Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

О. В. Русаков[1], **А. Н. Чупрунов**

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

1. Введение

Конструкции, основанные на суммировании случайных величин с замещениями, являются гибким инструментом для построения различных типов шума ([1, 2]). Мы применяем эту конструкцию для построения неоднородного процесса Орнштейна–Уленбека, который возникает как предел в функциональной предельной теореме. Неоднородный процесс Орнштейна–Уленбека является марковским процессом с параметром вязкости, зависящим от времени. Этот процесс может быть описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением типа уравнения Ланжевена

$$dX(t) = -H(t)X(t)dt + \sqrt{2H(t)}dW(t),$$

где $H(t)$, $t \geq 0$ – некоторая положительная функция; начальное значение $X(0)$ не зависит от броуновского движения W. Параметр вязкости H определяется интенсивностью замещений случайных величин их независимыми копиями.

Схема с замещениями подробно описана в [3]. Техническая часть доказательств основана на работах ([4–7]). В работе [9] исследуется поведение дисперсии сумм случайных величин в схеме с замещениями.

Различные обобщения процесса Орнштейна–Уленбека востребованы в стохастических финансах. Процессы типа Орнштейна–Уленбека используются, в первую очередь, для моделей волатильности в процессах типа геометрического броуновского движения. Обобщения процесса Орнштейна–Уленбека на негауссовский случай для описания процесса волатильности подробно обсуждаются в работе [12]. Существуют модели, в которых обычный процесс Орнштейна–Уленбека применяется для описания эволюции самой цены акции [13]. Геометрический процесс

[1]Работа поддержана грантом НШ 4222.2006.1.

Орнштейна–Уленбека и его возникновение в финансовых моделях на основе определенных микроэкономических предпосылок рассмотрен в [15]. Использование схемы суммирования с замещениями для построения финансовой модели с геометрическим процессом Орнштейна–Уленбека описано в [8, 14]. Рассматриваемая нами схема с замещениями использует симметрично-зависимые точечные процессы, применение которых в моделях финансовой математики подробно рассмотрено в [11]. В схеме с замещениями в однородном случае пределом для случайных моментов замещений при переходе к непрерывному времени будет стандартный процесс Пуассона (см. [10]).

2. Обозначения, предположения и предварительные результаты

Мы используем следующие обозначения: $\triangleq$ – равенство по определению; $\xrightarrow{d}$ – сходимость случайных элементов по распределению; $\overset{d}{=}$ – равенство по распределению или совпадение конечномерных распределений; $\xrightarrow{p}$ – сходимость по вероятности; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $[c]$ – целая часть $c \in \mathbb{R}$; $\{c\}$ – дробная часть $c \in \mathbb{R}$; Q_T – множество чисел из интервала $[0, T]$, $T < \infty$, имеющих вид qT для рациональных $q \in [0, 1]$; I_A – индикаторная функция события A; $\gamma(v)$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение $\mathcal{N}(0, v^2)$, $v > 0$; $\gamma \triangleq \gamma(1)$; (k_n) – последовательность возрастающих натуральных чисел, заданная при $n \in \mathbb{N}$; W – стандартное броуновское движение. Для произвольной случайной величины Y мы обозначаем: $Y^{(1)} = Y I_{\{|Y| \leqslant 1\}} - \mathbf{E} Y I_{\{|Y| \leqslant 1\}}$; $Y^{(2)} = Y - Y^{(1)}$; $\sigma^2(Y)$ – дисперсия Y. Мы полагаем, что всякая сумма по пустому множеству индексов равна нулю, а произведение единице, $\sum_{\emptyset} a_i = 0$ и $\prod_{\emptyset} a_i = 1$.

Мы строим случайные ломаные как элементы пространства $C[0, T]$, где $T < \infty$. Мы рассматриваем вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$, которое распадается на прямое произведение двух вероятностных пространств $\{\Omega_0, \mathfrak{A}_0, \mathbf{P}_0\}$ – для независимых случайных величин, образующих белый шум, и $\{\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1\}$ – для их замещений, когда

$$\mathbf{P}\{\omega = (\omega_0, \omega_1) : \omega_0 \in A_0 \in \mathfrak{A}_0,\ \omega_1 \in A_1 \in \mathfrak{A}_1\} = \mathbf{P}_0(A_0)\mathbf{P}_1(A_1).$$

Соответствующие математические ожидания мы обозначаем, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_1$.

Основная идея для построения нашей модели шума заключается в том, что мы умножаем (взвешиваем) случайные величины (инновации), которые заданы на вероятностном подпространства $\{\Omega_0, \mathfrak{A}_0, \mathbf{P}_0\}$, на случайные индикаторы, которые заданы на вероятностном подпространства $\{\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1\}$. Эти индикаторы выстраиваются в последовательность, зависящую от временного параметра. Их мы интерпретируем как "поток информационных событий".

Мы определяем схему серий для событий, определяющих замещения,

$$A_{ji} = A_{ji}(n) \in \mathfrak{A}_1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant [Tk_n] \stackrel{\triangle}{=} K_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

здесь первый индекс j (номер строки) играет роль дискретного времени, а второй индекс i (номер столбца) играет роль номера случайной величины – элементарного возмущения, которое дает вклад в общее значение шума в момент времени j. В каждый момент времени j суммы таких элементарных возмущений будут подчиняться центральной предельной теореме и сформируют нормально распределенное значение шума. Дополнения к введенным событиям мы обозначаем A^c_{ji}.

Мы предполагаем, что поток информационных событий $\{A_{ji}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $1 \leqslant j \leqslant K_n$, обладает свойством независимости по совокупности значений мультииндекса (i, j). Индекс $j \leqslant K_n$ нумерует узлы разбиения интервала $[0, T]$ с шагом $1/k_n$ до точки K_n/k_n. Предположим, что события $\{A_{ji}\}$ также удовлетворяет следующим свойствам **(A1)** и **(A2)**.

(A1) Поток информационных событий однороден по столбцам, то есть для всякого $1 \leqslant i \leqslant k_n$ выполнены равенства,

$$\mathbf{P}(A_{ji}) = \mathbf{P}_1(A_{ji}) \stackrel{\triangle}{=} p_j \equiv p_j(n)$$

и

$$\mathbf{P}(A^c_{ji}) = \mathbf{P}_1(A^c_{ji}) \stackrel{\triangle}{=} q_j \equiv q_j(n) = 1 - p_j(n).$$

(A2) Для всякого фиксированного n вероятности $p_j(n)$ монотонно не убывают по j. Для всякого $t \in [0, T]$ существует предел при $n \to \infty$,

$$\prod_{j=1}^{[k_n t]} p_j(n) \stackrel{\triangle}{=} h_n(t) \to h(t),$$

где h – некоторая положительная убывающая функция.

Условие **(A2)** равносильно следующему условию **(A3)**, сформулированному для дополнительных событий.

(A3) Для каждого $t \in [0,T]$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{[k_n t]} q_j(n) = g(t),$$

где $g(t)$ – неотрицательная возрастающая функция. При этом $g(t) = -\ln(h(t))$.

Замечание 1. Из условия **(A2)** и предположения о том, что произведение по пустому множеству индексов равно единице следует, что $h(0) = 1$. Аналогично, из условия **(A3)** и предположения о том, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю следует, что $g(0) = 0$. Нетрудно видеть, что сходимость в условиях **(A2)** и **(A3)** – равномерная.

Замечание 2. Для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ имеем следующие элементарные неравенства для функций g и h

$$g(t_2) - g(t_1) = -\ln\frac{h(t_2)}{h(t_1)} \geqslant 1 - \frac{h(t_2)}{h(t_1)} \geqslant 0.$$

Для $t_1, t_2 \in [0,T]$ определим следующие функции

$$f(t_1,t_2) = \min\left(\frac{h(t_2)}{h(t_1)},\ \frac{h(t_1)}{h(t_2)}\right) \text{ и } f_n(t_1,t_2) = \min\left(\frac{h_n(t_2)}{h_n(t_1)},\ \frac{h_n(t_1)}{h_n(t_2)}\right).$$

Функции h, g, f, f_n будут определять ковариационную структуру в нашей конструкции шума.

Далее мы вводим случайные величины, которые будем суммировать, то есть элементарные возмущения, которые порождают шум. Эти случайные величины мы определяем в рамках схемы серий.

(Y) Пусть, $Y = \{Y_n, Y_{nji} \equiv Y_{ji},\ 1 \leqslant i \leqslant k_n,\ 0 \leqslant j \leqslant K_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – набор случайных величин, определенных на вероятностном подпространстве $\{\Omega_0, \mathfrak{A}_0, \mathbf{P}_0\}$, таких, что для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ случайные величины Y_n, Y_{nji} независимы и одинаково распределены.

Для случайных величин, определенных в **(Y)**, мы предполагаем, что выполняется следующая сходимость к нормальному закону (одно из стандартных условий, возникающих в схеме серий).

(S) В каждый момент j дискретного времени имеет место сходимость по распределению сумм случайных возмущений к нормальному закону $\mathcal{N}(0, v^2)$,

$$\sum_{i=1}^{k_n} Y_{nji} \xrightarrow{d} \gamma(v), \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нам потребуются две следующие технические леммы.

Лемма A. *Допустим, что удовлетворяется условие* **(Y)**. *Тогда справедливы следующие утверждения* (1), (2).

(1) Условие **(S)** выполнено тогда и только тогда, когда следующие предельные соотношения справедливы при $n \to \infty$:

(1a) $k_n \mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$;

(2a) $k_n \mathbf{E} Y_n I_{\{|Y_n| \leqslant 1\}} \to 0$;

(3a) $k_n \sigma^2(Y_n^{(1)}) \to v^2$.

(2) Пусть условие **(S)** выполнено, и числа $b_{ni} \in \mathbb{R}$ равномерно ограничены $\sup_{\{1 \leqslant i \leqslant k_n, n \in \mathbb{N}\}} |b_{ni}| < \infty$. Обозначим $U_n \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} Y_{n1i}$. Для последовательности (U_n) имеет место следующая сходимость при $n \to \infty$,

$$U_n \xrightarrow{d} \gamma(v_1)$$

тогда и только тогда, когда выполнено стоящее ниже предельное соотношение (4a).

(4a) Существует постоянная $c > 0$, такая что

$$\sigma^2(Y_n I_{\{|Y_n| \leq c\}}) \sum_{i=1}^{k_n} (b_{ni})^2 \to v_1^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Лемма A является простым следствием критерия сходимости по распределению к нормальному закону для независимых случайных величин, удовлетворяющих условию равномерной бесконечной малости.

Лемма B. *Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы* (ζ_{ni}), $1 \leqslant i \leqslant k_n$, *– независимые одинаково распределенные в каждой серии случайные величины, имеющие конечный* 4*-ый момент. Допустим, что существует универсальная константа*

$C > 0$, такая, что для всех $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\mathbf{E}(\zeta_{ni} - \mathbf{E}\zeta_{ni})^4 \leqslant C$, и имеет место сходимость $\mathbf{E}\zeta_{ni} \to p$ для некоторой постоянной p при $n \to \infty$. Тогда существует почти наверное предел при $n \to \infty$,

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \zeta_{ni} \to p.$$

Лемма B является одной из форм усиленного закона больших чисел для схемы серий.

В следующем ниже тексте индикаторы $I_{A_{ji}(n)}$ мы обозначим через I_{ji}, а индикаторы соответствующих дополнительных событий, $I_{A^c_{ji}(n)} \triangleq I^c_{ji}$. Лемма B потребуется нам для доказательства закона больших чисел для данных индикаторов.

3. Случайные ломаные и их предельное поведение

Основное определение. Пусть выполнено условие **(Y)**. Определим последовательность шума как последовательность сумм (S_j), каждый элемент которой состоит из слагаемых Y'_{ji}, принадлежащих множеству Y из условия **(Y)**. Мы используем следующую рекуррентную процедуру.

Каждая последующая сумма, взятая по строке $j+1$ есть сумма по предыдущей строке j, трансформированная таким образом, что случайное число слагаемых замещается на независимые копии, то есть,

$$S_0 \equiv S_0(Y) \equiv S_0(\omega_1, n, Y) = \sum_{i=1}^{k_n} Y_{0i} \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} Y'_{0i};$$

$$S_1 \equiv S_1(Y) \equiv S_1(\omega_1, n, Y) = \sum_{i=1}^{k_n} I_{p1i} Y'_{0i} + \sum_{i=1}^{k_n} I^c_{1i} Y_{1i} \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} Y'_{1i};$$

$$\vdots$$

$$S_j \equiv S_j(Y) \equiv S_j(\omega_1, n, Y) = \sum_{i=1}^{k_n} I_{ji} Y'_{(j-1)i} + \sum_{i=1}^{k_n} I^c_{ji} Y_{ji} \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} Y'_{ji};$$

$$\vdots \tag{X1}$$

Следующим шагом определим разрывные и непрерывные случайные ломаные (допредельный шум в непрерывном времени). Подчеркнем зависимость этих ломаных от случайного параметра – информационного параметра $\omega_1 \in \Omega_1$. Для случая непрерывных справа, имеющих пределы слева ломаных,

$$X'_n(t) \equiv X'_n(t, \omega_1, n, Y) \triangleq S_{[tk_n]}(\omega_1), \quad t \in [0, T];$$

и для случая непрерывных ломаных,

$$X_n(t) \triangleq \begin{cases} S_{[tk_n]}(\omega_1) + \{tk_n\}(S_{[tk_n]+1}(\omega_1) - S_{[tk_n]}(\omega_1)) & \\ & \text{при} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{K_n}{k_n}, \\ S_{K_n}(\omega_1) & \text{при} \quad \dfrac{K_n}{k_n} \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \qquad \text{(X2)}$$

Теорема 1. *Допустим, что выполнены условия* **(A1)**, **(A2)**, **(Y)**, **(S)**. *Рассмотрим случайные ломаные, определенные выражениями* (X1) *и* (X2). *Тогда для* $\mathbf{P}_1$*-почти всех* $\omega_1 \in \Omega_1$ *в пространстве* $C[0, T]$ *для случайных элементов* $X_n \equiv X_n(t)$ *имеет место следующая сходимость при* $n \to \infty$,

$$X_n \xrightarrow{d} X,$$

где $X \equiv X(t)$, $t \in [0, T]$ *– центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией* $B(t_1, t_2) = v^2 f(t_1, t_2)$.

Мы проиллюстрируем теорему 1 следующими примерами.

Пример 1 (стандартный процесс Орнштейна–Уленбека). Пусть, $k_n = n$, $b > 0$, $q_j = (b/n)$, $p_j = 1 - (b/n)$. Тогда для каждого $t \in [0, T]$ мы вычисляем значение функции $h(t)$

$$h(t) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{b}{n}\right)^{[nt]} = e^{-bt}.$$

Таким образом условия теоремы 1 выполнены и предельный процесс X имеет ковариационную функцию $B(t_1, t_2) = v^2 e^{b(t_1 - t_2)}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Пример 2 (неоднородный процесс Орнштейна–Уленбека I). Пусть, $k_n = n$, $m > 0$,

$$q_j = \frac{m}{n + (j-1)m} \quad \text{и} \quad p_j = 1 - \frac{m}{n + (j-1)m} = \frac{n + (j-2)m}{n + (j-1)m}.$$

Таким образом мы имеем для каждого $t \in [0,T]$,

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n}\, \frac{n}{n+m} \cdots \frac{n+([tn]-2)m}{n+([tn]-1)m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n+([tn]-1)m} = \frac{1}{1+tm}.$$

Условия теоремы 1 выполнены и предельный процесс X имеет ковариационную функцию $B(t_1,t_2) = v^2((1+mt_1)/(1+mt_2))$, $0 \le t_1 \le t_2 \le T$.

Пример 3 (неоднородный процесс Орнштейна–Уленбека II). Пусть, $k_n = n$, и $m > 0$, причем $mT < 1$. Тогда

$$q_j = \frac{m}{n-(j-1)m} \quad \text{и} \quad p_j = 1 - \frac{m}{n-(j-1)m} = \frac{n-jm}{n-(j-1)m}.$$

Для всякого $0 \leqslant t \leqslant T$ после несложных вычислений мы получаем значения для $h(t)$,

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n}\, \frac{n-2m}{n-m} \cdots \frac{n-[tn]m}{n-([tn]-1)m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-[tn]m}{n} = 1 - tm.$$

Условия теоремы 1 выполнены и предельный процесс X имеет ковариационную функцию $B(t_1,t_2) = v^2((1-mt_2)/(1-mt_1))$, $0 \le t_1 \le t_2 \le T$.

Следствие 1. *Пусть $h : [0,T] \mapsto (0,1]$ – положительная строго монотонно убывающая функция, такая что $h(0) = 1$. Положим для каждого $1 \leqslant j \leqslant K_n$*

$$p_j(n) \triangleq \frac{h\left(\left[\frac{j}{k_n}\right]\right)}{h\left(\left[\frac{(j-1)}{k_n}\right]\right)}.$$

Тогда вероятности $p_j(n)$ удовлетворяют условию **(A2)** *с предельной функцией h. Следовательно, теорема 1 выполняется, предельный процесс имеет вид*

$$X \stackrel{d}{=} vh(t)W\left(\frac{1}{(h(t))^2}\right), \qquad (L)$$

Очевидно, что процесс X имеет постоянную дисперсию, но не является стационарным, за исключением случая, когда $h(t)$ – экспонента (с отрицательным показателем). В случае, когда $h(t)$ – экспонента, мы имеем преобразование Ламперти [16], которое связывает по распределению броуновское движение и процесс Орнштейна–Уленбека. Заменяя экспоненту на функцию h (которая должна наследовать некоторые свойства экспоненты, в частности, монотонность) мы получаем *неоднородный процесс Орнштейна–Уленбека.*

Напомним, $g(t) = -\ln(h(t))$ из условий **(A2)**, **(A3)**. Предположим, что g дифференцируемая. Определим функцию $H(t) \triangleq dg/dt$. Положим для простоты, $v = 1$. После некоторых вычислений мы можем записать стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) для предельного процесса X,

$$dX(t) = -H(t)X(t)dt + \sqrt{2H(t)}dW(t). \tag{U}$$

Начальное значение $X(0)$ не зависит от W и имеет стандартное нормальное распределение. Заметим, что СДУ (У) обобщает СДУ (Ланжевена) для стандартного процесса Орнштейна–Уленбека, в котором $H(t) = \beta > 0$. Функция $H(t)$ играет роль коэффициента вязкости для нашей модели шума.

Отметим, что в примерах 1–3, соответственно, мы имеем следующее представление для процесса X в смысле преобразования Ламперти,

$$X(t) \stackrel{d}{=} ve^{-bt}W\left(e^{2bt}\right); \tag{Ex1}$$

$$X(t) \stackrel{d}{=} v\frac{1}{1+mt}W\left((1+mt)^2\right) \tag{Ex2}$$

$$X(t) \stackrel{d}{=} v(1-mt)W\left(\frac{1}{(1-mt)^2}\right) \tag{Ex3}$$

Следующие теоремы 2, 3 устанавливают сходимость к интегралам от неоднородного процесса Орнштейна–Уленбека. Для изучения в нашей модели предельного поведения накопленных значений шума мы вводим следующие случайные процессы, заданные при $t \in [0,T]$ и для всех $\omega_1 \in \Omega_1$,

$$
\begin{aligned}
Z'_n(t) &\equiv Z'_n(t,\omega_1,Y) \triangleq \frac{1}{k_n}\sum_{l=0}^{[k_n t]} S_l,\\
Z_n(t) &\equiv Z_n(t,\omega_1,Y) \triangleq \int_0^t X'_n(s)ds.
\end{aligned}
\tag{X3}
$$

Теорема 2. *Пусть условия* **(A1)**, **(A2)**, **(Y)**, **(S)** *выполнены. Пусть случайные ломаные определены условиями* (X1) *и* (X3). *Тогда для* $\mathbf{P}_1$*-почти всех* $\omega_1 \in \Omega_1$ *следующая сходимость выполнена в* $C[0,T]$ *при* $n \to \infty$,

$$Z_n \xrightarrow{d} Z,$$

где $Z = Z(t)$, $t \in [0,T]$ *– центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией*

$$B_1(t_1,t_2) = v^2 \int_0^{t_1} dx \int_0^{t_2} f(x,y)dy.$$

Заметим, что случайные ломаные (Z'_n) в левой части условия (X3) разрывны. Поэтому мы должны рассматривать сходимость в более широком классе функций, чем $C[0,T]$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* **(A1)**, **(A2)**, **(Y)**, **(S)**. *Пусть случайные ломаные определены условиями* (X1) *и* (X3). *Тогда для* $\mathbf{P}_1$*-почти всех* $\omega_1 \in \Omega_1$ *следующая сходимость выполнена в* $L^\infty[0,T]$ *при* $n \to \infty$,

$$Z'_n \xrightarrow{d} Z.$$

Замечание 3. Так как траектории случайного процесса Z'_n имеют скачки в рациональных точках, мы можем в теореме 3 вместо пространства $L^\infty[0,T]$ взять наименьшее замкнутое подпространство кусочно-постоянных функций с возможными скачками только в рациональных точках. Это подпространство уже будет сепарабельным. Благодаря этому мы будем иметь достаточно широкий класс функционалов, которые измеримы относительно предельного процесса Z в теореме 3.

Теорема 4. *Теоремы* 1, 2, 3 *остаются верными, если в них опустить фразу "для* $\mathbf{P}_1$*-почти всех* $\omega_1 \in \Omega_1$*".*

4. Леммы

Прежде, чем приступать к доказательству теорем, мы должны запастись рядом лемм.

Рассмотрим следующие условия.

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{[k_nt]}I_{ji}^c(\omega_1)=g(t),$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\prod_{j=[k_nt_1]+1}^{[k_nt_2]}I_{ji}(\omega_1)=f(t_1,t_2).$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* **(A1)**, **(A2)**. *Тогда существует такое событие $\Omega'\subset\Omega_1$, что $\mathbf{P}_1(\Omega')=1$ и для всякого $\omega_1\in\Omega'$, для всех t, t_1, $t_2\in[0,T]$, $t_1\leqslant t_2$; условия* 1), 2) *выполнены.*

Доказательство леммы 1. Положим, $g_{ni}^{(1)}(t)\equiv g_{ni}^{(1)}=\sum_{j=1}^{[k_nt]}I_{ji}^c$, $g_{ni}^{(2)}(t)\equiv g_{ni}^{(2)}=\prod_{j=[k_nt_1]+1}^{[k_nt_2]}I_{ji}$. Тогда для всех $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$,

$$\mathbf{E}_1(g_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}_1g_{ni}^{(1)})^4\leqslant\sum_{j=1}^{[k_nT]}p_jq_j(1-p_jq_j)+$$

$$+12\sum_{j_1=1}^{[k_nT]}\sum_{j_2=j_1+1}^{[k_nT]}p_{j_1}q_{j_1}p_{j_2}q_{j_2}\leqslant\sum_{j=1}^{[k_nT]}q_j+6\left(\sum_{j=1}^{[k_nT]}q_j\right)^2\leqslant C,$$

где $C=C_1+6(C_1)^2$ и при условии (**A3**), $C_1=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_{j=1}^{[k_nT]}q_j(n)<\infty$. Следовательно, $0\leqslant g_{ni}^{(2)}\leqslant 1$. Значит при $t\in[0,T]$ ограничен 4-ый момент, $\mathbf{E}_1(g_{ni}^{(2)}-\mathbf{E}_1g_{ni}^{(2)})^4\leqslant 1$.

Благодаря счетности множества Q_T и по лемме B существует $\Omega'\subset\Omega_1$ со свойством: $\mathbf{P}_1(\Omega')=1$, и для всех $\omega_1\subset\Omega'$, для всех $t_1,t_2,t\in Q_T$, $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$; условия 1) и 2) выполнены.

На следующем шаге мы показываем, что для всех $\omega_1\in\Omega'$ условие 2) выполняется без предположения: $t_1,t_2\in Q_T$. Заметим, что это верно при $t_1=t_2$.

Пусть $\omega_1\in\Omega'$, и $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$. Положим,

$$h_n(t_1,t_2)(\omega_1)=\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\prod_{j=[t_1k_n]+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}.$$

Мы выберем такие t_{11}, t_{12}, t_{21}, $t_{22} \in Q_T$, что $0 \leqslant t_{11} \leqslant t_1 \leqslant t_{12} \leqslant t_{21} \leqslant t_2 \leqslant t_{22} \leqslant T$. Тогда,

$$h_n(t_{11}, t_{22})(\omega_1) \leqslant h_n(t_1, t_2)(\omega_1) \leqslant h_n(t_{12}, t_{21})(\omega_1).$$

Поэтому,

$$f(t_{11}, t_{22}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} h_n(t_1, t_2)(\omega_1) \leqslant \limsup_{n\to\infty} h_n(t_1, t_2)(\omega_1) \leqslant f(t_{21}, t_{12}).$$

Из последних неравенств и из непрерывности функции f следует, что $h_n(t_1, t_2)(\omega_1) \to f(t_1, t_2)$ при $n \to \infty$. Выполнение условия 2) доказано.

Выполнение условия 1) при всяком $t \in [0, T]$ устанавливается аналогичным образом. Лемма 1 доказана.

Обозначим,

$$g'_{ni}(t_1, t_2)(\omega_1) \triangleq \frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \left(\sum_{j_2=0}^{j_1} \prod_{j=[\frac{j_2}{k_n}]k_n+1}^{[\frac{j_1}{k_n}]k_n} I_{ji}(\omega_1) + \sum_{j_2=j_1+1}^{[t_2 k_n]} \prod_{j=[\frac{j_1}{k_n}]k_n+1}^{[\frac{j_2}{k_n}]k_n} I_{ji}(\omega_1) \right),$$

$$G_n(t_1, t_2)(\omega_1) \triangleq \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} g'_{ni}(t_1, t_2)(\omega_1), \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T.$$

С целью доказательства теоремы 2 мы обобщаем лемму 1.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *тогда существует такое событие* $\Omega'' \subset \Omega_1$, *что* $\mathbf{P}_1(\Omega'') = 1$, *и для всех* $\omega_1 \in \Omega''$, *для всех* $t, t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 \leqslant t_2$, *выполнены условия* 1), 2), *а также выполнено следующее условие* 3), *при* $n \to \infty$,

3) $$\lim_{n\to\infty} G_n(t_1, t_2)(\omega_1) \to \int_0^{t_1} dx \int_0^{t_2} f(x, y) dy.$$

Доказательство леммы 2. Пусть $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. Функции g'_{ni} удовлетворяют свойствам: $0 \leqslant g'_{ni}(t_1, t_2) \leqslant T^2$ и

$$\mathbf{E} g'_{ni}(t_1, t_2) = \frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \left(\sum_{j_2=0}^{j_1} \prod_{j=[\frac{j_2}{k_n} k_n]+1}^{[\frac{j_1}{k_n} k_n]} p_j(n) + \sum_{j_2=j_1+1}^{[t_2 k_n]} \prod_{j=[\frac{j_1}{k_n} k_n]+1}^{[\frac{j_2}{k_n} k_n]} p_j(n) \right)$$

$$= \frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \sum_{j_2=1}^{[t_2 k_n]} f_n \left(\frac{j_1}{k_n}, \frac{j_2}{k_n} \right).$$

Значит, $h_n(t) \to h(t)$ $(n \to \infty)$ равномерно по $t \in [0,T]$, и $h(t) \geqslant h(T) > 0$ для $t \in [0,T]$. Тогда, $f_n(x,y) \to f(x,y)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x, y \in [0,T]$. Таким образом, при $n \to \infty$, имеет место сходимость,

$$\frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \sum_{j_2=1}^{[t_2 k_n]} f_n \left(\frac{j_1}{k_n}, \frac{j_2}{k_n} \right) - \frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \sum_{j_2=1}^{[t_2 k_n]} f \left(\frac{j_1}{k_n}, \frac{j_2}{k_n} \right) \to 0.$$

По построению интеграла Римана мы имеем следующую сходимость при $n \to \infty$,

$$\frac{1}{k_n^2} \sum_{j_1=1}^{[t_1 k_n]} \sum_{j_2=1}^{[t_2 k_n]} f \left(\frac{j_1}{k_n}, \frac{j_2}{k_n} \right) \to \int_0^{t_1} dx \int_0^{t_2} f(x,y) dy.$$

Далее, благодаря счетности множества Q_T и по лемме B существует событие $\Omega''' \subset \Omega_1$ со следующими свойствами: $\mathbf{P}_1(\Omega''') = 1$ и для всех $\omega_1 \in \Omega'''$, для $t_1, t_2, t \in Q_T$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, выполнено условие 3).

Так как функция $f_1(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} dx \int_0^{t_2} f(x,y) dy$ возрастающая по обоим аргументам, мы повторяем конец доказательства леммы 1 и получаем, что для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, при всех $\omega_1 \in \Omega'''$ условие 3) выполнено.

Теперь положим $\Omega'' = \Omega''' \cap \Omega'$. Тогда для всех $\omega_1 \in \Omega'''$ условия 1), 2) и 3) выполнены. Лемма 2 доказана.

Введем обозначения:

$$Y^{(1)} \triangleq \{Y_n^{(1)}, Y_{nji}^{(1)}\ 1 \leqslant i \leqslant k_n, 1 \leqslant j \leqslant K_n, n \in \mathbf{N}\};$$

$$Y^{(2)} \triangleq \{Y_n^{(2)}, Y_{nji}^{(2)}\ 1 \leqslant i \leqslant k_n, 1 \leqslant j \leqslant K_n, n \in \mathbf{N}\}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* **(A1)**, **(A2)**, **(Y)**, **(S)**. *Тогда для всякого $\omega_1 \in \Omega'$ следующие три сходимости по вероятности имеют место при $n \to \infty$,*

(i) $X_n(Y) - X_n(Y^{(1)}) \xrightarrow{p} 0$ *в пространстве* $C[0,T]$;

(ii) $Z_n(Y) - Z_n(Y^{(1)}) \xrightarrow{p} 0$ *в пространстве* $C[0,T]$;

(iii) $Z'_n(Y) - Z'_n(Y^{(1)}) \xrightarrow{p} 0$ *в пространстве* $L^\infty[0,T]$.

Доказательство леммы 3. Сначала мы докажем (ii). Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что

$$S_l(Y) = \sum_{i=1}^{k_n} \left(I_{li} I_{(l-1)i} \dots I_{1i} Y_{0i} + \sum_{j=1}^{l} \left(\prod_{k=j+1}^{l-1} I_{ki} \right) I^c_{ji} Y_{ji} \right). \quad (1)$$

Таким образом, для таких $n \in \mathbb{N}$, что $|\mathbf{E} Y_n I_{\{|Y_n| \leqslant 1\}}| < \frac{\varepsilon}{3T}$, мы имеем оценку,

$$\mathbf{P}\{ \sup_{t\in[0,T]} |Z_n(Y) - Z_n(Y^{(1)})| > \varepsilon\}$$

$$= \mathbf{P}\{ \sup_{t\in[0,T]} |Z_n(Y^{(2)})| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{3T \sup_{0\leqslant l\leqslant[k_nT]} |S_l(Y^{(2)})| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \big(k_n + \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{[Tk_n]} I^c_{ji})\mathbf{P}\{|Y_n| > 1\} =$$

$$(1 + \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{[Tk_n]} I^c_{ji})\mathbf{P}\{|Y_n| > I^c_{ji}) k_n \mathbf{P}\{|Y_n| > 1\}.$$

Из этой оценки при использовании **(A2)** мы получаем сходимость (ii).

Пункты (i) и (iii) настоящей леммы мы доказываем аналогичным образом. Лемма 3 доказана.

В дальнейшем мы предполагаем, что $|Y_{nij}| \leqslant 2$ и $\mathbf{E} Y_{nij} = 0$. Благодаря лемме 3, мы не теряем в общности при использовании последних условий. Обозначим, $v_n^2 = \sigma^2(Y_n)$.

Для доказательства относительной компактности семейства распределений мы используем следующий вариант максимального неравенства Леви (см., например, [5]): если (U_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ – независимые случайные величины и $V_k = \sum_{i=1}^k U_i$, тогда для каждого $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\{\max_{k\leqslant n} |V_k| > \varepsilon\} \leqslant 2\mathbf{P}\left\{|V_n| > \varepsilon - \sqrt{2\sigma^2(V_n)}\right\}$$

$$= 2\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(V_n)}} |V_n| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma^2(V_n)}} - \sqrt{2} \right\}. \quad (2)$$

Отметим, что неравенство (2) остается верным, когда в его левой части мы используем вместо $\max_{k\leqslant n} V_k$ выражение $\max_{k\in M} V_k$, где $M \subset \{1, 2, \dots n\}$. Этот факт мы применим в следующей лемме 4.

Лемма 4. *Для всех* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, $t_1, t_2 \in Q_T$, *для всякого* $\varepsilon > 0$ *выполнено следующее неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]} |S_l - S_{[t_1k_n]}| > \varepsilon\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{|S_{1n}| > \frac{\varepsilon}{3} - \sqrt{2\sigma^2(S_{1n})}\right\} + 4\mathbf{P}\left\{|S_{2n}| > \frac{\varepsilon}{3} - \sqrt{2\sigma^2(S_{2n})}\right\},$$

где

$$S_{1n} \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} \left(1 - I_{[t_1n]i} I_{([t_1k_n]-1)i} \dots I_{([t_1n]+1)i}\right) Y'_{[t_1k_n]i},$$

$$S_{2n} \triangleq \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=[t_1k_n]+1}^{[t_2k_n]} I^c_{ji} Y_{ji}. \tag{3}$$

Доказательство леммы 4. Так как $S_{[t_1k_n]} = \sum\limits_{i=1}^{k_n} Y'_{[t_1k_n]i}$, и при $t_1 \leqslant l \leqslant t_2$ из (1) следует, что

$$S_l = \sum_{i=1}^{k_n}\Big(I_{li} I_{(l-1)i} \dots I_{([t_1k_n]+1)i} Y'_{[t_1k_n]i} + \sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l} \Big(\prod_{k=j+1}^{l-1} I_{ki}\Big) I^c_{ji} Y_{ji}\Big), \tag{4}$$

то,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]} |S_l - S_{[t_1n]}| > \varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]} \left|\sum_{i=1}^{k_n} \left(I_{li} I_{(l-1)i} \dots I_{([t_1n]+1)i} - 1\right) Y'_{[t_1n]i}\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

$$+\mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]} \left|\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l} \left(\prod_{k=j+1}^{l-1} I_{ki}\right) I^c_{ji} Y_{ji}\right| > \frac{2\varepsilon}{3}\right\}. \tag{5}$$

Оценив второе слагаемое в (5), мы получим,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]} \left|\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l} \Big(\prod_{k=j+1}^{l-1} I_{ki}\Big) I^c_{ji} Y_{ji}\right| > \frac{2\varepsilon}{3}\right\}$$

$$= \mathbf{P}\Bigg\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\Bigg|\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l}\Bigg(\prod_{k=j}^{l-1}I_{ki}\Bigg)I_{ji}^{c}Y_{ji}+$$

$$+\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}-\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}\Bigg)\Bigg|>\frac{2\varepsilon}{3}\Bigg\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\Bigg\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\Bigg|\sum_{i=1}^{k_n}\Bigg(\sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l}\Bigg(\prod_{k=j}^{l-1}I_{ki}\Bigg)I_{ji}^{c}Y_{ji}+\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}\Bigg)\Bigg|>\frac{\varepsilon}{3}\Bigg\}$$

$$+\mathbf{P}\Bigg\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\Bigg|\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}\Bigg|>\frac{\varepsilon}{3}\Bigg\}. \qquad (6)$$

Применяя неравенство (2), мы имеем,

$$\mathbf{P}\Bigg\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\Bigg|\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}\Bigg|>\frac{\varepsilon}{3}\Bigg\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\Bigg\{|S_{2n}|>\frac{\varepsilon}{3}-\sqrt{2\sigma^2(S_{2n})}\Bigg\},$$

и

$$\mathbf{P}\Bigg\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\Bigg|\sum_{i=1}^{k_n}\Bigg(\sum_{j=[t_1k_n]+1}^{l}\Bigg(\prod_{k=j}^{l-1}I_{ki}\Bigg)I_{ji}^{c}Y_{ji}+\sum_{j=l+1}^{[t_2k_n]}I_{ji}^{c}Y_{ji}\Bigg)\Bigg|>\frac{\varepsilon}{3}\Bigg\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{|S_{2n}|>\frac{\varepsilon}{3}-\sqrt{2\sigma^2(S_{2n})}\right\}.$$

Наконец,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{[t_1k_n]<l\leqslant[t_2k_n]}\left|\sum_{i=1}^{k_n}\left(I_{li}I_{(l-1)i}\dots I_{([t_1k_n]+1)i}-1\right)Y'_{[t_1k_n]i}\right|>\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{|S_{1n}|>\varepsilon-\sqrt{2\sigma^2(S_{1n})}\right\}. \qquad (7)$$

Комбинируя эти оценки, мы выводим (3) из (5), (6) и (7). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для всех $\omega_1 \in \Omega'$, для всех $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, $t_1, t_2 \in Q_T$, для произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется следующее неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\max_{[t_1 k_n]<l\leqslant[t_2 k_n]} |S_l - S_{[t_1 k_n]}| > \varepsilon\} \leqslant 6\mathbf{P}\left\{|\gamma| > \frac{\varepsilon}{3v\sqrt{1-\frac{h(t_2)}{h(t_1)}}} - 2\right\}.$$

Доказательство леммы 5. Рассмотрим последовательности $(U_n = S_{1n})$ и $(U_n = S_{2n})$. При выполнении условий 1) и 2) мы имеем предельное поведение необходимых дисперсий при $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=[t_1 n]+1}^{[t_2 k_n]} \sigma^2\left(I_{ji}^c Y_{ji}\right) = k_n v_n^2 \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=[t_1 n]+1}^{[t_2 n]} I_{ji}^c \to v^2(g(t_2) - g(t_1)),$$

и

$$\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2\left(\left((I_{[t_2 k_n]i} I_{([t_2 k_n]-1)i} \dots I_{([t_1 k_n]+1)i} - 1)Y'_{[t_1 k_n]i}\right)\right.$$

$$= k_n v_n^2 \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (1 - I_{[t_2 k_n]i} I_{([t_2 k_n]-1)i} \dots I_{([t_1 k_n]+1)i}) \to v^2\left(1 - \frac{h(t_2)}{h(t_1)}\right).$$

Следовательно условие (4a) леммы А п. (2) выполнено, и благодаря лемме А п. (2) имеют место следующие сходимости при $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{k_n} (1 - I_{[t_2 k_n]i} I_{([t_2 k_n]-1)i} \dots I_{([t_1 k_n]+1)i}) Y'_{[t_1 n]i} \xrightarrow{d} \gamma\left(v\sqrt{1 - \frac{h(t_2)}{h(t_1)}}\right)$$

и

$$\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=[t_1 k_n]+1}^{[t_2 k_n]} I_{ji}^c Y_{ji} \xrightarrow{d} \gamma\left(v\sqrt{g(t_2) - g(t_1)}\right).$$

Поэтому, после предельного перехода в (3) мы получаем оценку,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\max_{[t_1 k_n]<l\leqslant[t_2 k_n]} |S_l - S_{[t_1 k_n]}| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{|\gamma| > \frac{\varepsilon}{3v\sqrt{1-\frac{h(t_2)}{h(t_1)}}} - 2\right\} + 4\mathbf{P}\left\{|\gamma| > \frac{\varepsilon}{3v\sqrt{g(t_2)-g(t_1)}} - 2\right\}$$

$$\leqslant 6\mathbf{P}\left\{|\gamma| > \frac{\varepsilon}{3v\sqrt{1-\frac{h(t_2)}{h(t_1)}}} - 2\right\}.$$

Лемма 5 доказана.

5. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть, $\omega_1 \in \Omega'$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а также $n_k = [k_n T \frac{k}{m}]$, $0 \leqslant k \leqslant m$. Сначала мы практически повторяем доказательство теоремы 1 в [7, с. 358], затем используем лемму 5 и равномерную непрерывность функции f, и выводим цепочку неравенств

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{|t'-t"|\leqslant h} |X_n(t') - X_n(t")| > \varepsilon \Big\}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{|t'-t"|\leqslant \frac{T}{m}} |X_n(t') - X_n(t")| > \varepsilon \Big\}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{n_{k-1}<l\leqslant n_k} |S_l - S_{n_{k-1}}| > \frac{\varepsilon}{8} \Big\}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} 6 \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left\{ |\gamma| > \frac{\varepsilon}{24v\sqrt{1-\frac{h(T\frac{k-1}{m})}{h(T\frac{k}{m})}}} - 2 \right\}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} 6 \sum_{k=1}^{m} \frac{24^4 v^4 \mathbf{E}|\gamma|^4 (h(T\frac{k-1}{m}) - h(T\frac{k}{m}))^2}{\big(\varepsilon h(T) - 48v\sqrt{h(T\frac{k-1}{m}) - h(T\frac{k}{m})}\,\big)^4} \tag{8}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} 6 \cdot 24^4 v^4 \mathbf{E}|\gamma|^4 \max_{1\leqslant k\leqslant m} \frac{(h(T\frac{k-1}{m}) - h(T\frac{k}{m}))^2}{\big(\varepsilon h(T) - 48v\sqrt{h(T\frac{k-1}{m}) - h(T\frac{k}{m})}\,\big)^4} = 0.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, числа $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant T$, и $a_k \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Мы покажем, что при $n \to \infty$ верна сходимость

$$\sum_{k=1}^{m} a_k X_n(t_k) \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{m} a_k X(t_k).$$

Для каждого k, такого, что $1 \leqslant k \leqslant m$, и для каждого $\varepsilon > 0$ по лемме 5 мы имеем оценку,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n(t_k) - X'_n(t_k)| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \lim_{\delta\to 0+} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{[k_n t_k]\leqslant l\leqslant \min([k_n(t_k+\delta)], K_n)} |S_l - S_{[(t_1+\delta)k_n]}| > \frac{\varepsilon}{2} \Big\} = 0.$$

Так как $X_n(t_k) - X'_n(t_k) \to 0$ при $n \to \infty$ по вероятности, то достаточно доказать, что при $n \to \infty$ верно следующее предельное соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} a_k X'_n(t_k) \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{m} a_k X(t_k).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m} a_k X'_n(t_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{i=1}^{k_n} Y'_{[t_k k_n]i} = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{[t_m k_n]} b_{nji} Y_{ji},$$

где b_{nji} – суммы произведений индикаторов I^c_{ji}, I_{ji} с весами a_k.

Проверим условия леммы А п. (2) для последовательности $U_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \sum\limits_{j=0}^{[t_m k_n]} b_{nji} Y_{ji}$.

Положим, $C = \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|$. Тогда $|b_{nij}| \leqslant C$, $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $0 \leqslant j \leqslant [t_m k_n]$. Так как верно равенство

$$\mathbf{E} Y'_{[t_l k_n]k} Y'_{[t_r k_n]k} = v_n^2 \Big(\prod_{j=1}^{[t_r k_n]} I_{jk} + \sum_{i=1}^{[k_n t_l]} \Big[\prod_{j=i+1}^{[k_n t_r]} I_{jk} \Big] I^c_{(i-1)k} \Big) = v_n^2 \prod_{j=[t_l k_n]+1}^{[t_r k_n]} I_{jk},$$

где $t_r \geqslant t_l$, то

$$\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{[t_m k_n]} \mathbf{E}(b_{nij} Y_{ji})^2 = \mathbf{E} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{i=1}^{k_n} Y'_{[t_k k_n]i} \Big)^2$$

$$= k_n v_n^2 \Big(\sum_{l=1}^{m} (a_l)^2 + 2 \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{l,r=1, l<r}^{m,m} a_l a_r \prod_{j=[t_l k_n]+1}^{[t_r k_n]} I_{jk} \Big).$$

Поэтому, по лемме 1, при $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{[t_m k_n]} \mathbf{E}(b_{nij} Y_{ji})^2 \to v^2 \Big(\sum_{l=1}^{m} (a_l)^2 + 2 \sum_{l,r=1,\ l<r}^{m,m} a_l a_r f(t_l, t_r) \Big).$$

Элементарные вычисления приводят к равенству

$$v^2 \left(\sum_{l=1}^{m} (a_l)^2 + 2 \sum_{l,r=1,\ l<r}^{m,m} a_l a_r f(t_l, t_r) \right) = \sigma^2 \left(\sum_{k=1}^{m} a_k X(t_k) \right).$$

Заметим, что условия леммы А п. (2) выполнены. Следовательно, при $n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k X_n(t_k) \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{m} a_k X(t_k).$$

Поэтому по теореме 7.7 из [6] мы устанавливаем факт сходимости конечномерных распределений процесса X_n к конечномерным распределениям процесса X. Последний факт и предел в (8) по теореме 1 (см. [7, с. 522]) влекут сходимость, $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$, в пространстве $C[0,T]$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\omega_1 \in \Omega''$. Заметим, что

$$Z_n(t) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{[k_n t]} S_{j-1} + \frac{\{k_n t\}}{k_n} S_{[k_n t]} = Z'(t) - \frac{1 - \{k_n t\}}{k_n} S_{[k_n t]}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим, $n_k = [k_n T \frac{k}{m}]$, $0 \leqslant k \leqslant m$. Сначала мы повторяем доказательство теоремы 1 (см. [7, с. 358]) и выводим цепочку неравенств

$$\mathbf{P}\Big\{ \sup_{|t'-t''| \leqslant \frac{T}{m}} |Z_n(t') - Z_n(t'')| > \varepsilon \Big\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\Big\{ \sup_{n_{k-1} < t \leqslant n_k} |Z_n'(t) - Z'_{[T\frac{k-1}{m}]}| > \frac{\varepsilon}{8} \Big\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left\{ \sup_{n_{k-1} < l \leqslant n_k} \Big| \frac{1}{k_n} \sum_{j=[k_n T \frac{k-1}{m}]+1}^{l} S_j \Big| > \frac{\varepsilon}{8} \right\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left\{ \sup_{n_{k-1} < l \leqslant n_k} \left(\left| \frac{n_k - n_{k-1}}{k_n} S_{n_{k-1}} \right| + \left| \frac{1}{k_n} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{l} (S_j - S_{n_{k-1}}) \right| \right) > \frac{\varepsilon}{8} \right\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left\{ \frac{n_k - n_{k-1}}{k_n} \left| S_{n_{k-1}} \right| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\mathbf{P}\left\{\sup_{n_{k-1}<l\leqslant n_k}\frac{n_k-n_{k-1}}{k_n}|S_l-S_{n_{k-1}}|>\frac{\varepsilon}{16}\right\}=D_1+D_2.$$

Так как $\frac{n_k-n_{k-1}}{k_n}\to\frac{T}{m}$, и $S_{n_{k-1}}\xrightarrow{d}\gamma(v)$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}D_1=\lim_{m\to\infty}m\mathbf{P}\left\{\frac{T}{m}|\gamma(v)|>\frac{\varepsilon}{16}\right\}=0.$$

По лемме 5,

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}D_2\leqslant\lim_{m\to\infty}6m\mathbf{P}\Big\{|\gamma|>\frac{\varepsilon m}{48vT}-2\Big\}=0.$$

Поэтому,

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\big\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|Z_n(t')-Z_n(t'')|>\varepsilon\big\}=0.\tag{9}$$

Пусть $m\in\mathbb{N}$, числа $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m\leqslant T$, и $a_k\in\mathbb{R}$, $1\leqslant k\leqslant m$. Мы покажем, что при $n\to\infty$ имеет место следующая сходимость

$$\sum_{k=1}^{m}a_kZ_n(t_k)\xrightarrow{d}\sum_{k=1}^{m}a_kZ(t_k).$$

Так как $|Z_n(t_k)-Z_n'(t_k)|\leqslant\frac{1}{k_n}|S_{[t_kk_n]}|$, и $S_{[t_kk_n]}\xrightarrow{d}\gamma(v)$ при $n\to\infty$, то $Z_n(t_k)-Z_n'(t_k)\xrightarrow{p}0$ при $n\to\infty$ и достаточно показать, что при $n\to\infty$ имеет место следующее предельное соотношение,

$$\sum_{k=1}^{m}a_kZ_n'(t_k)\xrightarrow{d}\sum_{k=1}^{m}a_kZ(t_k).$$

Рассмотрим последовательность

$$U_n=\sum_{k=1}^{m}a_kZ_n'(t_k)=\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=0}^{[t_mk_n]}b_{nji}Y_{ji}.$$

Заметим, что коэффициенты b_{nji} являются суммами произведений индикаторов $I_{ji}^c(\omega_1)$, $I_{ji}(\omega_1)$ с весами $a_k\frac{m}{k_n}$ для $m\leqslant Tk_n$. Таким образом, $|b_{nji}|\leqslant C$, где $C=T\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|$.

Итак, мы имеем,

$$\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=0}^{[t_m k_n]}\mathbf{E}(b_{ji}Y_{ji})^2=\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k Z_n'(t_k)\right)^2=\sum_{l_1,l_2=1}^{m,m}a_{l_1}a_{l_2}\mathbf{E}Z_n'(t_{l_1})Z_n'(t_{l_2})$$

$$=k_n v_n^2\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}\left(\sum_{l=1}^{m}(a_l)^2 g_{ni}'(a_l,a_l)+2\sum_{l_1<l_2,l_1,l_2=1}^{m,m}a_{l_1}a_{l_2}g_{ni}'(a_{l_1},a_{l_2})\right).$$

Так как

$$\sigma^2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k Z'(t_k)\right)$$
$$=v^2\left(\sum_{l=1}^{m}(a_l)^2 f_1(a_l,a_l)+2\sum_{l_1<l_2,l_1,l_2=1}^{m,m}a_{l_1}a_{l_2}f_1(a_{l_1},a_{l_2})\right),$$

то по лемме 2, при $n\to\infty$,

$$\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{[t_m k_n]}\mathbf{E}(b_{nji}Y_{ji})^2\to\sigma^2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k Z'(t_k)\right).$$

Условие (4a) леммы A п. (2) выполнено, и мы имеем при $n\to\infty$ сходимость,

$$\sum_{k=1}^{m}a_k Z_n(t_k)\xrightarrow{d}\sum_{k=1}^{m}a_k Z(t_k).$$

Поэтому по теореме 7.7 из [6] мы устанавливаем факт сходимости конечномерных распределений процесса Z_n к конечномерным распределениям процесса Z. Последний факт и предел в (9) по теореме 1 (см. [7, с. 522]) влекут сходимость, $Z_n\xrightarrow{d}Z$ при $n\to\infty$, в пространстве $C[0,T]$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим $\omega_1\in\Omega'$. Заметим, что для $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|Z_n(t)-Z_n'(t)|>\varepsilon\Big\}\leqslant\mathbf{P}\Big\{\sup_{0\leqslant l\leqslant[Tk_n]}\Big|\frac{S_l}{k_n}\Big|>\varepsilon\Big\}$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\Big|\frac{S_0}{k_n}\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+\mathbf{P}\left\{\sup_{0<l\leqslant[Tk_n]}\Big|\frac{S_l-S_0}{k_n}\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Так как $S_0 \xrightarrow{d} \gamma(v)$ при $n \to \infty$, то $\frac{S_0}{k_n} \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$. По лемме 5, $\sup_{0<l\leqslant[Tk_n]}\left|\frac{S_l - S_0}{k_n}\right| \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$,

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |Z_n(t) - Z_n'(t)| > \varepsilon\Big\} \to 0.$$

Пространство $C[0,T]$ является подпространством $L^\infty[0,T]$. Траектории процесса $Z_n'(t)$ являются элементами $L^\infty[0,T]$. Поэтому теорема 3 следует из теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Теорема 4 является следствием теорем 1–3.

Пусть, $G : C[0,T] \to \mathbf{R}$ – непрерывные ограниченные функции. По теореме 1 для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ мы имеем, $\mathbf{E}_0 G(X_n) \to \mathbf{E}_0 G(X)$ при $n \to \infty$. Поэтому по теореме Лебега, $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_0 G(X_n) \to \mathbf{E}_0 G(X)$ при $n \to \infty$. Заметим, что $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_0 G(X_n) = \mathbf{E} G(X_n)$. Это влечет, что для всякой ограниченной непрерывной функции $G : C[0,T] \to \mathbb{R}$ мы имеем сходимость математических ожиданий $\mathbf{E}G(X_n) \to \mathbf{E}G(X)$ при $(n \to \infty)$. Поэтому, $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$ в пространстве $C[0,1]$.

При выполнении условий теоремы 2 или теоремы 3 мы можем доказать теорему 4 аналогично. Теорема 4 доказана.

Литература

1. I. Fazekas, A. N. Chuprunov, *Convergence of random step lines to Ornstein–Uhlenbeck type processes.* Technical Report of the Debrecen University, No. 24/1996. (1996).
2. A. N. Chuprunov, *Functional limit theorems for sums of independent random variables with replacements.* Probabilistic Methods in Discrete Mathematics., VSP (1997), 157–173.
3. О. В. Русаков, *Функциональная предельная теорема для случайных величин с сильной остаточной зависимостью.* — Теор. вер. и прим. **40**, No. 4 (1995), 813–832.
4. В. М. Круглов, В. Ю. Королев, *Предельные теоремы для случайных сумм.* Издательство Московского университета, М. (1990).
5. M. Loéve, *Probability Theory.* van Nostrand, Princeton–New Jersy–Toronto, New York–London. (1960).
6. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М. (1977).
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, М. (1977).
8. O. V. Rusakov, *A model of market pricing with randomly distributed information and the geometric integral of the Ornstein–Uhlenbeck process.* Report of the Department of Mathematics. University of Helsinki. Preprint 184 (1998).

9. О. В. Русаков, *Предельное поведение дисперсии сумм случайных величин со случайными замещениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 714–728.
10. A. N. Chuprunov, O. V. Rusakov, *Functional Poissonian limit theorem and its applications.* — J. Math. Sci. **112**, No. 2 (2002), 4119–4125.
11. J.-L. Prigent, O. Renault, O. Scaillet, *Option pricing with discrete rebalancing.* CREST Document de travail INSEE N9961 (1999).
12. O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, *Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck – based models and some of their uses in financial economics.* — J. Royal Statist. Soc. **63** (2) (2001), 167–241.
13. A. W. Lo, J. Wang, *Implementing option pricing models when asset returns are predictable.* — J. Finance **50**, No. 1 (1995), 87–129.
14 O. V. Rusakov, *On mean value of profit for option holder: cases of a non-classical and the classical market models.* — In: Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications. (N. Balakrishnan, I. A. Ibragimov, V. B. Nevzorov, eds.), Birkhäuser, Boston (2001), pp. 523–534.
15. H. Föllmer, M. Schweizer, *A microeconomic approach to diffusion models for stock prices.* — Math. Finance **3**, No. 1 (1993), 1–23.
16. J. W. Lamperti, *Semi-stable stochastic processes.* — Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 62–78.

Rusakov O. V, Chuprunov A. N. Limit theorems for nonhomogeneous Ornstein–Uhlenbeck process.

We describe a construction of a summation scheme with replacements of random variables. We obtain, as a limit, a time nonhomogeneous generalization of Ornstein–Uhlenbeck process. We describe it by a transform of Lamperti type where an arbitrary continuous monotone function is used instead of the exponential one.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 ноября 2006 г.