчитать $P(A_f)$.

Имеем

$$P(A_f) = P(X :\mid X \cap (G \setminus G_f) \mid = 0) = \exp(-\Pi(G \setminus G_f)) =$$

$$\exp(-\int\limits_S \pi(d\theta) \int\limits_{(\alpha f(\theta))^{-1/\alpha}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}) = \exp(-\int\limits_S f d\pi).$$

Последнее выражение положительно тогда и только тогда, когда $\int\limits_S f d\pi < \infty$. Теорема 1 полностью доказана. □

4. Квазиинвариантные и инвариантные преобразования при наличии дополнительной симметрии

Предположим здесь, что каждая точка множества S дополнительно снабжена знаком (плюс или минус), т.е. S имеет вид

$S_0 \times \{-1, 1\}$, а мера π представима в виде $\pi_0 \times (c_+\delta_1 + c_-\delta_{-1})$, где через δ_1, δ_{-1} обозначены единичные массы, помещенные в точках 1 и -1 соответственно, а π_0 – конечная мера на S_0. Числа c_+, c_- предполагаются положительными.

Произведение $(0, \infty) \times \{-1, 1\}$ мы будем естественным образом отождествлять с вещественной прямой, причем мы будем рассматривать расширенную прямую $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ Точка ∞ по определению знака не имеет. (С топологической точки зрения это означает, что мы склеили точки $(-1, \infty)$ и $(1, \infty)$.)

Итак, в рассматриваемом здесь случае пространство G имеет вид $S_0 \times \overline{\mathbb{R}}$, а интенсивность Π пуассоновской меры есть $\pi_0 \times \gamma_0$, где

$$\gamma_0(dx) = \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}(c_+ \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + c_- \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)).$$

Построим сначала группу квазиинвариантных преобразований меры γ_0 В симметричном случае (когда $c_+ = c_-$) построенная группа окажется группой инвариантных преобразований. Важно отметить, что всюду далее функции x^α и $x^{1/\alpha}$ мы будем считать заданными на всей вещественной оси, причем на отрицательную полуось мы продолжаем их нечетным образом, т.е.

$$x^\alpha = \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha; \; x^{1/\alpha} = \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Поскольку число $\alpha \in (0, 2)$ мы считаем раз и навсегда фиксированным, ни к каким недоразумениям это не приведет.

Для каждого $t \in (-\infty, \infty)$ построим преобразование $T_t : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, полагая при $x \neq \infty$

$$T_t(x) = \frac{x}{(1 + \alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}, \tag{16}$$

и

$$T_t(\infty) = \frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}.$$

Для этого преобразования мы сохраним тоже обозначение, что и для преобразования, определяемого (6), но в отличие от (6) это преобразование действует из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ Кроме того, параметр t может быть как положительным, так и отрицательным. Легко проверить, что семейство T_t, $t \in (-\infty, \infty)$ образует однопараметрическую группу преобразований, т.е.

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s. \tag{17}$$

Посмотрим, как выглядит траектория $t \mapsto T_t(x)$ при фиксированном x Для определенности, пусть t возрастает от 0 до ∞ Ясно, что $T_t(0) \equiv 0$ Пусть $x > 0$, тогда при возрастании t точка $T_t(x)$ будет монотонно стремиться к нулю справа. В случае, когда $x < 0$ траектория за конечное время, равное $\frac{1}{\alpha|x|^\alpha}$ достигнет бесконечности, а когда t станет больше, чем $\frac{1}{\alpha|x|^\alpha}$ траектория попадет уже на положительную полуось и начнет монотонно двигаться к нулю.

Далее, найдем при фиксированном t меру $\gamma_0 T_t^{-1}$- образ меры γ_0 под действием T_t Пусть сначала $t > 0$ Функция T_t переводит интервал $[0, \infty]$ в $[0, \frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]$, интервал $[-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}, 0]$, в $[-\infty, 0]$ а интервал $[-\infty, -\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]$, в $[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}, \infty]$.

Соотношение

$$\gamma_0\big|_{[0,\infty]} T_t^{-1}(dx) = \gamma_0\big|_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(dx) = \frac{c_+ dx}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)$$

следует из (12), так как на $[0, \infty]$ мера γ_0 совпадает с $c_+\gamma$ Два других соотношения

$$\gamma_0\big|_{[-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},0]} T_t^{-1}(dx) = \gamma_0\big|_{[-\infty,0]}(dx) = \frac{c_- dx}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[-\infty,0]}(x)$$

и

$$\gamma_0\big|_{[-\infty,-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]} T_t^{-1}(dx) = \frac{c_- dx}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},\infty]}(x)$$

также легко проверяются.

Таким образом

$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \big(c_- \mathbf{1}_{[-\infty,0]}(x) + c_+ \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}})}(x) +$$

$$+ c_- \mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},\infty]}(x)\big). \tag{18}$$

Для $t < 0$ аналогичным образом получаем

$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \big(c_+ \mathbf{1}_{[0,\infty]}(x) + c_- \mathbf{1}_{(\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},0]}(x) + c_+ \mathbf{1}_{[-\infty,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)\big).$$

Заметим еще, что при $c_+ = c_-$

$$\gamma_0 T_t^{-1} = \gamma_0 \tag{18a}$$

Обозначим через $L(S_0)$ множество всех измеримых функций на S_0, а через $L_1(S_0, \pi_0)$ множество всех интегрируемых по мере π_0 функций.

Пусть $f \in L(S_0)$. Определим преобразование

$$\tau_f : S_0 \times \overline{\mathbb{R}} \to S_0 \times \overline{\mathbb{R}},$$

полагая

$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}). \tag{19}$$

Из (17) немедленно вытекает, что для любых $f, g \in L(S_0)$

$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g. \tag{20}$$

Далее, по аналогии с (10), определим семейство $\widetilde{\Phi}_f$, $f \in L(S_0)$ преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}(S_0 \times \overline{\mathbb{R}})$ в себя, полагая

$$\widetilde{\Phi}_f(X) = Y = \{(\theta, T_{f(\theta)}(x))\}.$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть $c_+ > 0$, $c_- > 0$ и $c_+ \neq c_-$. Тогда*

1. *Для любых $f, g \in L(S_0)$*

$$\widetilde{\Phi}_{f+g} = \widetilde{\Phi}_f \circ \widetilde{\Phi}_g.$$

2. *Для любого $f \in L_1(S_0, \pi_0)$ меры $P\widetilde{\Phi}_f^{-1}$ и P взаимно абсолютно непрерывны.*

3. *Для любого $f \notin L_1(S_0, \pi_0)$ меры $P\widetilde{\Phi}_f^{-1}$ и P взаимно сингулярны.*

Доказательство. Утверждение п. 1 теоремы следует из (20). Доказательство утверждений пп. 2, 3 аналогично доказательству теоремы 1. □

Рассмотрим теперь отдельно симметричный случай, когда $c_+ = c_-$.

Теорема 3. *Пусть $c_+ = c_-$. Тогда для любого $f \in L(S_0)$*

$$P\widetilde{\Phi}_f^{-1} = P.$$

(Отметим, что в симметричном случае не требуется интегрируемости f.)

Доказательство. Мера $P\widetilde{\Phi}_f^{-1}$ есть пуассоновская мера с интенсивностью $\Pi\tau_f^{-1}$ Покажем, что $\Pi\tau_f^{-1} = \Pi$ Действительно, преобразование τ_f не меняет координату $\theta \in S_0$, поэтому в силу (18a)

$$\Pi\tau_f^{-1}(d\theta, dx) = \pi_0(d\theta)(\gamma_0 T_{f(\theta)}^{-1}(dx)) = \pi_0(d\theta)\gamma_0(dx) = \Pi(d\theta, dx).$$

□

5. Преобразование траекторий устойчивых процессов

Рассмотрим пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ на множестве G специального вида $G = S \times (0, \infty)$, где $S = [0, 1] \times \{-1, 1\}$ На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi = \pi \times \gamma$, где, как и ранее, $\gamma(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$, а $\pi = \lambda \times (\alpha C_1 \delta_1 + \alpha C_2 \delta_{-1})$, где λ – мера Лебега, C_1, C_2 – параметры спектральной меры устойчивого процесса [10], а через δ_1, δ_{-1} обозначены, как и выше, единичные массы в точках 1 и -1.

В соответствии с (1), (2) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}(G), P)$ строго устойчивый случайный процесс может быть задан при $\alpha < 1$ в виде

$$\xi(t, X) = \sum_{\substack{(s,\varrho,x)\in X,\\ s\leqslant t}} \varrho x, \tag{21}$$

а для $\alpha \in [1, 2)$ в виде

$$\xi(t, X) = (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\sum_{\substack{(s,\varrho,x)\in X,\\ s\leqslant t, \varepsilon\leqslant x<\infty}} \varrho x - \alpha t (C_1 - C_2) \int_\varepsilon^\infty x\gamma(dx) \Bigg). \tag{22}$$

Суммирование в этих формулах проводится по точкам (s, ϱ, x) конфигурации $X \in \mathcal{X}$ Соответствие между конфигурациями и траекториями имеет очень простой смысл. Именно, если точка (s, ϱ, x) принадлежит конфигурации X, то построенная по X траектория случайного процесса в момент времени s имеет скачок величины ϱx (ϱ определяет знак скачка). Отображение $\mathcal{X} \to \mathbb{D}[0, 1]$, задаваемое (20) или (21), сопоставляющее конфигурации траекторию случайного процесса, будем обозначать через Ξ, так что

$$\Xi(X) = \xi(\cdot, X).$$

Отметим очевидный факт, что различные конфигурации порождают различные траектории случайного процесса: при $X_1 \neq X_2$

$$\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2). \tag{23}$$

Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$, т.е.

$$\mathcal{P}_\xi = P\Xi^{-1}. \tag{24}$$

Для каждой функции $z \in \mathbb{D}[0,1]$ через Δz будем обозначать функцию

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-0), \quad t \in [0,1],$$

а через ϱ функцию $\varrho(t) = \operatorname{sgn}(\Delta z(t))$

Ясно, что функции $\Delta z(t)$, $\varrho(t)$ отличны от нуля только в точках разрыва функции z.

Далее, пусть функция $f \in L_1^+([0,1] \times \{-1,1\})$. С помощью функции f мы определим преобразование $\Psi_f : \mathbb{D}[0,1] \to \mathbb{D}[0,1]$, полагая

$$[\Psi_f(z)](t) = z(t) + \sum_{s \leqslant t} \big(\varrho(s) T_{f(s,\varrho(s))}(|\Delta z(s)|) - \Delta z(s)\big), \tag{25}$$

где T_t, $t \geqslant 0$ – полугруппа преобразований (6).

Посмотрим, что происходит с функцией $z \in \mathbb{D}$ под действием этого преобразования. Если функция z имела в момент времени t скачок по модулю равный x и имеющий знак ϱ, то функция $\Psi_f(z)$ имеет в момент t скачок того же знака, модуль которого равен $T_{f(t,\varrho)}(x)$, т.е. преобразование меняет только абсолютную величину скачка, а момент скачка и его знак остаются неизменными. Отметим, что непрерывные функции являются неподвижными точками $\Psi_f(z)$. Далее, рассмотрим полугруппу преобразований Φ_f, $f \in L_1^+([0,1] \times \{-1,1\}, \pi)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, $G = [0,1] \times \{-1,1\} \times (0,\infty)$ в себя, задаваемое (10). Из (10), (20) и (25) немедленно следует, что

$$\Psi_f \circ \Xi = \Xi \circ \Phi_f. \tag{26}$$

Соотношение (26) показывает, что Ψ_f определено почти всюду по мере $\mathcal{P}_\xi$. Кроме того, из (7) вытекает, что для любых $f, g \in L_1^+([0,1] \times \{-1,1\}, \pi)$

$$\Psi_{f+g} = \Psi_f \circ \Psi_g.$$

Далее, для $f \in L_1^+([0,1]\times\{-1,1\},\pi)$ определим подмножество $\mathbb{D}_f$ множества $\mathbb{D}[0,1]$, полагая

$$\mathbb{D}_f = \left\{ z \in \mathbb{D}[0,1] : \forall t \in (0,1] |\Delta z(t)| < \frac{1}{(\alpha f(t,\varrho(t)))^{1/\alpha}} \right\}.$$

Из определения видно, что принадлежность множеству $\mathbb{D}_f$ означает определенные ограничения на величину скачков – в каждый момент времени величина скачка не должна быть больше определенного значения.

Теорема 4. *Для любого* $f \in L_1^+([0,1]\times\{-1,1\},\pi)$

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} \ll \mathcal{P}_\xi,$$

причем

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} = e^{\int_0^1 (f(t,-1)+f(t,1))dt} \cdot \mathcal{P}_\xi\big|_{\mathbb{D}_f}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и (26)

$$P\Phi_f^{-1} \ll P,$$

следовательно

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} \ll P\Xi^{-1}. \tag{27}$$

Правая часть (27) равна $\mathcal{P}_\xi$, а левая часть

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} = P(\Xi\circ\Phi_f)^{-1} = P(\Psi_f\circ\Xi)^{-1} = (P\Xi^{-1})\Psi_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi\Psi_f^{-1}.$$

□

Предположим теперь дополнительно, что процесс ξ не является односторонним, т.е. $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. На пространстве конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$ рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt,dx)$ вида

$$dt\big(c_+\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + c_-\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)\big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}},$$

где $c_+ = \alpha C_1$, $c_- = \alpha C_2$ (напомним, что C_1, C_2 – параметры спектральной функции устойчивого процесса).

В соответствии с (1), (2) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}),P)$ однородный строго устойчивый процесс $\xi(t)$ может быть задан при $\alpha<1$

$$\xi(t,X)=\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\,x\neq\infty}} x, \tag{28}$$

а при $\alpha\in[1,2)$

$$\xi(t,X)=(L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant|x|<\infty}} x-t(c_+-c_-)\int\limits_{\varepsilon\leqslant x} x\,d\gamma\right). \tag{29}$$

Отметим, что в симметричном случае, когда $C_1=C_2$, формула (29) принимает более простой вид

$$\xi(t,X)=(L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{(s,t)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon<|x|<\infty}} x.$$

Далее, рассмотрим группу T_t, $t\in(-\infty,\infty)$, определяемую (16) и соответствующую ей группу $\widetilde{\Phi}_f$, $f\in L_1[0,1]$ преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$. Аналогично тому, как это делалось выше, с помощью группы $\widetilde{\Phi}_f$ и отображения Ξ (задаваемого (28), (29)) определим группу $\widetilde{\Psi}_f$, $f\in L_1[0,1]$ преобразований пространства $\mathbb{D}[0,1]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\widetilde{\Psi}_f\circ\Xi=\Xi\circ\widetilde{\Phi}_f.$$

Легко проверить, что преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ может быть задано формулой

$$[\widetilde{\Psi}_f(z)](t)=z(t)+\sum_{\substack{s\leqslant t,\\ T_{f(s)}(\Delta z(s))\neq\infty}}(T_{f(s)}(\Delta z(s))-\Delta z(s)). \tag{30}$$

Отметим, что в отличие от преобразования Ψ_f (определяемого из (25)) преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ может менять не только величину скачка, но и его знак.

Теорема 5. *Пусть $C_1 \neq C_2$. Тогда*

1. *для любого $f \in L_1[0,1]$ преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ определено на множестве $\mathcal{P}_\xi$-полной меры.*

2. *Для любых $f, g \in L_1[0,1]$*

$$\widetilde{\Psi}_{f+g} = \widetilde{\Psi}_f \circ \widetilde{\Psi}_g.$$

3. *Для любого $f \in L_1[0,1]$ меры $\mathcal{P}_\xi \widetilde{\Psi}_f^{-1}$ и $\mathcal{P}_\xi$ взаимно абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Утверждение теоремы фактически следует из теоремы 2, при этом используются соображения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 4. □

Рассмотрим теперь отдельно симметричный случай когда $C_1 = C_2$.

Теорема 6. *Пусть $C_1 = C_2$. Тогда*

1. *Для любой борелевской функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ определено на множестве $\mathcal{P}_\xi$-полной меры.*

2. *Для любых борелевских функций f, g*

$$\widetilde{\Psi}_{f+g} = \widetilde{\Psi}_f \circ \widetilde{\Psi}_g.$$

3. *Для любой борелевской функции f*

$$\mathcal{P}_\xi \widetilde{\Psi}_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 3. □

Литература

1. Y. Takahashi, *Absolute continuity of Poisson random fields.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), 629–649.
2. J. Kerstan, K. Mattes, J. Mecke, *Infinite divisible point processes.* Akademie-Verlag, Berlin (1978).
3. W. Linde, *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* Leipzig: Teubner (1983).
4. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **II** (1957), 629–649.
5. А. В. Скороход, *Стохастические процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1986).
6. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes.* Oxford (1993).

7. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of diffeomorphisms.* — Russian Math. Surveys **30** (1975), 3–50.
8. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math. **329** (1999), 163–168.
9. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М. (1977).
10. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения.* Наука, М. (1983).

Smorodina N. V. The invariant and quasi-invariant transformations of the stable processes with independent increments.

Let $\xi(t), t \in [0,1]$ be a strictly stable process with the index of stability $\alpha \in (0,2)$. By $\mathcal{P}_\xi$ we denote the law of ξ in the Skorokhod space $\mathbb{D}[0,1]$. For arbitrary strictly stable process ξ we construct $\mathcal{P}_\xi$–quasi-invariant semigroup of transformations of $\mathbb{D}[0,1]$. For strictly stable processes with positive and negative jumps we construct $\mathcal{P}_\xi$–quasi-invariant group of transformations of $\mathbb{D}[0,1]$. In symmetric case this group is a group of the invariant transformations.

Санкт-Петербургский
государственный университет

E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 11 ноября 2006 г.